Une approche de la mesure

La mesure des longueurs, dans les anciens manuels de Sixième, insistait essentiellement sur le mesurage : comment utiliser les instruments. Pour la culture, on rappelait l'histoire du système métrique, et même on indiquait la station de métro la plus proche du Pavillon de Breteuil!

Ou bien la partie 3 du nouveau programme « études d'objets géométriques et physiques donnant lieu à mesures » n'est rien d'autre que le programme ancien (et alors mieux vaudrait n'en rien traiter du tout, car on n'a pas de temps à perdre), ou bien elle peut constituer une approche de la théorie de la mesure et alors c'est un sujet difficile. Au niveau des élèves de Sixième, la géométrie est une partie de la physique (en donnant à ce mot le sens : étude du monde réel et de ses phénomènes). Le problème posé est donc celui de la mathématisation d'une situation physique, ou tout au moins d'une partie importante de cette mathématisation. Il est douteux que nous puissions mener la théorie de la mesure jusqu'à satisfaire à la fois les mathématiciens et les physiciens. Ce n'est pas une raison pour ne rien faire, mais il faut savoir quelles sont les exigences des uns et des autres pour rechercher par quels moyens nous pouvons nous engager dans une bonne route.

L'objectif.

Celui que je me propose est la mesure dite de Jordan. Dans un ensemble E, on définit une famille de parties $\mathcal{A}$ qui soit stable par les opérations de réunion et de différence. Cela signifie : $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$; si $X \in \mathcal{A}$ et $Y \in \mathcal{A}$, alors $X \cup Y \in \mathcal{A}$, $X \setminus Y \in \mathcal{A}$, $Y \setminus X \in \mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ est alors dit *clan* sur E. On remarque : $\varnothing \in \mathcal{A}$ puisque, si $X \in \mathcal{A}$, alors $X \setminus X = \varnothing \in \mathcal{A}$.

Une mesure est alors une application m de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}^+$ qui, à tout élément X du clan, associe un réel positif noté $m(X)$, cette application vérifiant les propriétés :

$$m(X \cup Y) + m(X \cap Y) = m(X) + m(Y)$$
$$m(\varnothing) = 0$$

Les parties de E qui sont éléments du clan sont alors dites parties mesurables de E par la mesure m ou encore parties m mesurables de E.

Si nous définissons un autre clan $\mathcal{B}$ tel que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{P}(E)$, on pourra prolonger l'application m sur $\mathcal{B}$ de telle façon que toute partie du clan $\mathcal{A}$ qui était mesurable le reste (et conserve la même valeur $m(X)$), mais que les parties du clan $\mathcal{B}$ qui n'étaient pas des parties du clan $\mathcal{A}$ soient mesurables.

Si E est un ensemble de points dans un espace choisi (par exemple l'espace métrique euclidien à trois dimensions), on peut imposer à la m-mesure qui y aura été définie d'être invariante par déplacement ou symétrie.

Difficultés pédagogiques.

La plus importante, au premier examen, provient du fait que les élèves ne connaissent pas les réels. Traditionnellement, ce sont les difficultés de la mesure (longueur de la diagonale du carré, périmètre du cercle) qui sont invoquées pour donner conscience qu'il existe (ou qu'il devrait exister) des nombres réels.

La nécessité de définir un clan avant de définir une mesure ne peut apparaître sans préparation. D'autant que les élèves ne nous ont pas attendus pour pratiquer des mesurages... et traiter des « problèmes » sur les dallages de cuisine qui ont fait (et font encore) l'orgueil de manuels du Cours Moyen.

Supposons surmontées les difficultés précédentes, pour les ensembles « géométriques », l'invariance par déplacement ou symétrie sera d'autant plus difficile à définir que déplacements et symétries ne le sont pas.

Le programme officiel parle aussi de masse, de masse volumique, de débits. Comme le dit plus loin DEHAME, dans ce cas c'est le programme officiel qui est trop ambitieux. Nous nous limiterons, par exemple, à mesurer les longueurs et les aires. Et encore, pas toutes les longueurs, pas toutes les aires. Nous n'étudierons pas tout ce que le programme nous indique et nous garderons la conscience libre : les élèves ont-ils achevé leurs études à la fin de la Sixième?

Une première suite d'exercices.

