Les conditions de la F.P.M. ayant été précisées dans les articles précédents, nous donnons ensuite un exemple des études que cette formation permanente nous engage à entreprendre. Traiter, en Sixième, des problèmes de mesure n'est pas nouveau. Ce qui l'est peut-être c'est de se poser à ce sujet le problème mathématique général de la mesure.

On s'aperçoit alors que divers exposés sont possibles. En classe, un seul point de vue sera peut-être adopté. Mais comment le maître choisira-t-il ? S'il ne connaît sur chaque sujet qu'un seul chemin, comment les élèves connaîtront-ils tout le pays ?

C'est pourquoi après l'exposé de notre Collègue BUISSON, *il nous a paru utile de présenter un point de vue différent. Nous espérons revenir sur ce thème dans d'autres* Bulletins.

Mesure et géométrie

P. BUISSON
I.R.E.M. de Strasbourg

Cet exposé, qui a été présenté à un stage interacadémique à Strasbourg concernant l'expérience en Sixième, comprend trois parties. Une première, algébrique, est consacrée à l'étude de l'existence de mesures des segments de l'espace affine invariante par les translations et vérifiant une certaine propriété d'additivité. Son but est de donner un certain nombre de définitions et de notations en accord avec la théorie; celles-ci n'ont d'ailleurs rien d'original. La deuxième concerne les programmes de Sixième et de Cinquième et recherche comment appliquer les résultats de la première partie à ces niveaux en respectant les programmes et les instructions ministérielles. La dernière partie est consacrée aux autres mesures figurant dans ces programmes. Cet exposé tient compte des résultats de la discussion qui a eu lieu à ce sujet au moment du stage.

1. Mesure des segments.

1.1. Définition d'une droite affine.

Une droite affine (D) *est la donnée d'un ensemble de points et d'une famille de bijections appelées translations* f_t de (D), *paramétrée par les nombres réels* $\mathbb{R}$ *et vérifiant :*

(1.11.) $f_t\,(f_{t_1}(A)) = f_{t+t_1}(A)$ *pour tout* $A \in (D)$ *et tous* $t, t_1 \in \mathbb{R}$.

(1.12.) *Pour tout point* $O \in (D)$ *l'application de* $\mathbb{R}$ *dans* (D) *qui à t associe* $f_t(O)$ *est une bijection.*

On dit alors que le groupe additif des réels opère simplement et transitivement dans (D).

Il résulte de (1.12) que si $A \in (D)$ alors il existe $a \in \mathbb{R}$ unique tel que $A = f_a(O)$. Ce nombre a est l'abscisse du point A, le point O étant pris comme origine. Si O′ est un point d'abscisse x par rapport à O on aura

$$A = f_a(O) = f_{a'}(O') = f_{a'}(f_x(O)) = f_{a'+x}(O)$$

ce qui donne la formule de changement d'origine $a' = a - x$.

1.2. Définition des segments.

Si a et b sont deux nombres réels, on note $I(a, b)$ l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $x \geqslant \inf(a, b)$ et $x \leqslant \sup(a, b)$.

Définition : *Soient* A et B *deux points d'une droite affine* (D) *tels que* $A = f_a(O)$ *et* $B = f_b(O)$ *avec* $O \in (D)$; *on appelle segment d'extrémité A et B l'ensemble des points* $f_t(O)$ *avec* $t \in I(a, b)$. *On le note* [*AB*].

La formule de changement d'origine entraîne que cette définition est indépendante du choix du point O. Si A = B, on obtient le segment point noté [A]; la définition étant symétrique en A et B on a [AB] = [BA].

1.3. Mesure d'un segment.

Définition : *Soit* F *l'ensemble des segments d'une droite affine* (D); *une mesure sur* (F, D) *est une application non identiquement nulle* $m : F \to \mathbb{R}^+$ *vérifiant :*

(1.31) *Pour tout* $t \in \mathbb{R}$, $m[f_t(A)f_t(B)] = m[AB]$.

(1.32) *Si* $B \in [AC]$ *alors* $m[AB] + m[BC] = m[AC]$.

Comme $A \in [AC]$, on déduit de $m[A] + m[AC] = m[AC]$ que la mesure d'un point est nulle. D'autre part si S_1 et S_2 sont deux segments tels que $S_1 \cap S_2$ soit non vide, on aura :

$$m(S_1 \cup S_2) + m(S_1 \cap S_2) = m(S_1) + m(S_2).$$

Remarquons que $m(S_1 \cup S_2)$ est seulement définie dans ce cas, car la réunion de deux segments dont l'intersection est vide n'est plus un segment.

