Ce qu'il faut de terre à l'homme

On connaît ce beau récit de Tolstoï : pour 1 000 roubles un paysan deviendra propriétaire de la terre dont il peut faire le tour, à pied, du lever au coucher du Soleil; Pakkom aime la terre; il dépose les mille roubles à la garde d'un serviteur et part; il marche, il marche, il s'oriente comme il peut; enfin, alors que le Soleil va disparaître à l'horizon, il rejoint son point de départ; hélas, il tombe épuisé et meurt, le serviteur l'ensevelit : « Ce qu'il faut de terre à l'homme... »

Ce conte moral est le départ d'une recherche. Quel sera l'itinéraire du paysan? Il marche en terrain découvert. Une ligne courbe de même longueur qu'un contour polygonal enfermerait peut-être une surface d'aire plus grande (les avis des élèves diffèreront sur ce point; certains, cependant, diront que le cercle...). Comment comparer les aires de toutes ces surfaces? Il faut se résoudre à ne traiter qu'un problème plus simple : le paysan sait s'orienter d'après la position du Soleil dans le ciel; admettons qu'il parte vers l'Est, en ligne droite; un quart de tour à gauche, il ira droit vers le Nord; un autre quart de tour à gauche, droit vers l'Ouest; un quart de tour à gauche, droit vers le Sud. Bien sûr, « la Terre est ronde »; mais à l'échelle de cette marche d'un jour entier, nous admettrons qu'elle est plate. Alors, carré ou rectangle?

Remarque : Avant de répondre à cette question, il faut observer que des élèves auront proposé le quart de tour à droite. D'autres (ceux, peut-être, qui auraient pensé au cercle) préfèreraient un contour hexagonal. Bien sûr, il y a des champs hexagonaux; disons cependant que le remembrement des terres évite ces complications.

Le choix du carré ou d'un rectangle va être facile : il suffit de se fixer un périmètre. Aux élèves de le choisir : cela fournira un ensemble de valeurs numériques dont la confrontation sera instructive. Chaque élève ou chaque équipe construit une relation R entre longueur et aire du champ; certains font des graphiques, d'autres construisent un modèle.

La variété des exemples choisis confirme la constatation commune : à périmètre constant, c'est le carré qui a l'aire la plus grande de tous les rectangles possibles. Accessoirement, une nouvelle relation S est trouvée : aire maximale, longueur du côté du carré. Cette relation S a même la vertu d'être bijective (remarque d'un élève : la relation R également parce que longueur ou largeur du champ, « c'est la même chose »).

Il ne reste plus qu'à évaluer quelle distance le paysan pouvait raisonnablement parcourir du lever au coucher du Soleil. Il faudrait connaître la date. Est-ce que cela suffira? Au pôle Nord, en été, le Soleil ne se couche pas. Mais il n'y a pas de terre cultivable au pôle. A propos, qui était Tolstoï?

W. M.