Commission ministérielle
sur l'enseignement des mathématiques

Rapport des sous-commissions 3 et 4 de l'enseignement élémentaire

(Paris, le 30 juin 1969)

1. Recommandations en vue d'une action immédiate

L'enseignement mathématique à l'école élémentaire veut répondre désormais aux impératifs qui découlent d'une scolarité obligatoire prolongée et de l'évolution de la pensée mathématique elle-même.

Il s'agit alors de faire en sorte que cet enseignement contribue au meilleur développement de tous les enfants de six à onze ans, dans le but de donner à tous les mêmes chances de succès dans le premier cycle secondaire et non plus de les préparer directement à la vie active.

L'ambition essentielle de cet enseignement n'est plus en premier lieu de faire acquérir des techniques de résolution de problèmes catalogués suggérés par « la vie courante ». Les notions mathématiques liées à ces techniques ne sont pas évidentes, cependant il paraît possible à ce niveau d'en assurer une approche correcte et une compréhension réelle par les enfants. Il faut le plus tôt possible leur donner une véritable formation qui leur permette, d'une manière adaptée à leur âge, de dégager des concepts mathématiques et qui leur assure la maîtrise d'une pensée mathématique disponible et féconde. Les progrès dans la connaissance du développement psychologique de l'enfant montrent d'ailleurs tout le bénéfice qu'il peut retirer d'un tel enseignement pour l'ensemble de sa formation.

Ces connaissances mathématiques ainsi construites peu à peu se prolongeront sans heurt au delà de l'école élémentaire, mais à ce niveau déjà, les enfants pourront se rendre compte que l'univers mathématique n'est pas clos sur lui-même et mesurer le pouvoir que leur donne l'outil mathématique sur l'univers réel.

Depuis 1964, des expériences nombreuses ont été réalisées en particulier autour des Écoles Normales, dans le cadre des recherches organisées par l'Ins-

titut Pédagogique National, elles permettent dès maintenant d'élaborer un programme adapté à un enseignement rénové. Mais la mise en œuvre généralisée d'un tel enseignement suppose que tous les maîtres aient pu bénéficier d'une préparation appropriée et demande un certain délai. Aussi la sous-commission est amenée à proposer des mesures provisoires immédiatement applicables.

Elles consisteraient à alléger le programme actuel de l'enseignement élémentaire et à adopter une nouvelle rédaction de celui-ci. La sous-commission a proposé cette rédaction à la commission pleinière, qui l'a acceptée; elle n'introduit à dessein aucune terminologie nouvelle.

D'autre part, les instructions actuelles (de 1945) devenant par le fait même caduques, les maîtres pourraient s'inspirer avantageusement, surtout pour les questions dont le point de vue a été rénové, des « commentaires » présentés également par la sous-commission. Dans la rédaction du programme, les trois niveaux, CP, CE (en deux ans) CM (en deux ans) sont conservés.

Pour chacun de ces niveaux, les notions numériques qui constituent l'essentiel du programme sont présentées dans le paragraphe 1. Les paragraphes suivants proposent des thèmes d'activités plus divers : le paragraphe 2 concerne l'observation de l'espace et des objets « géométriques »; le paragraphe 3 envisage la pratique des mesures dans une perspective expérimentale La matière de ces activités sera donc largement empruntée aux « disciplines d'éveil ».

Les activités désignées jusqu'alors sous le vocable de « calcul » ne constituent qu'une partie de l'activité mathématique, il convient de désigner désormais la matière du programme sous le terme « mathématique ».

La sous-commission espère que la nouvelle rédaction du programme et l'allègement substantiel de celui-ci inviteront les maîtres à réfléchir sur le contenu mathématique de leur enseignement. Ils y seront aidés par les commentaires, ceux-ci ont été particulièrement détaillés à propos des questions dont la présentation peut être avantageusement renouvelée; pour faciliter leur étude, ils ont été rédigés non pas par niveau, mais par thème du programme.

2. Programme (1945 modifié 1969)

Cours préparatoire

Notion de nombre naturel. Nommer et écrire des nombres.
Comparer deux nombres. Somme de deux nombres.

Cours élémentaires 1re et 2e années

1) Les nombres naturels : nom et écriture.

Somme et différence de deux nombres; pratique de l'addition et de la soustraction.

Produit de deux nombres; pratique de la multiplication.

Quotient exact de deux nombres; division avec reste; pratique de la division par un nombre d'un chiffre.

Calcul mental.

2) Exercices d'observation et travaux sur des objets géométriques.

Tracés, découpages, pliages.

Cube, carré, rectangle, triangle.

Quadrillages.

3) Mesures : exercices pratiques.

Lecture de l'heure. Usage du calendrier.

Cours moyen 1re et 2e années

1) Éléments de mathématique.

Nombres naturels et décimaux : nom et écriture.

Multiplication et division par 10, 100, 1000 .....

Opérations et leurs propriétés; suite d'opérations; pratique des opérations; calcul mental.

Divisibilité des nombres naturels par 2, 5, 9.

Fractions considérées comme opérateurs. Produit de deux fractions.

Exemples de relations numériques. Proportionnalité.

2) Exercices d'observation et travaux sur des objets géométriques.