1.4. Cas de la droite réelle affine.

La droite réelle est la donnée de $\mathbb{R}$ et des translations $f_t(a) = a + t$. La première condition s'écrit : $m(I(a, b)) = m(I(a + t, b + t))$; on aura, en particulier, $m(I(a, b)) = m(I(0, b - a))$ et $m(I(0, x)) = m(I(0, -x))$. La mesure sera donc entièrement déterminée par la donnée pour $x \geqslant 0$ de $g(x) = m(I(0, x))$. Pour $0 \leqslant x \leqslant y$, la condition (1.32) s'écrit $g(x) + g(y - x) = g(y)$.

La fonction g est additive, à valeurs positives, donc croissante et continue.

Cela implique que g est une fonction linéaire : $g(x) = \lambda x$ avec $\lambda > 0$ et par suite $m(\mathrm{I}(a, b)) = \lambda|b - a|$ avec $\lambda > 0$. On en déduit qu'il existe une mesure, que deux mesures sont proportionnelles, et qu'une mesure est entièrement déterminée par la donnée d'un segment [OU] tel que $m[\mathrm{OU}] = 1$.

1.5. Droite affine quelconque.

A toute mesure m_{D} sur une droite affine (D) on peut associer une mesure $m_{\mathbb{R}}$ sur la droite réelle affine par :

$$m_{\mathrm{D}}(\mathrm{I}(a, b)) = m_{\mathbb{R}}\ [\mathrm{AB}] \text{ avec } \mathrm{A} = f_a(\mathrm{O}),\ \mathrm{B} = f_b(\mathrm{O}) \text{ et } \mathrm{O} \in (\mathrm{D}).$$

Cette définition est indépendante du choix de O car la mesure $m_{\mathbb{R}}$ doit être invariante par translation. D'une manière analogue on associe à toute mesure $m_{\mathbb{R}}$ sur la droite réelle affine une mesure m_{D} sur (D) invariante par translation, ce qui permet d'obtenir une correspondance biunivoque entre les mesures d'une droite affine quelconque et celles de la droite affine réelle.

En utilisant les résultats démontrés en 1.4, nous obtenons :

Théorème : *Si* D *est une droite affine réelle et* F *l'ensemble de ses segments, alors il existe sur* (F, D) *une infinité de mesures. Deux mesures sont proportionnelles entre elles et une mesure est entièrement déterminée par sa valeur sur un segment.*

1.6. Longueur d'un segment dans l'espace affine.

Soit E l'espace affine de dimension 3, on admettra que deux points A et B définissent une droite affine D(A, B), ce qui permet de mesurer le segment [AB].

Choisissons une mesure $m_{\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}$; nous dirons que *deux segments* [AB] *et* [CD] *ont même longueur* si $m_{\mathrm{D(A,B)}}$ [AB] $= m_{\mathrm{D(C,B)}}$ [CD], ces deux mesures correspondant à la mesure choisie sur $\mathbb{R}$. Cela définit une relation d'équivalence dans l'ensemble des segments indépendamment du choix de la mesure sur $\mathbb{R}$. Si on désigne par u la classe des segments qui mesurent 1 pour une mesure donnée sur $\mathbb{R}$, on dit que cette dernière définit une *u mesure* pour l'ensemble des segments de E et on notera u mes [AB].

On appellera *longueur du segment* [*AB*] la classe d'équivalence de ce segment, on la notera AB.

Remarquons qu'on peut aussi mesurer des longueurs, car les applications mesures passent au quotient; ceci justifie la notation u *mes* [*AB*] = u *mes AB*.

Somme de deux longueurs.

Étant donnés deux segments [AB] et [CD], il existe sur la droite affine D(A, B) un segment [BE] tel que [AB] $\cap$ [BE] = [B] et BE = CD.

On peut ainsi définir dans l'ensemble des longueurs une opération notée additivement, *appelée somme de deux longueurs* définie par

$$\mathrm{AB} + \mathrm{CD} = \text{classe de } [\mathrm{AE}].$$

Produit d'une longueur par un nombre.

Si [AB] est un segment et λ un réel positif, alors il existe sur la droite D(A, B) un segment [AC] tel que *u mes* [AC] = λ*u mes* [AB]; on peut aussi définir une opération externe, appelée *multiplication d'une longueur par un réel positif* par λAB = classe de [AC].

Cette opération justifie l'écriture AB = βu si *u mes* AB = β. L'écriture habituellement utilisée AB = 3 cm est donc tout à fait correcte dans cette théorie.

Remarque : Au cours de la discussion, plusieurs enseignants ont fait part des difficultés pédagogiques auxquelles ils se heurtent quand ils abordent les conséquences du théorème de Thalès et les triangles semblables car ils manient alors les longueurs qu'ils ont définies comme classes de segments superposables, comme des nombres. C'est pourquoi *on propose,* par définition, de *noter* $\overline{AB}$ la mesure du segment [AB] ou de sa longueur AB, chaque fois qu'il est inutile de préciser le choix de la mesure. C'est un nombre alors que [AB] et AB n'en sont pas.

