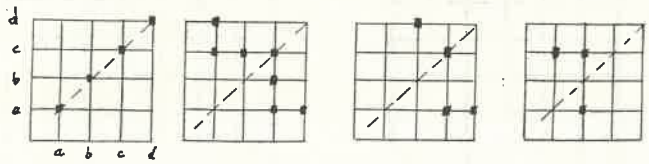
Propriétés des graphes de relations remarquables dans un ensemble

Il est possible de donner une signification géométrique aux définitions classiques de réflexivité, symétrie, antisymétrie et transivité, à la condition de représenter l'ensemble deux fois (ensemble de départ et ensemble d'arrivée) sur un couple de deux demi-droites perpendiculaires; les éléments seront régulièrement espacés, et écrits dans le même ordre sur les deux demi-droites. Nous remarquerons la bissectrice de l'angle des deux demi-droites.

1. *Signification géométrique des quatre définitions de base.*



Réflexivité *Symétrie* *Antisymétrie* *Transitivité*

FIG. 1.

a) *Réflexivité :* $\forall a$, $a\mathrm{R}a$. Tous les couples (a, a) appartiennent au graphe, c'est-à-dire que tous les points possibles de la bissectrice appartiennent au graphe.

b) *Symétrie :* $\forall a$, $\forall b$, $a\mathrm{R}b$ implique $b\mathrm{R}a$. Donc tout point du graphe est tel que son symétrique par rapport à la bissectrice appartient aussi au graphe.

c) *Antisymétrie :* $\forall a$, $\forall b$, $a\mathrm{R}b$ et $b\mathrm{R}a$ impliquent $a = b$. Donc aucun point du graphe, en dehors de ceux de la bissectrice, n'a son symétrique par rapport à cette bissectrice sur le graphe.

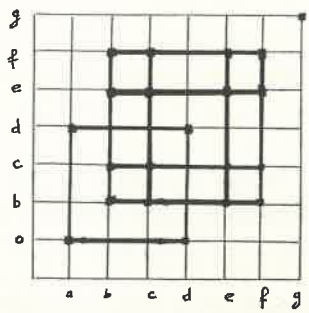
d) *Transitivité :* $\forall a$, $\forall b$, $\forall c$, $a\mathrm{R}b$ et $b\mathrm{R}c$ impliquent $a\mathrm{R}c$. Les couples (a, b), (b, b) et (b, c) ont pour images les trois sommets d'un triangle rectangle dont le sommet de l'angle droit appartient à la bissectrice. On peut compléter le rectangle ainsi commencé. S'il y a transitivité, c'est-à-dire si les couples (a, b) et (b, c) appartenant au graphe, (a, c) lui-même appartient au graphe, alors ce couple (a, c) est le quatrième sommet du rectangle.

2. *Graphes de relations d'équivalence ou de relations d'ordre, dans le cas d'ensembles finis.*

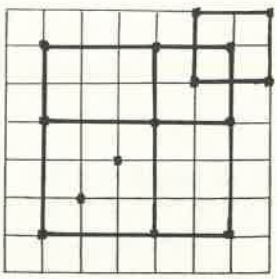
Si l'on fixe la partition ou l'ordre d'avance, le graphe est facile à construire et l'on peut constater ensuite les propriétés géométriques correspondantes.

Mais il est plus délicat de compléter une relation pour que ce soit éventuellement une relation d'équivalence ou une relation d'ordre. Une étude géométrique peut permettre de conclure.

Voici quelques exemples remarquables pour un ensemble comportant 7 éléments.

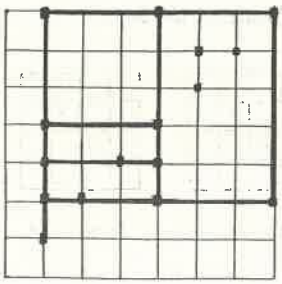


Équivalence : classes (a, d), (b, c, e, f), (g)

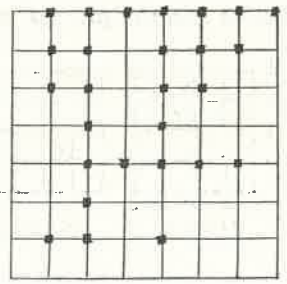


Classes (a, d, f), (b), (c), (e, g)

FIG. 2.



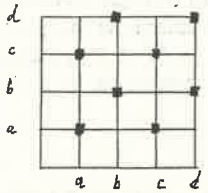
Ordre partiel: e R f; a R d R c et a R d R g R b



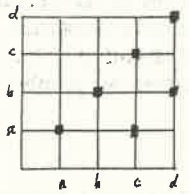
Ordre total: b R d R a R e R f R c R g

FIG. 3.

Remarques : 1° Pour que la transitivité existe, il suffit qu'elle ne soit pas contredite. Voici un exemple de relation d'équivalence et un exemple de relation d'ordre sans exemple de transitivité.



Classes : (a, c), (b, d)



Ordre partiel : c R a; d R b

FIG. 4.

2° Une relation seulement réflexive est à la fois une relation d'équivalence et une relation d'ordre partiel!

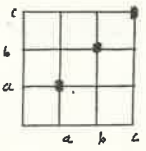


FIG. 5.

3. Exemple de problème : Soit la relation R sur l'ensemble E des nombres entiers de 1 à 8 ($E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$) définie de la façon suivante :

$$xRy \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + y^2 - 11x - 7y + 40) = 0 \qquad (1)$$

Dessiner le diagramme et montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre partiel.

Le graphe a toutes les propriétés pour être celui d'une relation d'ordre partiel (6R5R2 et 7R4R3).

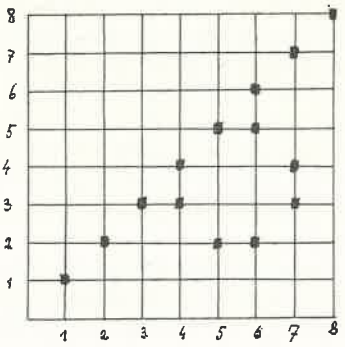


FIG. 6.

Notons que ce graphe n'est en fait que l'ensemble des couples de E^2 appartenant à la droite ou au cercle dont les équations dans $\mathbb{R}^2$ sont :

$$x - y = 0$$
$$x^2 + y^2 - 11x - 7y + 40 = 0.$$

B. DESTAINVILLE
(Lycée Nord Toulouse.)