— bande, parallélogramme (et ses cas particuliers), triangle;
— disque, cercle;
— parallélépipède.

3) Mesures : exercices pratiques;

— longueur, aire, volume;
— temps, masse;
— expressions d'un résultat avec une unité convenablement choisie. Ordre de grandeur. Encadrements.

3. Commentaires

1. Nombres et opérations

L'ordre dans lequel les rubriques sont énumérées ci-dessous n'est pas nécessairement l'ordre chronologique de leur présentation dans les classes. Il appartiendra à chaque maître d'organiser sa progression selon les possibilités des élèves et ses préférences personnelles.

1. *Notion de nombre naturel*
2. *Nommer et écrire les nombres*
3. *Comparer deux nombres*
4. *Opérations — Propriétés — Pratique*
5. *Décimaux*
6. *Relations numériques : tableaux de nombres*
9. *Fractions.*

1.1. Notion de nombre naturel

Le programme du C.P. a été réduit à :

— l'élaboration du concept de nombre naturel;
— une initiation à la numération;
— l'apprentissage de l'addition des nombres naturels.

C'est en manipulant de multiples collections d'objets que les enfants élaborent peu à peu la notion de nombre naturel. Il est essentiel de bien comprendre que le nombre naturel n'est ni un objet, ni une propriété attachée à des objets, mais une propriété attachée à des collections.

A l'École Maternelle, pour dégager la notion de couleur, qui est une propriété d'objets, on pratique des exercices de classement portant sur des objets variés dont la forme, la matière, la taille... sont différentes, afin de répartir ces objets selon leur couleur.

De telles activités devront être reprises dans les premières semaines du Cours Préparatoire (les propriétés n'étant pas nécessairement des propriétés d'ordre sensoriel).

La notion de nombre naturel comme propriété d'une collection apparaîtra dans la mesure où l'on pourra établir une mise en correspondance terme à terme entre collections. Cette correspondance est indépendante de la nature et de la disposition des objets qui constituent les collections.

Exemples

1. Si on peut mettre en correspondance un à un les enfants de la classe et les porte-manteaux, on conclut qu'il y a *autant* d'enfants *que* de portemanteaux et *autant* de portemanteaux *que* d'enfants.

2. Deux enfants étalent sur leur table le contenu de leur trousse. Si l'on peut mettre en correspondance un à un les objets d'une trousse et ceux de l'autre (sans s'occuper de leur nature ni de leur disposition), on peut conclure qu'il y a *autant* d'objets dans l'une des trousses *que* dans l'autre.

C'est quand on aura multiplié ces exercices que les enfants comprendront que le nombre est une propriété qui s'attache à des collections, et ceci par une démarche analogue à celle qui leur avait permis de comprendre à l'École Maternelle que la couleur, par exemple, est une propriété qui s'attache à des objets.

L'emploi systématique de la correspondance terme à terme permettra de classer des collections et d'attribuer à chaque classe un nombre : ainsi, la classe de toutes les collections qui ont autant d'objets que l'on a de doigts dans une main définit le *nombre naturel « cinq »*. Cinq doigts, cinq enfants, cinq fruits, etc... ne sont pas des nombres : le nombre cinq est une propriété commune à l'ensemble des doigts d'une main, à un groupe d'enfants, au contenu d'une coupe de fruits.

Dans le premier exemple, si la correspondance un à un est impossible, il y a plus de portemanteaux que d'enfants ou plus d'enfants que de portemanteaux. On insistera sur le sens des expressions : *autant que*, *plus que*, *moins que*.

1.2. Nommer et écrire les nombres

Chaque nombre naturel peut être représenté par un signe. Nommer et écrire un nombre naturel avec un nombre limité de signes constitue ce que l'on désigne sous le terme « *numération* ».

L'activité de base est le groupement des objets d'une collection selon un certain mode. Une telle activité s'impose d'elle-même dès que les collections ont « beaucoup » d'objets.

Exemples de jeux de groupements préalables à la numération :

1er jeu : Dans une classe de vingt-sept enfants, on groupe les enfants quatre par quatre. Cela fait :

six groupes de quatre enfants,
trois enfants non groupés.

2e jeu : On répète l'opération de groupements avec les groupes de quatre enfants, cela fait :

— un « grand groupe » formé de quatre groupes de quatre enfants chacun,
— deux « groupes » de quatre enfants,
— trois enfants non groupés.

Ces résultats peuvent, si on le désire, être consignés dans un tableau :

grands groupes	groupes	enfants non groupés
1	2	3

On pourra faire des exercices analogues en groupant par trois, par cinq, par dix...

Si l'on choisit de grouper par dix, on retrouve la numération usuelle (décimale) : les « groupes » sont des dizaines, les « grands groupes » des centaines etc...

Ainsi, dans l'exemple précédent, le tableau devient :

groupes	enfants non groupés
2	7

C'est à la numération décimale seule que correspond la numération orale habituelle : dans cet exemple 27 est lu vingt sept.

Au cours de ces exercices d'écriture, on rencontre fréquemment le zéro (0) comme signe pour représenter la propriété d'une collection sans objet.

Il paraît raisonnable de ne pas dépasser cent au cours préparatoire et dix mille au cours élémentaire.