1.7. Extension aux lignes polygonales.

On peut étendre, additivement, la mesure à des lignes polygonales, réunion finie de segments, en posant $m(L_1 \cup L_2) = m(L_1) + m(L_2)$, si L_1 et L_2 sont deux lignes polygonales dont l'intersection est soit vide, soit réunion d'un nombre fini de segments points.

2. Mesure d'un segment physique.

Cette étude a été faite pour expliciter les notions de mesure et de longueurs *des segments géométriques sur une droite affine ;* une telle étude est évidemment impossible en classe de Sixième et de Cinquième où l'espace est considéré comme espace « physique » et non pas affine.

Cela montre que le titre des programmes « Mesure d'objets géométriques et physiques » n'est pas clair et qu'il aurait fallu se contenter de « Mesure d'objets physiques », les objets géométriques étant impossible à définir.

2.1. En classe de Sixième.

La droite est ce qui se dessine avec une règle et un segment [AB] est l'ensemble des points de la droite « compris entre A et B ». On a également la notion de segments adjacents et on possède le compas à pointes sèches. *Deux segments qui déterminent le même écartement de compas seront dits isométriques.* On introduit alors la notion de mesure en utilisant l'axiome d'Archimède.

Axiome : Étant donné un segment [AB], *alors à tout segment* [OU] *on peut associer un plus petit entier* N *tel que le segment réunion des* N *segments adjacents, tous isométriques à* [OU], *construits à partir du point* A, *contient le point* B.

Si on désigne par u l'ensemble des segments isométriques à [OU], on dira que les deux entiers N — 1 *et* N *définissent un encadrement de la* u *mesure de* [*AB*] et on notera :

$$N - 1 < u \text{ mes } [AB] \leqslant N.$$

Si le point B est exactement l'extrémité du segment construit on notera u mes [AB] = N, car il faut pouvoir écrire u mes [OU] = 1.

Il est peut-être bon de mesurer avec les différentes unités de mesure utilisées dans l'histoire, en particulier le système métrique qui permet d'utiliser les nombres décimaux et de donner une première intuition des nombres réels comme limite d'une suite de Cauchy de nombres décimaux.

On peut encore plus facilement utiliser les nombres à virgule dans le système binaire, car construire à partir d'une unité u un segment S tel que u mes S = 10 (système décimal) est impossible pour un élève de Sixième alors que le pliage permet de construire un segment S_1 tel que u mes $S_1 = 10$ (système binaire).

Il n'est pas possible de définir la longueur comme classe d'équivalence. Par contre on doit pouvoir dire que u mes [AB] = β est synonyme de longueur du segment [AB] = βu et que cela s'écrit AB = βu. Cela doit d'ailleurs surtout s'énoncer pour les encadrements.

Pour les mesures de lignes polygonales on introduit l'axiome d'additivité, ce qui permet d'étudier dans $\mathbb{N}$ le comportement de l'addition par rapport à la relation d'ordre.

2.2. En classe de Cinquième.

L'élève a été habitué, par l'écriture des entiers relatifs, à noter une classe d'équivalence. Il est possible alors de préciser, à titre d'exemple de relation d'équivalence, la notion de longueur : deux segments [AB] et [CD] sont équivalents si pour toute u mesure on associe aux deux segments le même encadrement; *on appelle longueur du segment* [AB] *la classe d'équivalence du segment* [AB] *et on la note* AB.

Il est plus normal d'introduire la longueur comme classe d'équivalence à partir de la relation « a même mesure que » qu'à partir de la relation « est isométrique à » car cette dernière ne se généralise pas pour la définition de l'aire à partir des surfaces.

3. Autres mesures.

3.1. Mesure des surfaces.

Le problème théorique est encore plus difficile que pour les mesures de segments, car elle repose sur la notion de mesure produit.

La théorie nous permet d'affirmer qu'on peut mesurer les polygones en définissant à partir d'une u mesure de segments une, u^2 mesure des polygones en posant :

1° Si ABDC est un rectangle R alors

$$u^2 \text{ mes } R = u \text{ mes } [AB] \times u \text{ mes } [BC].$$

2° Si P_1 et P_2 sont deux polygones dont l'intersection est réduite à des points, des segments ou est vide, alors

$$u^2 \text{ mes } (P_1 \cup P_2) = u^2 \text{ mes } P_1 + u \text{ mes } P_2.$$

3° Si P_1 et P_2 sont « superposables » alors u^2 mes $P_1 = u^2$ mes P_2.

L'intérêt est certainement en classe de Sixième de déterminer un encadrement de la mesure d'un rectangle, à partir de la mesure des côtés, et d'étudier le comportement du produit par rapport à la relation d'ordre. On peut aussi en Cinquième introduire la notion d'aire comme autre exemple de relation d'équivalence.