1. Soit $E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$; nous pouvons dénombrer toutes les parties de E qui sont des paires, toutes celles dont le cardinal est 3, etc. Autrement dit, nous savons appliquer $\mathfrak{P}(E)$ dans $\mathbb{N}$, cette application faisant correspondre à $X \in \mathfrak{P}(E)$ un naturel noté card X et nous vérifions :

$$\text{card } \varnothing = 0, \qquad \text{card } (X \cup Y) + \text{card } (X \cap Y) = \text{card } X + \text{card } Y$$

2. Sur la ligne de chemin de fer de Saint-Lazare à Saint-Cloud nous connaissons la suite des stations intermédiaires : Pont Cardinet, Clichy, Asnières, Bécons, Courbevoie, Puteaux, Suresnes, Val d'Or. Pour un voyageur qui va de Bécons à Suresnes, il est assez naturel de penser que c'est au troisième arrêt qu'il descend; définissons ainsi une application t de l'ensemble des voyages possibles (sur cette ligne) dans $\mathbb{N}$; ici t (Bécons, Suresnes) = 3; de même t (Courbevoie, Saint-Cloud) = 4. Nos deux voyageurs se sont trouvés côte à côte sur le trajet (Courbevoie, Suresnes) et t(C, S) = 2. Ils ont été les seuls occupants de ce compartiment qui a donc été occupé par un voyageur au moins sur le trajet (Bécons, Saint-Cloud) tel que t(B, SC) = 5. On vérifie : t(B, S) + t(C, SC) = t(C, S) + t(B, SC).

Pour le voyageur étourdi qui est entré dans le compartiment à Bécons mais qui est redescendu aussitôt parce qu'il se trompait de train, t(B, B) = 0.

Dans E, $\mathfrak{P}(E)$ est un clan; l'application card est une mesure. Sur la ligne Saint-Lazare, Saint-Cloud, les trajets de station à station constituent un clan (avec les conventions précitées pour intersection et réunion); t est une mesure (qui n'est pas sans lien avec le prix du billet).

3. *Sur un damier*, le premier joueur dispose les jetons blancs sur les cases (blanches ou noires) de son choix; il définit ainsi un sous-ensemble B de l'ensemble D des cases du damier; le deuxième joueur opère de la même façon avec les jetons noirs (il a le droit d'occuper une case déjà occupée par un jeton blanc); soit N le sous-ensemble des cases marquées d'un jeton noir.

B et N peuvent être considérées comme deux surfaces incluses dans la surface du damier. Le nombre b des jetons qui définissent B est une mesure de B.

Il apparaîtra rapidement aux élèves que ces trois exercices, sous des aspects

différents, sont de la même nature : ils définissent une mesure, chaque fois sur un ensemble discret. Avant d'aller plus loin, on peut donc conclure que sur toute ligne (fig. 1) jalonnée de points marqués, dans toute surface (fig. 2) partitionnée ou carrelée, il est possible de définir un clan de « segments » ou de « surfaces » mesurables.

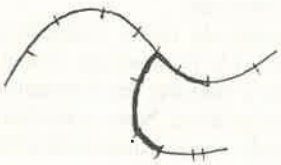

FIG. 1.

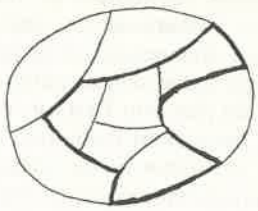

FIG. 2.

Essai de formalisation.

Simplifions les situations précédentes en considérant les segments sur une droite, un quadrillage dans le plan (fig. 3 et 4).

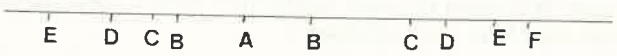

FIG. 3.

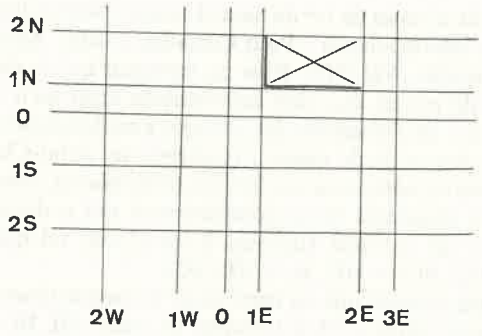

FIG. 4.