1.3. Comparer deux nombres

Emploi du signe « = »

Au cours de la scolarité, on verra qu'un nombre peut s'exprimer de différentes façons. Exemple : 6; 2×3; $4 + 2$; $8 - 2$; $24/4$; $24 : 4$ sont des expressions du même nombre.

Cela donne le droit d'écrire

$$6 = 6$$
$$6 = 2 \times 3$$
$$2 \times 3 = 4 + 2 \text{ etc...}$$

Emploi des signes $\neq$, $>$, $<$

On utilisera avec profit ces signes dès l'école élémentaire :

$$3 \neq 4$$
$$3 < 4$$
$$2 + 3 \neq 4 + 2$$
$$3 \times 2 > 5 - 1$$
$$18/3 < 7 \times 2 \text{ etc...}$$

1.4. Opérations : propriétés, pratique

L'étude des nombres naturels comprend celle des deux opérations élémentaires : l'addition, la multiplication, qui donnent à l'ensemble de ces nombres sa structure algébrique propre.

Parmi les opérations qui se rattachent aux précédentes, on étudie également la soustraction, la division exacte et la division euclidienne (avec reste pouvant être différent de zéro).

« Sens » de ces opérations

Il faut que les enfants comprennent que l'addition, la multiplication, etc... ne portent que sur des nombres.

Addition-Soustraction

Exemple 1 : On réunit dans une corbeille 8 pommes et 7 pommes... Le nombre de toutes les pommes est alors $(8 + 7)$.

$(8 + 7)$ est une première expression immédiate de la *somme* des nombres 8 et 7. Elle utilise un signe particulier, le signe « + » (plus). Les parenthèses soulignent qu'il s'agit de l'expression d'UN nombre; à ce point de vue il est utile d'en faire usage dès l'école élémentaire.

L'addition est l'opération qui associe aux nombres 8 et 7 leur somme $(8 + 7)$.

Habituellement on cherche à désigner ce nombre $(8 + 7)$ sans utiliser le signe +. Le groupement des objets selon la numération décimale conduit à écrire ce nombre 15 (quinze).

Alors $(8 + 7)$ et 15 sont deux expressions d'un même nombre, ce qui justifie l'égalité $(8 + 7) = 15$ que l'on écrit plus simplement :

$$8 + 7 = 15,$$

c'est par abus de langage qu'on a pu écrire des expressions telles que

$$8 \text{ pommes} + 7 \text{ pommes} = 15 \text{ pommes}$$

qui n'appartiennent en fait, ni au langage mathématique ni au langage usuel.

On n'écrit donc pas 8 pommes + 7 pommes = 15 pommes.

On écrit : le nombre de pommes est $(8 + 7)$:

$$8 + 7 = 15,$$

ce qui permet de conclure en langage courant « la corbeille contient 15 pommes ».

Au lieu d'écrire $(8 + 7)$ on peut choisir d'écrire $(7 + 8)$.

Aux couples (8; 7) et (7; 8) l'addition associe le même nombre (elle est commutative).

Remarquons que : $8 + 0 = 8$, $0 + 8 = 8$; $4 + 0 = 4$; $0 + 0 = 0$, etc...

Exemple 2 : Parmi 15 fruits, 8 fruits sont des pommes... Le nombre des fruits qui ne sont pas des pommes est alors celui qui complète l'égalité $8 + \square = 15$ ou $\square + 8 = 15$

On cherche parmi les nombres $(8 + 0)$, $(8 + 1)$,... celui qui est égal à 15. Le nombre cherché est $(8 + 7)$. Le nombre qui doit remplacer le carré est donc 7.

On peut aussi désigner directement le nombre par l'expression $(15 - 8)$ qui utilise le signe « — » (moins).

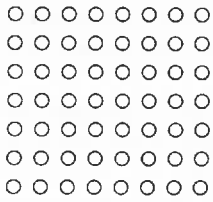
Ceci conduit à écrire : $15 - 8 = 7$.

La soustraction est l'opération qui associe aux nombres 15 et 8 leur *différence* $(15 - 8)$ (ou encore 7).

Au Cours Préparatoire, il suffit que les enfants sachent utiliser correctement l'addition. La soustraction sera introduite au Cours Élémentaire.

Multiplication

Exemple : On réunit 7 collections qui comprennent chacune 8 objets.



Le nombre de tous les objets est alors :

$(8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8)$ ou $(7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7)$

Par convention, ce nombre peut être écrit indifféremment :

(8×7) ou (7×8).

C'est le produit des nombres 8 et 7.

Dans les expressions précédentes, le signe « $\times$ » se lit « multiplié par ».

Les deux expressions (8×7) et (7×8) désignent le nombre de tous les objets. On constate que ce nombre est 56 donc : $(8 \times 7) = 56$ ou $(7 \times 8) = 56$ ce que l'on écrit plus simplement $8 \times 7 = 56$ ou $7 \times 8 = 56$.

La multiplication est l'opération qui associe à deux nombres leur produit.

Ainsi, aux couples (8; 7) et (7; 8) la multiplication fait correspondre le même nombre

$8 \times 7 = 7 \times 8$ (la multiplication est commutative).

