Document 14 de la série 1.

Monoïdes

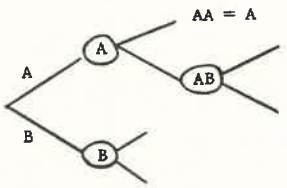
André Myx

1. Un jeu de mots.

Avec les deux lettres A et B, nous allons former des mots. Par exemple, AB, BA, AABA..., sont des mots. De même, A, B sont des mots.

Donnons-nous une règle : Deux lettres X qui se suivent peuvent être remplacées par X. Ce que nous écrivons $XX = X$ ou encore $X^2 = X$.

Pour former tous les mots, on pourra utiliser un arbre; il est ébauché ci-contre :



Les mots d'une lettre seront dits de longueur 1; les mots de n lettres, de longueur n. Ainsi les mots de longueur 1 sont : A et B; ceux de longueur 2 sont : AB et BA. Quels sont les mots de longueur 3? de longueur 4?...

Combien a-t-on de mots d'une longueur donnée?

On appellera M l'ensemble de tous ces mots. Sur M, on définit une loi de composition *interne* (appelée aussi juxtaposition); on juxtapose deux mots pour en former un troisième. Exemple : (ABAB) (BAB) = ABABBAB. Simplifiez cette écriture. On pourra commencer la table de Pythagore pour cette loi :

	2e mot →	A	B	AB	BA	ABA	...
1er mot ↓	1						
	A						
	B						
	AB						
	BA						
	ABA						
	...						
	...						

Un ensemble muni d'une *loi de composition interne associative* prend le nom de monoïde. M est donc un monoïde.

Cette loi (juxtaposition) n'est pas commutative. Calculez (AB) (BA) et (BA) (AB).

On peut maintenant définir sur M une relation d'équivalence : deux mots sont équivalents s'ils commencent par la même lettre et se terminent par la même lettre; ainsi ABABAB et AB sont équivalents. Il y a quatre classes de mots :

$$\overline{ab}, \quad \overline{ba}, \quad \overline{aa} \quad \text{et} \quad \overline{ab}$$

$\overline{ab}$ est la classe des mots commençant par A, se terminant par B.

Donc $m = \{\overline{ab}, \overline{ba}, \overline{aa}, \overline{bb}\}$ est l'ensemble quotient de M par cette relation d'équivalence.

Peut-on structurer l'ensemble quotient m?

Exemple : un mot de la classe $\overline{ab}$ suivi d'*un* mot de la classe $\overline{bb}$ donne un mot de la classe $\overline{ab}$.

Examinez tous les cas possibles en complétant la table ci-dessous :

1 \ 2	$\overline{aa}$	$\overline{ab}$	$\overline{ba}$	$\overline{bb}$
$\overline{aa}$				
$\overline{ab}$				
$\overline{ba}$				
$\overline{bb}$				

Obtient-on un nouveau monoïde?

A-t-on, pour ce nouveau monoïde, $\bar{x}\bar{x} = \bar{x}$ pour tout $\bar{x}$ de m?

Sous-monoïde : Considérons le singleton $\{\overline{ab}\}$.

$\overline{ab}\ \overline{ab} = \overline{ab}$.

$\{\overline{ab}\}$ a une structure de monoïde; on dit que c'est un sous-monoïde de m.

$\{\overline{ab}, \overline{bb}\}$, $\{\overline{ab}, \overline{aa}\}$, $\{\overline{ba}, \overline{aa}\}$ et $\{\overline{ba}, \overline{bb}\}$ sont-ils des sous-monoïdes de m?

Même question pour $\{\overline{ab}, \overline{ba}\}$?

Quels sont tous les sous-monoïdes de m?

2. Thème de réflexion : un autre monoïde.

Avec les lettres O, A et B écrivons des mots en convenant que :

$$OA = AO = A; \quad OB = BO = B \quad ;$$
$$AA = A \quad ; \quad BB = O \quad \text{et} \quad OO = O$$

Soit M' l'ensemble de tous les mots que l'on peut écrire avec cet alphabet en appliquant les règles imposées.

Commencez l'arbre.

Quels sont les mots de longueur donnée?

Peut-on définir un monoïde associatif quotient m'? Pour quelle relation?

3. Monoïde muni d'un élément neutre.

Le monoïde M′ (cf. 2) a pour la loi de composition interne un élément neutre, le mot O.

Très souvent, on s'intéressera à de tels monoïdes (loi interne, associative et munie d'un élément neutre).

Application : Précisez si les ensembles suivants, munis de la loi de composition interne indiquée, sont ou non des monoïdes. Précisez aussi s'ils ont un élément neutre.

a) $(\mathfrak{P}(E), \cap)$ avec $(X, Y) \mapsto X \cap Y$.

b) $(\mathfrak{P}(E), \cup)$ avec $(X, Y) \mapsto X \cup Y$.

c) $(\mathfrak{P}(E), \Delta)$ avec $(X, Y) \mapsto X \Delta Y$.

d) $(\mathbb{N}, +)$.

e) $(\mathbb{N}, \times)$.

f) Dans $\mathbb{N}$, la loi $(x, y) \mapsto x^y$.

g) Dans $\mathbb{R}$, les deux lois $(x, y) \mapsto \mathrm{Sup}\,(x, y)$ et $(x, y) \mapsto \mathrm{Inf}\,(x, y)$.

4. Équation dans un monoïde.

On construit un nouveau monoïde P dont les éléments seront encore des mots et la loi de composition interne, la juxtaposition de mots.

Les axiomes pour écrire ces mots sont les suivants :

1° L'alphabet utilisé contient deux lettres X et Y.

2° $XX = X$ et $YY = Y$.

Avec ces deux règles, on construit un monoïde connu : M. Ajoutons une troisième règle.

3° Deux mots identiques juxtaposés sont remplacés par le mot lui-même, soit $mm = m$.

L'axiome 2 est-il indispensable?

a) Formez tous les mots possibles (à l'aide d'un arbre). Nous obtenons alors un ensemble fini de mots. Donnez-le en extension.

b) Construisez la table de Pythagore pour la loi de composition interne (juxtaposition). Cette loi est associative; possède-t-elle un mot neutre? Est-elle commutative?

c) Quels sont les sous-monoïdes de P?

d) Équations dans P.

Trouvez, s'ils existent, tous les éléments m de P satisfaisant à :

1. $mX = Y$.
2. $mX = X$.
3. $XYm = XY$.
4. $XmY = YX$.
5. $\begin{cases} Xm = XY \\ Ym = YXY. \end{cases}$

5. Du monoïde vers une structure plus riche...

Examinons à nouveau le monoïde $(\mathcal{P}(E), \Delta)$.

Établir la table de Pythagore pour $E = \{a, b\}$.

La différence symétrique est une loi associative; vous avez montré qu'elle possédait un élément neutre $\varnothing$. Est-elle commutative? Tout élément de $\mathcal{P}(E)$ est-il symétrisable pour cette loi?

6. Thème de recherche.

Soit un ensemble E et l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ de ses parties. Dans $\mathcal{P}(E)$, on définit la loi suivante :

$$X \top Y = X \cup Y \quad \text{si} \quad X \cap Y = \varnothing$$
$$X \top Y = E \quad \text{si} \quad X \cap Y \neq \varnothing$$

Montrez que $(\mathcal{P}(E), \top)$ est un monoïde. La loi $\top$ est-elle commutative? Existe-t-il un élément neutre pour cette loi?

On pourra supposer dans un premier temps que l'ensemble E est fini; par exemple : $E = \{a, b\}$ et former la table de Pythagore de la loi $\top$.