La physique mathématique en Sixième

J.-M. CHEVALLIER
Lycée Marcelin-Berthelot, Saint-Maur

Ce titre n'est ni une provocation, ni une plaisanterie, mais plutôt une question que je me pose et que beaucoup d'autres doivent se poser quant au caractère de notre enseignement élémentaire.

Nous n'avons pas à rougir de nous comporter de temps à autre en physiciens; même si la mathématique actuelle a considérablement élargi le cadre dans lequel nous cherchions des « situations » pour élaborer nos « modèles », la physique continue à nous fournir de telles situations, et de plus des exemples, des problèmes auxquels nous pouvons appliquer notre outil mathématique. Personnellement, j'y ai recours en mainte occasion; cependant, dans le second cycle, nous pouvons préférer nous en abstenir au nom d'un certain idéal de « pureté », puisqu'aussi bien notre collègue physicien — le vrai — a compétence dans son domaine.

Le cas du premier cycle est totalement différent. Le nouveau programme de Sixième, reprenant d'ailleurs l'ancien sur ce point, fait obligation au professeur de « mathématiques » d'étudier « certains objets géométriques ou physiques donnant lieu à mesure ». A vrai dire ces « objets » semblent s'évanouir dans les classes suivantes, ce qui n'est pas la moindre incohérence — elle aussi traditionnelle — de notre enseignement. Ces objets reparaîtront-ils ailleurs, sous une autre forme, par exemple dans la technologie dont on a beaucoup parlé? Cela seul mériterait une étude à part; sans vouloir l'aborder ici, je ne cache pas qu'à mon avis nous serons d'autant plus à l'aise pour « purifier » notre discipline qu'il existera parallèlement un enseignement concret. De toute évidence cela pose des problèmes qui ne sont pas seulement de programmes, mais d'*équipement scolaire;* il faut non le dissimuler, mais le proclamer. Nous ne devons pas nous résigner à chercher, parfois assez artificiellement, des situations propres à faire ressentir le besoin d'une multiplication dans $\mathbb{Z}$, alors que l'étude élémentaire des moments dans le levier ou le treuil fournirait des exemples doublement éducatifs.

Mais revenons à la question posée dès la Sixième : qu'enseignons-nous exactement? La mathématique n'est absolument pas une connaissance du réel; c'est une discipline de l'esprit. En tant que telle, elle ne s'oppose pas à la connaissance, elle lui est liée, mais elle ne s'identifie pas à elle. Une « physique mathématique », c'est

une physique où l'explication au moins approchée du plus grand nombre possible de phénomènes est *déduite* à partir d'un petit nombre de *principes;* l'entre-deux, c'est-à-dire : le processus préalable d'abstraction dans l'élaboration des principes, la déduction proprement dite, l'application aux problèmes particuliers, tout cela est de caractère mathématique, mais aux deux bouts les principes et les phénomènes sont physiques. Même si la distinction n'apparaît pas du premier coup dans l'esprit de nos élèves jeunes, nous ne devons, nous, jamais la perdre de vue : faire « de la physique » est très légitime, pourvu que nous ne prétendions pas (et pis encore : n'imaginions pas) que nous faisons alors des mathématiques.

Malheureusement, la netteté de cette distinction varie beaucoup avec la branche de la physique considérée; c'est surtout une question d'habitudes d'esprit et de langage, en fait une question d'histoire. En particulier, du fait que la *science de l'espace* a été mathématisée de très bonne heure, on a tendance à croire que la « géométrie » fait partie des mathématiques, et cela ne laisse pas de créer bien des malentendus. S'il s'agit de la géométrie après Hilbert, celle où les principes ont perdu tout contenu physique pour devenir des axiomes — purement gratuits sous réserve de compatibilité logique — celle où l'on s'attache à la liberté de l'exploration intellectuelle plutôt qu'à l'adéquation au réel, ce caractère purement mathématique n'est pas discutable; mais l'étude de cette géométrie-là demande un niveau déjà un peu élevé. Ce n'est pas elle qui nous occupe ici; certes l'enseignement élémentaire peut fort bien se proposer de *préparer les voies* à cette libre construction, mais il le fera d'autant mieux que nous aurons pris une conscience plus nette de sa dualité.

Au fond nous sommes des *fabricants d'opérateurs;* il est sain qu'avant de jongler avec ces opérateurs, nos élèves aient eu l'occasion de les roder sur des objets physiques, mais il est dangereux qu'ils confondent le matériau et l'outil. A cet égard on peut se demander si la notion d'*opération externe* ne devrait pas apparaître beaucoup plus tôt comme une notion fondamentale; la suite fournira des exemples de cette idée.

***

Des questions de ce genre se posent dès qu'on essaie de raccorder la partie nouvelle du programme (ensembles, relations, en particulier numériques) avec l'ancienne (longueurs, aires, vitesses, etc.); la réponse ne semble pas toujours aussi claire qu'on le souhaiterait, ni dans l'esprit de beaucoup de collègues, ni dans les manuels existants, ni dans les programmes eux-mêmes ou les instructions. Ce n'est pas une critique, mais la constatation d'un embarras assez naturel, et je n'y échappe pas plus que les autres.