Remarquons que

1^0 $7 \times 1 = 1 \times 7 = 7$; $\quad 3 \times 1 = 1 \times 3 = 3$; etc...

2^0 $7 \times 0 = 0 \times 7 = 0$; $\quad 1 \times 0 = 0 \times 1 = 0$; etc...

Tables

Aux tables tarditionnelles, on préferera des tables de Pythagore construites par les élèves avec des nombres divers (sans oublier les lignes et colonnes qui comprennent 0 et 1).

Exemples :

+	2	5	8	4
7	9	12	15	11
0	2	5	8	4
6	8	11	14	10
3	5	8	11	7

×	0	7	2	5	3
6	0	42	12	30	18
1	0	7	2	5	3
4	0	28	8	20	12
3	0	21	6	15	9

La construction de telles tables facilite l'apprentissage et la mémorisation de sommes et de produits indispensables au calcul. On construira notamment les tables d'addition et de multiplication dans lesquelles les nombres placés en ligne et colonne sont ordonnés de 0 à 9.

Division exacte

Exemple : On a dénombré 56 objets en réunissant 7 collections qui comprenaient chacune le même nombre d'objets.

Il est naturel de désigner ce nombre par un signe (., □ ou une lettre quelconque) et d'écrire une égalité entre les deux expressions du nombre de tous les objets.

$$56 = 7 \times \square \text{ ou } 56 = \square \times 7$$

□ représente un nombre que l'on peut désigner directement par l'expression

$$(56 : 7) \text{ ou } (56/7)$$

La division est l'opération qui associe aux nombres 56 et 7 leur quotient exact (56 : 7).

Ce nombre s'écrit 8 d'où l'égalité (56 : 7) = 8 que l'on écrit plus simplement 56 : 7 = 8.

Cet exemple montre que la division exacte peut intervenir à propos d'un partage d'objets (lorsque les parts ont le même nombre). Mais son véritable sens découle de sa liaison avec la multiplication; les égalités :

$$56 = 7 \times \square$$
$$\square = 56/7$$

disent la même chose.

Remarque : □ représente un nombre naturel parce que 56 est un multiple de 7.

D'une façon générale, le quotient exact de deux nombres naturels n'existe que si le premier est multiple du deuxième.

Il ne faut donc désigner un quotient à l'aide d'un des signes « : » ou « / » que lorsque l'on sait que ce quotient existe.

Division euclidienne (division avec reste, ce reste pouvant être nul). Exemple : On veut distribuer équitablement 17 cerises entre 3 enfants. Existe-t-il un nombre x de cerises tel que chaque enfant reçoive x cerises et qu'il n'en reste plus ?

Formons la suite des produits (3 × 1); (3 × 2); (3 × 3) etc... Aucun de ces nombres n'est égal à 17 donc il est impossible de servir équitablement les enfants en utilisant toutes les cerises.

On constate que :

$$(3 \times 5) < 17 < (3 \times 6)$$

et aussi que $17 = (3 \times 5) + 2$

Cette dernière égalité montre que le plus grand nombre de cerises que l'on peut donner à chaque enfant est 5; 2 cerises ne sont pas distribuées.

La division euclidienne de 17 par 3 fait correspondre au couple de nombres (17; 3) le couple (5; 2).

5 est le quotient entier de 17 par 3;

2 est le reste de la division euclidienne de 17 par 3.

Remarque : Il est incorrect d'écrire $17 : 3 = 5$ car $17 : 3$ devrait représenter un quotient exact, or $5 \times 3 \neq 17$.

Par convention, on peut désigner le quotient entier de 17 par 3 par l'expression $(17 \div 3)$ ce qui donne le droit d'écrire :

$$17 \div 3 = 5$$

Suites d'opérations :

Additions successives — Somme de trois nombres.

Exemple : A partir des nombres 8, 7, 5, on calcule :

$(8 + 7)$ c'est-à-dire 15,

puis $((8 + 7) + 5)$ c'est-à-dire $(15 + 5)$.

On constate que ce nombre peut être obtenu par un autre mode de calcul, sans modifier l'ordre des nombres donnés (8, 7, 5).

On peut, en effet, calculer $(7 + 5)$ c'est-à-dire 12, puis $(8 + (7 + 5))$ c'est-à-dire $(8 + 12)$.

La somme des trois nombres 8, 7, 5 s'écrit $(8 + 7 + 5)$. On peut la calculer de l'une ou l'autre des deux manières précédentes.

(Cet exemple illustre une propriété de l'addition : l'associativité).

Multiplication successives : Produit de trois nombres

Exemple : On calcule (5×6) puis $((5 \times 6) \times 4)$ c'est-à-dire (30×4) ou bien (6×4) puis $(5 \times (6 \times 4))$ c'est-à-dire (5×24).

Les deux expressions ainsi écrites désignent en fait le même nombre Ceci peut être constaté en revenant à des collections d'objets.

Le produit des trois nombres 5, 6, 4 s'écrit $(5 \times 6 \times 4)$. On peut le calculer de l'une ou l'autre des deux manières indiquées.

(Cet exemple illustre le fait que la multiplication est associative).