3.2. Mesure de solides.

Le problème est encore plus difficile, car on ne peut pas, sans passage à la limite, mesurer les polyèdres à partir de la mesure du parallélépipède rectangle. Dans ces classes il vaudrait peut-être mieux faire de la géométrie expérimentale en construisant des solides, en les développant, en regardant les relations entre les différents éléments pour que les élèves apprennent à « voir dans l'espace ».

3.3. Cas des secteurs angulaires.

Problème de définition et de notation. Un secteur angulaire est l'intersection de deux demi-plans s'il est saillant, la réunion s'il est rentrant. De nombreux enseignants ont fait part des difficultés qu'ont soulevé ces définitions car c'est la première fois dans le cours de Sixième qu'intervient formellement la notion d'infini. D'autre part, cela soulève également un problème de notation; *si* Ox *et* Oy *sont les demi-droites frontières du secteur angulaire, on propose de le noter* [Ox, Oy] *s'il est saillant et Rent* [Ox, Oy] *s'il est rentrant. Ces deux secteurs sont appelés associés.*

Mesure de secteurs angulaires saillants.

On désigne par φ l'ensemble des secteurs angulaires saillants et par G le groupe des isométries du plan, groupe engendré par les symétries par rapport à une droite.

Définition : *On appelle mesure sur S une application non identiquement nulle* $m : \rightarrow \mathbb{R}^+$ *vérifiant.*

(3.31) *Pour tout* $S \in \varphi$ *et pour tout* $g \in G$, $m(g(S)) = m(S)$.

(3.32) *Réciproquement si S et S' vérifient* $m(S) = m(S')$ *alors il existe* $g \in G$ *tel que* $S' = g(S)$.

(3.33) *Si* $S = [Ox, Oy] \in \varphi$ *et si* $Oz \subset S$ *alors*

$$m([Ox, Oz]) + m([Oz, Oy]) = m(S).$$

Si l'énoncé est identique à celui de la définition d'une mesure des segments, le problème de l'existence et de l'unicité à un facteur multiplicatif près n'est

pas simple à résoudre. En fait c'est un problème équivalent à la mesure des angles et conduit à construire un homéomorphisme additif de S sur [0, 1].

Ce qu'on peut faire dans le premier cycle.

Il faut se contenter d'admettre que le rapporteur est un instrument mystérieux qui permet de « mesurer » un secteur saillant au sens défini ci-dessus, donc en particulier de constater que deux secteurs sont isométriques.

On peut aussi faire construire un rapporteur à l'aide des pliages. On obtient ainsi une graduation avec $2^n + 1$ éléments, ce qui permet de faire des encadrements de plus en plus fins et d'utiliser les nombres à virgule dans le système binaire, un représentant de l'unité de mesure pouvant être le secteur droit.

On peut aussi généraliser à la mesure des secteurs rentrants en passant au secteur associé.

Conclusion.

Il résulte de toute cette analyse que la *terminologie* COHÉRENTE suivante a été proposée, laquelle s'écarte peu de la terminologie traditionnelle.

Dans la ligne 1 on désigne des ensembles de points de l'espace, dans la ligne 2 les classes d'équivalence correspondantes par la relation $\mathcal{R}(A, B)$ si, et seulement si pour toute mesure μ on a $\mu(A) = \mu(B)$ (il suffit que l'égalité ait lieu pour *une* mesure adaptée à la situation).

Segment	Surface	Solide	Secteur angulaire
Longueur	Aire	Volume	Amplitude

On peut donc aussi bien mesurer un segment qu'une longueur. Le centimètre carré est une aire (ce n'est ni un nombre, ni une surface) et le degré une amplitude. La mesure d'un secteur angulaire est un nombre réel.

Par définition deux ensembles isométriques vérifient la relation d'équivalence $\mathcal{R}$, mais la réciproque n'est pas vraie s'il s'agit de surfaces ou de solides.

Remarque. — En fait, on ne mesure ici que des longueurs, des aires, des volumes, etc. On pourrait, sur un segment, mesurer bien autre chose (sa capacité, son potentiel, son aire, son âge, en sorte que le mot *mesure* se rapporte à celles explicitement définies ici, et construites essentiellement à partir de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. A proprement parler — c'est-à-dire hors du cadre où nous nous plaçons ici — l'expression mesure d'un segment n'a pas de sens précis. La longueur se définit explicitement comme classe d'équivalence par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, de sorte que « mesure d'une longueur » est une expression sans ambiguïté, et désigne une fonction déterminée à une constante multiplicative près. Sur un segment (ensemble de points), il existe d'autres mesures non proportionnelles à celle-ci. Chacune d'elles définit une « grandeur mesurable ». Ce n'est donc tout de même que par abus de langage que l'on parle de la mesure d'un segment sans dire quelle sorte de « grandeur » on mesure.

P. B.