Les segments semi-ouverts tels que [BC[, les « carreaux » semi-ouverts tel que le carreau marqué (1E, 1N) du nom du sommet Sud-Ouest de ce carreau (fermé au Sud et à l'Ouest, ouvert au Nord et à l'Est) constituent des clans.

La définition de segments mesurables, de surfaces mesurables, dans ces cas de figure, ne présente pas de difficulté. L'expérience montre que la notion d'ouvert ou de fermé, pour abstraite qu'elle soit, n'est pas hors de la portée des élèves de Sixième. Faute de l'accepter, on en est réduit à introduire les « segments » de mesure nulle tels que [BB], les « surfaces » de mesure nulle telles que le segment [1 E, 2 E] sur la ligne 1 S, etc.

A propos de l'introduction des ouverts ou des fermés, l'introduction de la notion de *bord* (le bord d'un segment est l'ensemble de ses extrémités, le bord d'un carré

l'ensemble de ses côtés) est commode. Si le carré est l'ensemble de son bord et de sa surface intérieure, n'est-il pas naturel de distinguer carré ouvert et carré fermé selon que le bord n'est pas compris ou l'est?

Sur les figures 3 et 4, nous avons, à dessein, utilisé des points marqués quelconques, des « carreaux » qui, pour être rectangulaires (pour la commodité du dessin sur le cahier) n'en sont pas moins irréguliers. En Sixième, l'isométrie sera définie par la superposition (par exemple deux faces d'un cube sont dites isométriques parce qu'elles ont la même *empreinte*, deux cubes sont isométriques s'ils sont issus du même *moule ;* c'est de la physique). Il n'est pas difficile de passer des mesures avec segments ou carreaux irréguliers à mesures avec segments ou carreaux isométriques : on obtient une mesure invariante par translations et certaines symétries.

Généralisation.

Reste le problème très général : comment mesurer un segment quelconque de la droite graduée (à graduations régulières désormais), comment mesurer la surface d'une pièce à cloisons mobiles posées sur un sol carrelé?

Il est instructif de prendre conscience d'une difficulté nouvelle. On a une mesure approchée de la surface d'un rectangle en dénombrant les carreaux du clan intérieurs à la surface du rectangle. Mais, par translation du rectangle, sur le quadrillage, il apparaît que deux rectangles isométriques ont, pour mesures approchées par défaut de leur surface, dans un cas 2, dans l'autre cas 6. Par contre, les mesures approchées par excès (obtenues par dénombrement des carreaux du clan *recouvrant* la surface du rectangle est, selon les cas, 12 et 20). Admettons provisoirement l'existence de deux nombres a et a' exprimant les mesures des deux rectangles :

$$2 < a < 12 \qquad 6 < a' < 20$$

Il faudra sans doute freiner l'ardeur de certains élèves ayant tôt fait de poser

$$a = a' \quad \text{et} \quad 6 < a < 12$$

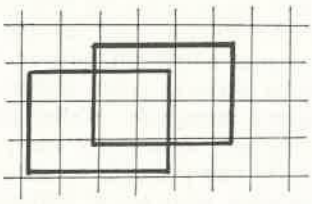

FIG. 5.

Mieux vaut, plus posément, plonger le premier clan dans un second plus riche (par subdivision des segments en deux si le système de numération binaire a été adopté, en dix si c'est en numération décimale) et étudier les nouvelles mesures b et b' obtenues.

L'exercice est à effectuer sur papier millimétrique avec une surface de forme quelconque obtenue par reproduction mécanique mais la position de la surface sur le quadrillage variant d'une copie à l'autre. On peut d'ailleurs se contenter de faire

dessiner par les élèves soit un cercle de rayon donné, soit pour éviter chez des faux malins le recours à une formule connue, une surface plus compliquée (fig. 6).

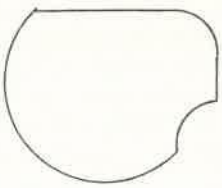

FIG. 6.

Aurons-nous, par de tels exercices, préparé nos élèves à comprendre, plus tard, une théorie de la mesure qui leur sera indispensable dès qu'ils prendront contact avec les probabilités? Il me semble, en tout cas, que cela ne les empêchera pas de résoudre les problèmes de carrelage de cuisine que je paraissais mépriser au début alors que, à Ostia ou à Vaison-la-Romaine, j'admire les solutions que des artisans des vieux âges ont imaginées.

G. W.