Addition et multiplication

Exemple : Calculer $(2 + 5)$ puis $((2 + 5) \times 3)$ c'est-à-dire (7×3)

Peut-on obtenir le même résultat d'une autre façon ?

On constate que ce nombre est le même que la somme

$((2 \times 3) + (5 \times 3))$ c'est-à-dire $(6 + 15)$.

(Cet exemple illustre une nouvelle propriété de ces opérations : la multiplication est distributive par rapport à l'addition).

Le fait de pouvoir désigner et calculer un nombre de plusieurs façons différentes, est donc une conséquence des propriétés essentielles de l'addition et de la multiplication que nous venons de signaler au passage : commutativité et associativité de l'addition et de la multiplication, distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Il n'est nullement question de vouloir *nommer* de telles propriétés au niveau élémentaire. Mais il est important de faire en sorte que les enfants les utilisent de façon naturelle et familière, parce qu'elles sont à l'origine de tous les modes de calcul : calcul mental et techniques usuelles.

Techniques opératoires

Il est indispensable que les techniques usuelles concernant les opérations soient parfaitement connues. Elles ne seront pas apprises par les enfants de façon purement mécanique, mais découvertes par eux-mêmes comme synthèse d'expériences suffisamment variées et nombreuses.

1.5. Nombres décimaux

Les nombres décimaux sont introduits au cours moyen; à ce niveau, les enfants savent écrire et nommer les nombres naturels à partir de groupements d'objets d'une collection (cf. § 1.2.).

Au lieu d'écrire le nombre de tous les objets, on peut chercher à écrire le nombre des groupements d'une certaine espèce.

Exemple 1 : le nombre d'habitants de la France est cinquante millions. Si l'on imagine une répartition des Français en groupements comprenant chacun un million d'habitants, le nombre de ces groupements s'écrit 50. Il exprime la population de la France, le million étant choisi comme unité.

Si les groupements choisis comprennent cent habitants, la population s'exprime par le nombre qui s'écrit : 500 000.

Si les groupements ne comprennent qu'un seul habitant, la population s'exprime par le nombre qui s'écrit : 50 000 000.

Exemple 2. La population de l'agglomération de Romorantin compte 10 850 habitants. Le *millier* étant choisi comme unité, la population s'exprime par le *nombre décimal* 10,850.

La virgule est utilisée pour repérer le rang du groupement choisi comme unité.

D'autres exemples pourront être trouvés à l'occasion d'exercices de mesure utilisant le système métrique.

On remarquera qu'à tout nombre naturel exprimant une mesure on peut associer, par un changement d'unité convenable un nombre décimal et qu'à tout nombre décimal on peut associer, par un changement d'unité, un nombre naturel (et ce de diverses façons).

Les opérations sur les décimaux reviennent donc aux opérations de même nom sur les nombres naturels associés.

Relations numériques : tableaux de nombres

Exemple : 1. On choisit une liste de nombres naturels

3, 9, 14, 25, 17

A chacun de ces nombres on additionne 4.
On construit ainsi une deuxième liste de nombres déduite de la première

7, 13, 18, 29, 21

On peut disposer ces deux listes en utilisant un tableau mettant en évidence la correspondance terme à terme

additionner 4	↓	3	9	14	25	17
		7	13	18	29	21
						↑ soustraire 4

La consigne « soustraire 4 » fait correspondre à tout nombre de la deuxième liste un nombre de la première liste.
Cas particulier : « Additionner 1 — Soustraire 1 »

additionner 1	↓	4	0	1	7	2	9
		5	1	2	8	3	10
							↑ soustraire 1

A chacun des nombres de la première liste, la consigne « additionner 1 » fait correspondre son *successeur* dans la suite des nombres naturels (0, 1, 2, 3, 4, . . .).

A chacun des nombres de la deuxième liste, la consigne « soustraire 1 » fait correspondre son *prédécesseur* dans la suite des nombres naturels.

Pour construire des tableaux de nombres, on peut utiliser d'autres consignes telles que « multiplier par . . . » « diviser par . . . » (division exacte quand elle est possible).

2. Connaissant la consigne qui fait passer de la première à la deuxième liste, on peut chercher un élément manquant dans l'une ou l'autre de ces listes, connaissant l'élément correspondant à l'autre :

multiplier par 5	↓	7	12	100	
		35	42	65	↑ diviser par 5

Remarque : on s'aperçoit qu'aucun nombre ne correspond à 42 (42 n'est pas multiple de 5).

3. Connaissant un couple d'éléments correspondants, trouver les consignes de l'un des quatres types précédents (additionner...; soustraire...; multiplier par...; diviser par...) qui font passer d'une liste à l'autre.

7	5 4
↓ 14	8

(deux consignes possibles : additionner 7; multiplier par 2).

4. Connaissant deux couples correspondants de deux listes, trouver *la* consigne de l'un des 4 types précédents qui fait passer d'une ligne à l'autre

7	5 4
↓ 14	10 8

(la seule consigne possible est multiplier par 2).

