Commutativité et associativité en Sixième

Les élèves qui arrivent en Sixième connaissent les quatre opérations et construisent volontiers les tables de Pythagore associées. J'ai demandé à mes élèves de former ces tables en spécifiant que, dans le calcul de $a - b$, a désigne la tête de colonne et b le début de ligne (fig. 1).

Les tables $+$ d'addition et $\times$ de multiplication s'établissent sans difficulté, mais lorsqu'il s'agit d'étudier la soustraction, nous convenons, comme certaines soustractions ne sont pas possibles, de marquer les cases sans résultat d'un point

Table —

b \ a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	.	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	.	.	0	1	2	3	4	5	6	7
3	.	.	.	0	1	2	3	4	5	6
4	.	.	.	.	0	1	2	3	4	5
5	.	.	.	.	.	0	1	2	3	4
6	.	.	.	.	.	.	0	1	2	3
7	.	.	.	.	.	.	.	0	1	2
8	.	.	.	.	.	.	.	.	0	1
9	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0

FIG. 1.

Table ÷

b \ a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5
3	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3
4	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3
5	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2
6	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2
7	0	1	1	1	1	1	1	1	2	2
8	0	1	1	1	1	1	1	1	1	2
9	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1

FIG. 2.

rouge : la table — de soustraction offre un beau triangle de tels points (fig. 1), alors que les trous de la table : de division (de « division exacte ») sont rangés de façon plus déconcertante. Devant ce manque d'harmonie, on est vite tenté d'utiliser le quotient approché. Par excès, cela donne la table $\div$ (fig. 2).

La table $\div$ ne fournit un quotient que si $a < 10$ et $b < 10$: comment obtenir le quotient $728 \div 7$? On voit rapidement que la table $\div$ ne suffit pas, qu'on devra d'abord utiliser la table $\div$ de la division par défaut, puis lire seul le dernier chiffre du quotient en consultant la table $\div$. Pour une telle division, seront également mises en jeu les tables usuelles $+$ et $\times$.

On ne manque pas de rencontrer des problèmes concrets qui font appel à la table $\div$: le fabricant de pianos qui désire livrer 17 pianos et peut en enfourner 3 dans sa camionnette devra envisager $17 \div 3$ voyages; le restaurateur qui doit nourrir 59 convives et prévoir un poulet pour quatre, téléphonera à son fournisseur : « Apportez-moi $59 \div 4$ poulets », etc.

Il est fréquent de communiquer à un ordinateur un tableau de nombres : comment réagirait un ordinateur si la dactylographe lui décalait d'un rang vers la gauche les entrées « têtes de colonne » d'une table d'addition? Il obéirait et ferait les calculs suivant la table $+$ « décalage » où, pour retrouver la distribution conventionnelle, on a remis après l'erreur la colonne 0 en tête. On constate que $3 + 0$ est différent de $0 + 3$.

On aura toutefois la surprise d'observer que la somme $+$ de deux nombres supérieurs à 9 est commutative, si l'on convient toutefois que cette somme s'obtient en posant l'addition comme à l'accoutumée et en appliquant les procédés classiques : la commutativité n'est rompue que pour deux nombres dont l'un est inférieur à 10.

b \ a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	11	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	12	3	4	5	6	7	8	9	10	11
4	13	4	5	6	7	8	9	10	11	12
5	14	5	6	7	8	9	10	11	12	13
6	15	6	7	8	9	10	11	12	13	14
7	16	7	8	9	10	11	12	13	14	15
8	17	8	9	10	11	12	13	14	15	16
9	18	9	0	11	12	13	14	15	16	17

FIG. 3. Table $+$

b \ a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	0	3	2	5	4	7	6	9	8
1	2	1	4	3	6	5	8	7	10	9
2	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10
3	4	3	6	5	8	7	10	9	12	11
4	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12
5	6	5	8	7	10	9	12	11	14	13
6	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14
7	8	7	10	9	12	11	14	13	16	15
8	9	8	11	10	13	12	15	14	17	16
9	10	9	12	11	14	13	16	15	18	17

FIG. 4. Table $\oplus$

J'ai proposé ensuite l'étude que voici. Dans la table d'addition usuelle on permute les résultats de chaque colonne de rang pair (y compris 0) avec ceux de la colonne de rang impair qui la suit immédiatement, sans changer les nombres qui figurent en tête de colonne. Établir cette nouvelle table d'addition $\oplus$. Calculer $72 \oplus 745$. L'opération $\oplus$ est-elle commutative?