Lorsque la consigne est « multiplier par » ou « diviser par », les exercices sur les tableaux de nombres correspondent à l'étude de la proportionnalité. Dans l'ensemble des problèmes traités au cours moyen, on rencontre les thèmes suivants : recherche de

— prix à payer pour une certaine longueur de ruban, connaissant le prix pour une longueur déterminée de ce ruban;

— poids correspondant à un certain volume de matière homogène sachant le poids pour un volume connu de cette matière;

— prix d'un terrain connaissant le prix de l'hectare;

— distance parcourue en un temps donné connaissant le temps mis pour effectuer un trajet déterminé, dans le cas d'un mouvement uniforme;

— pourcentage;

— rendement;

— crédit;

— échelle;

etc...

Il est essentiel de savoir qu'il s'agit d'un seul et même problème, qu'il convient d'expliquer en termes nouveaux. D'une façon générale, tous les problèmes traités au moyen de la « règle de trois » relèvent du modèle mathématique précédent.

Exemples : 1) Pour une fête, des enfants font des colliers composés tous du même nombre de perles. Un enfant a utilisé 45 perles pour faire 3 colliers.

colliers	perles
3	45
6	.
.	135

Le tableau ci-contre permet de répondre aux deux questions :

— Combien faut-il de perles pour fabriquer 6 colliers ?

— Combien de colliers peut-on fabriquer avec 135 perles ?

Il suffit en effet

1° de chercher la consigne qui fait passer de la première à la deuxième colonne (c'est-à-dire « multiplier par 15 » (la situation étant une situation « multiplicative », la consigne ne peut être « additionner 42 »);

2° Calculer 6×15;

3° Calculer $135/15$;

2) On sait que 5 centimètres sur une carte représentent 10 kilomètres sur le terrain.

— A quelle distance sur le terrain correspond une distance de 18 centimètres sur la carte ?

— A quelle distance correspond sur la carte une distance de 32 kilomètres sur le terrain ?

Le tableau suivant permet de répondre aux questions :

distance sur la carte en centimètres	5	18	.
distance sur le terrain en kilomètres	10	.	32

La consigne qui fait masser de 5 à 10 est « multiplier par 2 » ce qui permet de trouver le correspondant de 18 dans la deuxième ligne soit (18×2) c'est-à-dire 36 et le correspondant dans la première ligne de 32, soit $(32/2)$ c'est-à-dire 16.

On peut donner maintenant les réponses en langage courant :
18 centimètres sur la carte correspondent à 36 kilomètres sur le terrain, 32 kilomètres sur le terrain sont représentés par 16 centimètres sur la carte.

3) On considère une série de rectangles de même largeur mesurée par le nombre 4 et de longueurs différentes.

Un quadrillage permet de déterminer les aires de ces rectangles en prenant comme unité d'aire le carré de côté 1 (cf. 3, mesure).

Nous pouvons construire le tableau de correspondance entre la longueur et l'aire de ces rectangles De façon générale si la longueur, l'unité étant choisie comme il est dit plus haut, est x, l'aire (l'unité étant déterminée comme plus haut) est $4\ x$.

longueur	aire
2	8
3	.
5	.
.	24
.	36
.....	
x	$4\ x$

Nous pouvons constater sur les tableaux précédents les propriétés suivantes :

1° Exemple 1 — multiplier par 15 →

3	45
6	90
9	135

Exemple 2 — multiplier par 4 →

2	8
3	12
5	20

Remarquons que :
dans le 1er tableau $3 + 6 = 9$; $45 + 90 = 135$
dans le 2e tableau $2 + 3 = 5$; $8 + 12 = 20$.

De façon générale, à la somme de deux nombres de la première colonne correspond la somme des nombres associés de la deuxième colonne.

Ceci peut être représenté par le tableau :

multiplier par a →

x	$(x \times a)$
y	$(y \times a)$
$x + y$	$(x \times a) + (y \times a)$

2° Exemple 1 — multiplier par 15 →

3	45
9	135

9 et 135 peuvent être obtenus en multipliant respectivement 3 et 45 par 3

Exemple 2 — multiplier par 4 →

3	12
6	24

6 et 24 peuvent être obtenus en multipliant respectivement 3 et 12 par 2

Ceci peut être représenté de façon générale par le tableau suivant :

multiplié par x →

multiplier par y ↓

m	$(m \times x)$
$(m \times y)$	$(m \times x) \times y$

au produit par y d'un nombre quelconque m de la première colonne correspond le produit par y du nombre de la deuxième colonne associé à m.

Suites d'additions et de soustractions

Exemple 1

4	9	11
7	12	14
9	14	16
	⟶ add. 5	⟶ add. 2

On peut passer directement de la première à la troisième colonne en additionnant 7 à chacun des nombres de la première colonne.

$$(7 = 5 + 2)$$

Exemple 2

8	6	3
5	3	0
4	2	
2		
	⟶ soustr. 2	⟶ soustr. 3

On peut passer directement de la première à la troisième colonne en soustrayant 5 à chacun des nombres de la première colonne (ce qui est possible si ces nombres sont égaux ou supérieurs à 5).

$$(5 = 2 + 3)$$

Exemple 3

5	8	4
8	11	7
2	5	1
	⟶ add. 3	⟶ soustr. 4

On peut passer directement de la première à la troisième colonne en soustrayant 1.

$$(1 = 4 - 3)$$

Exemple 4

5	9	6
8	12	9
2	6	3
	⟶ add. 4	⟶ soustr. 3

On peut passer directement de la première colonne en additionnant 1 à chacun des nombres de la première colonne.

$$(1 = 4 - 3)$$

Suites de multiplications et de divisions exactes

Exemple 1

3	6	18
5	10	30
4	8	24
	⟶ mult. par 2	⟶ mult. par 3

On peut passer directement de la première à la troisième colonne en multipliant par 6.

Remarquons que les résultats de la troisième colonne auraient été les mêmes si on avait d'abord multiplié par 3 puis si on avait multiplié le résultat par 2.

Exemple 2

36	12	3
24	8	2
48	16	4
	⟶ div. par 3	⟶ div. par 4

On peut passer directement de la première à la troisième colonne en divisant par 12.

Remarquons que les résultats de la troisième colonne auraient été les mêmes si on avait d'abord divisé par 4 puis si on avait divisé le résultat par 3.

Exemple 3

1	10	5
7	70	35
0	0	0
4	40	20
	⟶ mult. par 10	⟶ div. par 2

On peut passer directement de la première à la troisième colonne en multipliant par 5 (10 est multiple de 2).

Exemple 4

4	12	1
12	36	3
24	72	6
16	48	4
	⟶ mult. par 3	⟶ div. par 12

On peut passer directement de la première à la troisième colonne en divisant par 4 (12 est multiple de 3).

Exemple 5

35	210	21
5	30	3
15	90	9
20	120	12
⟶		⟶
mult. par 6		div. par 10

Il n'est pas possible de passer directement de la première à la dernière colonne en multipliant ou divisant par un nombre naturel :
6 n'est pas multiplie de 10;
10 n'est pas multiple de 6.

Fractions comme opérateurs

Par définition du symbole (6/10), dans l'exemple 5, on peut passer de la piemière à la troisième colonne en *multipliant* chaque nombre par (6/10) On dit que (6/10) est une fraction.

D'une façon générale, x et y désignant des nombres naturels, $y \neq 0$, *multiplier par* (x/y) revient à multiplier par x puis diviser le résultat par y. Remarquons que [multiplier par (2/10)] est équivalent à [multiplier par 0,2]

Exemple 6.1

12	84	21
24	168	42
4	28	7
16	112	28
⟶	⟶	
mult. par 7	div. par 4	

Exemple 6.2

12	3	21
24	6	42
4	1	7
16	4	28
⟶	⟶	
div. par 4	mult. par 7	

On constate qu'à partir de la même première colonne, on obtient la même troisième colonne
— en multipliant par 7 puis en divisant le résultat par 4 ou
— en divisant par 4 puis en pultipliant le résultat par 7.

Dans les deux cas, on a multiplié par (7/4).

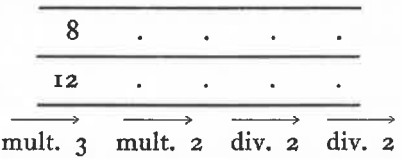
Remarquons que les calculs sont plus faciles dans l'exemple 6.2.

Opérateurs équivalents

Exemple 7

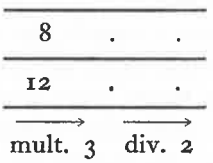
8	.	.
12	.	.
⟶		⟶
mult. 6		div. 4

Ce tableau peut être décomposé de la façon suivante



multiplier par 2 puis diviser par 2 est équivalent à mult (2/2), c'est-à-dire (mult. 1).

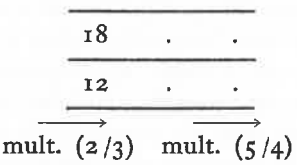
Le tableau se réduit à



On observe que mult. (6/4) est équivalent à mult. (3/2).

Produit d'opérateurs

Exemple 8



Par définition :
mult (2/3) est équivalent à la suite mult. 2, div. 3;
mult (5/4) est équivalent à la suite mult. 5, div. 4;
donc la suite mult. (2/3), mult. (5/4) est équivalent à la suite mult. 2, div. 3, mult. 5, div. 4. On sait aussi que la suite div. 3, mult. 5 est équivalente à la suite mult. 5, div. 3. La suite mult. (2/3), mult. (5/4) est donc équivalente à la suite mult. 2, mult. 5, div. 3, div. 4; ce qui donne, en composant la suite, mult. 10, div. 12 ou mult. (10/12).

Donc la suite mult. (2/3), mult. (5/4) est équivalent à mult. (10/12).

On peut constater que mult. (10/12) est équivalent à mult. (5/6);
donc la suite mult. (2/3), mult. (5/4) est équivalent à mult. (5/6) :

Exemple 9

La suite mult. (2/3), mult. (3/2) est équivalent à la suite mult. 2, div. 3, mult. 3, div. 2; div. 3, mult. 3 est une suite équivalente à mult. 1.

La suite précédente se réduit donc à la suite mult. 2, div. 2, elle-même équivalent à mult. 1;
donc la suite mult. (2/3), mult. (3/2) est équivalente à mult. 1.