Bien dressées, nos ouailles m'ont énoncé que la non-commutativité résultait de la dissymétrie du tableau (fig. 4). L'un d'eux s'est cependant distingué en nous montrant que la nouvelle somme d'un nombre pair et d'un nombre impair était supérieure d'une unité à la somme usuelle, qui dépassait elle-même d'une unité la somme $\oplus$ des nombres initiaux permutés. Et nous avons pu écrire :

$$p \oplus i > p + i > i \oplus p \Rightarrow p \oplus i > i \oplus p$$

Quand on cherche à calculer la somme $\oplus$ de trois nombres, on est tenté de l'obtenir comme un calculateur pressé qui ferait la somme des trois chiffres des unités, des trois chiffres des dizaines, etc. On s'apercevra alors que la nouvelle opération fournit le même résultat dans l'addition $\oplus$ « pressée » que dans celle qui calcule $(a \oplus b) \oplus c$, à condition toutefois que, dans les retenues écrites par convention en haut de colonne, on conserve la condition $1 \oplus 1 = 1$. Si on modifie l'ordre des trois nombres de toutes les façons possibles, on obtient par exemple :

423	238	745	423	745	238
$\oplus$ 745	$\oplus$ 745	$\oplus$ 238	$\oplus$ 238	$\oplus$ 423	$\oplus$ 423
$\oplus$ 238	$\oplus$ 423	$\oplus$ 423	$\oplus$ 745	$\oplus$ 238	$\oplus$ 745
1 594	1 598	1 316	1 316	1 394	1 398

On imaginera sans peine un dispositif mécanique fournissant la table $\oplus$, en songeant à certaines affiches de compagnies d'aviation, où l'on voit un panorama enchanteur faire place à un autre, l'affiche étant composée d'étroites lattes verticales qui tournent soudain d'un même mouvement autour de leur grand axe.

Les élèves ont bien voulu croire que ces résultats sont différents à cause de la non-commutativité de l'opération $\oplus$. Mais peut-être pas ceux qui correspondraient aux programmes :

$$(745 \oplus 238) \oplus 423 \qquad \text{et} \qquad 745 \oplus (238 \oplus 423)$$

car le premier se totalise en 1 316 et le second en 1 396. Il nous faut donc définir l'associativité, et nous vérifierons que, même avec des nombres ne comportant qu'un chiffre, l'opération n'est pas associative puisque

$$(2 \oplus 3) \oplus 1 = 8 \qquad \text{tandis que} \qquad 2 \oplus (3 \oplus 1) = 6.$$

Enhardie par ces aventures, nous en cherchons de nouvelles. Envisageons l'opération, proche de l'addition, dans laquelle deux chiffres particuliers fourniraient des résultats non usuels. Cela donne la table d'addition $\dotplus$ (fig. 5), dont on croirait volontiers qu'elle va fournir une opération commutative, puisque le tableau admet la diagonale principale comme axe de symétrie. En fait, l'opération, commutative si les termes n'ont qu'un chiffre, cesse de l'être pour d'autres termes (si l'on conserve, par définition, les mécanismes de l'addition usuelle), car le jeu des « chiffres parti-

b \ a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	40	6	0	8	9
1	1	2	3	4	5	40	7	0	9	10
2	2	3	4	5	6	40	8	0	10	11
3	3	4	5	6	7	40	9	0	11	12
4	4	5	6	7	8	40	10	0	12	13
5	40	40	40	40	40	40	40	20	40	40
6	6	7	8	9	10	40	12	0	14	15
7	0	0	0	0	0	20	0	0	0	0
8	8	9	10	11	12	40	14	0	16	17
9	9	10	11	12	13	40	15	0	17	18

FIG. 5. Table $\dotplus$

325	157
$\dotplus$ 157	$\dotplus$ 325
000	4 020

FIG. 6.

culiers » et des retenues donne à profusion des exemples analogues à celui de la figure 6. Elle n'est pas davantage associative, car le calcul fournit $(3 \dotplus 2) \dotplus 7 = 40$ différant de $3 \dotplus (2 \dotplus 7) = 3$.

Pourquoi les élèves ne seraient-ils pas pris à ces jeux? Les « tables » redoutables et serinées sont ici utilisées constamment, mais pour laisser découvrir des réalités nouvelles, sur lesquelles l'esprit a un pouvoir magique (1). Ces débutants prennent leur revanche sur les nombres dont ils furent les esclaves, acquérant une liberté telle qu'ils m'ont proposé, lorsque j'ai montré que la somme (usuelle) des segments est commutative et associative, qu'on essaie d'autres définitions de la somme (2).

Je demande parfois à des élèves de sections classiques, dans le second cycle, pourquoi ils se sont fermés aux mathématiques. Souvent la réponse est, teintée d'envie : « Les modernes, ce sont des amis des nombres, moi pas... » Il est peut-être bon de choisir ses amis de bonne heure.

B. Le Clerc de La Herverie
(Lycée de Champigny).

(1) Il est réconfortant de trouver des situations concrètes correspondant à ces opérations. C'est ainsi que nous appellerons volontiers opération LN l'opération $\dotplus$, pour rappeler les modes de la Loterie nationale, où certains chiffres réduisent à zéro les mises des usagers, d'autres les conservant, d'autres enfin les exagérant.

(2) La somme $+$ de deux segments AB et CD sera, par exemple, le segment MN, dont les extrémités sont les milieux des segments initiaux.