Dans le langage courant, on trouve des expressions telles que un quart d'heure, un demi-litre, avoir parcouru les trois quarts du chemin... L'emploi

de ces expressions qui utilisent le vocabulaire des fractions donne lieu à des calculs numériques où l'on retrouve les fractions comme opérateurs sur les nombres entiers naturels.

2. Exercices d'observation et travaux sur des objets géométriques

Ces exercices trouvent naturellement leur place dans les *activités d'éveil.* L'espace physique et les objets qui le peuplent fournissent une matière sur laquelle la pensée mathématique a bien des occasions de s'exercer. Ces exercices doivent, en même temps aider l'enfant à s'adapter à ce milieu. Ils font appel, non seulement à *l'observation* mais aussi à l'activité manuelle qui soutient, complète l'observation et l'étude des situations et des choses. L'enfant doit acquérir le goût de travaux manuels : tracer, dessiner, plier, découper pour *construire :* l'emploi des instruments (règle, équerre, compas...) pour la réalisation de ces constructions développera l'habileté et le soin.

On se devra de proposer aux enfants des thèmes et des buts d'activité à leur mesure et conformes à leur intérêt.

Il y aura souvent avantage à réaliser ces exercices en équipes.

Les démarches mathématiques porteront, comme dans le domaine numérique sur la découverte de propriétés, les classements selon telle ou telle propriété, l'étude de relations sur un objet ou entre des objets. On reconnaît :
— que deux lignes droites sont perpendiculaires ou forment un angle droit par un pliage convenable ou à l'aide de l'équerre;
— que deux lignes droites sont parallèles à l'aide de la règle et de l'équerre;
— qu'un polygone découpé dans du carton épais et rigide est convexe par exemple en l'entourant d'un élastique et constatant que cet élastique est en contact avec tous les sommets.

Pour un polygone, on peut s'intéresser aux propriétés suivantes : convexité, nombre de côtés, nombre de sommets, longueur de côtés, existence de côtés perpendiculaires, existence de côtés parallèles, etc...

Les enfants ayant construit différents polygones, ils pourront les classer selon l'une ou l'autre de ces propriétés : ainsi, s'il s'agit de quadrilatères ils distingueront par exemple, les parallélogrammes et parmi ceux-ci les rectangles, les losanges. Ils découvriront ainsi que les carrés sont les quadrilatères qui ont la propriété d'être à la fois des rectangles et des losanges.

Pour un polyèdre (tétraèdre, cube, parallélépipède, prisme, dodécaèdre etc...) on pourra s'intéresser à la nature des faces, à leur nombre ainsi qu'à celui des sommets et des arêtes etc... Dans ce but, les élèves à l'occasion du travail manuel construiront de tels objets géométriques, en carton par exemple.

3. Mesures : exercices pratiques

A l'école primaire, l'idée de mesure sera toujours intimement liée à la pratique, à l'activité manuelle, à l'expérience, à l'étude du milieu.

Le rôle du maître consistera à offrir aux enfants un vaste champ d'expé-

riences les amenant à ressentir le besoin de mesurer : longueurs à comparer, charges à évaluer, temps à estimer.

Pour exprimer une mesure, il faut choisir une unité : *la mesure est alors un nombre.*

Jusqu'au cours élémentaire, on ne connaît que les nombres naturels; à partir du cours moyen, on peut utiliser les nombres décimaux. Une unité de mesure étant choisie, on pourra trouver un encadrement d'une mesure.

Les unités seront d'abord celles que proposeront les enfants. La nécessité de la communication des résultats des mesures amènera à choisir, pour tous les élèves de la classe, pour tous les groupes d'enfants travaillant en équipe, la même unité. On arrivera ainsi peu à peu à l'utilisation des unités légales.

Une mesure étant un nombre, les opérations sur les nombres seront naturellement utilisées dans les exercices sur les mesures.

Exemples :

1) On met bout à bout deux règles dont les longueurs, l'unité étant le centimètres, sont 12 et 5, pour former une barre.

On n'écrira pas : longueur de la barre

$$12 \text{ cm} + 5 \text{ cm} = 17 \text{ cm};$$

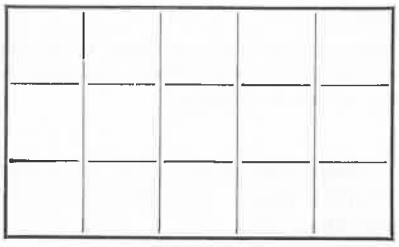
mais : le centimètre étant l'unité, la longueur de la barre est $(12 + 5)$

$$12 + 5 = 17;$$

le centimètre étant l'unité, la longueur de la barre est 17;
ou, en langage courant, la longueur de la barre est 17 centimètres.

2) Aire (mesure de la surface) d'un rectangle.

On construit un rectangle dont les côtés ont pour longueur 5 et 3 (l'unité étant le centimètre).



Le rectangle se décompose naturellement en (5×3) carrés qui ont tous 1 centimètre de côté. Si on choisit un de ces carrés (que l'on appelle centimètre carré) comme unité d'aire, l'aire du rectangle est (5×3)

$$5 \times 3 = 15$$

Le centimètre carré étant l'unité, l'aire du rectangle est 15 ou, en langage courant, l'aire du rectangle est 15 centimètres carrés.