Le cas du repérage — plutôt sacrifié dans bien des manuels —, celui de la mesure sont des exemples flagrants. Je n'essaierai pas de les traiter au fond, puisqu'aussi bien Revuz l'a fait aux Journées de Besançon et en mainte autre occasion, avec une compétence que je ne lui dispute pas; je me bornerai à les examiner sous un jour légèrement différent qui fera apparaître quelques divergences : elles ne sont pas essentielles, mais elles ne sont pas non plus de simples nuances.

Bien entendu, je m'estime tout aussi incapable qu'un autre de définir proprement une *ligne continue* — droite ou courbe, plane ou gauche, peu importe — devant des élèves de Sixième. Prenons-la donc comme un donné physique, *avec ses propriétés topologiques*. Déjà nous tombons sur un premier obstacle : si cette ligne ne se « ferme » ni ne se « croise », il est aisé d'admettre sur elle l'existence d'un ordre total, dans le cas contraire l'ordre ne pourra être sauvegardé qu'au prix d'une coupure qui rompt la continuité; tel est le cas du cercle, qui annonce les difficultés futures touchant les

arcs dits orientés et rend nécessaire dès à présent la coupure des parallèles terrestres sur l'antiméridien de Greenwich.

Une fois cet ordre admis, en quoi consiste un « repérage grossier »? Essentiellement à établir une bijection croissante entre une *graduation* G — c'est-à-dire un sous-ensemble discret (d'ailleurs absolument arbitraire) de points de la ligne, ordonné par l'ordre induit — et un intervalle $\mathbb{Z}'$ de $\mathbb{Z}$. Cette bijection étant entièrement déterminée dès que l'on connaît le point A choisi pour origine de la graduation, ce « repérage grossier » apparaît comme un triplet (G, A, $\mathbb{Z}$). Le même canevas fournit une mesure, soit d'un ensemble de points de la graduation, soit d'un ensemble de semi-ouverts ayant pour extrémités deux points consécutifs de G; un « mesurage grossier » n'est autre que le couple (G, $\mathbb{N}$), l'origine n'ayant plus besoin d'être distinguée.

« Affiner » le repérage ou la mesure revient à remplacer G par une nouvelle graduation G_1 en introduisant — toujours de façon arbitraire — entre deux points consécutifs de G des points intermédiaires en nombre k—1 (si l'on travaille en base k); on a alors le choix entre le repérage (G_1, A, $\mathbb{N}$), dans lequel les anciens numéros auront été multipliés par 10, et le repérage (G_1, A, $\mathbb{D}_1$), puis (G_2, A, $\mathbb{D}_2$), (G_3, A, $\mathbb{D}_3$)... où le numérotage se fait au moyen des nombres à une, deux, trois... « décimales » ce qui offre l'avantage de conserver les anciens numéros et de frayer la voie vers l'ordre « dense » dans les ensembles numériques.

De même, acceptant comme intuitive la notion de surface continue, on tracera sur cette surface un réseau R de lignes; toujours sous certaines réserves topologiques (en particulier éviter que les lignes d'une même famille s'entrecroisent), on pourra, après choix d'un nœud origine A, repérer soit les nœuds, soit les mailles de R au moyen de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (*). Si une partie de la surface a pour bord des parties des lignes de R, sa mesure est un nombre de mailles; les mesurages de plus en plus fins sont ici (R, $\mathbb{N}$), (R_1, $\mathbb{D}_2$), (R_2, $\mathbb{D}_4$), etc.

J'insiste sur le fait que la « forme » des mailles ne joue aucun rôle; se borner à des carrés ou même des parallélogrammes n'a aucun intérêt puisqu'on est obligé de les abandonner pour le repérage sphérique. A ce propos, sans qu'il soit question de faire une théorie de la cartographie, visiblement déplacée ici, la diversité des systèmes géographiques de représentation (orthographique, stéréographique, Mercator, Mollweide, etc.) fournit assez d'exemples de l'indépendance complète entre « forme » et repérage pour qu'on leur accorde plus d'importance que ne le font habituellement les manuels. La condition posée plus haut — que les lignes d'une même famille ne s'entrecroisent pas — trouve un magnifique contre-exemple avec les pôles géographiques où la convergence des méridiens rend illusoire toute « longitude »; et si l'on cherche à se débarrasser de cette convergence, le remède est pire que le mal, car on abolit du même coup tout repérage polaire (Mercator) : le fameux ours blanc du Pôle Nord (ou le pingouin du Pôle Sud) sont — chose étrange — écartelés d'*Est en Ouest!*

Il convient de souligner que nous trouvons dans ce qui précède, *en tant que mathématiciens*, tout ce qui nous est nécessaire au niveau considéré, et même sensi-

(*) Noter au passage que, pour la commodité, on préfère *l'ordre-produit* à un ordre total. On rappelle à ce propos que l'ordre dans un ensemble est *total* si, étant donné deux éléments quelconques, on peut toujours décider lequel est « antérieur » à l'autre (tel est le cas des entiers dans Z); ici, on n'indique aucun moyen de décider si un couple (a, b) est « antérieur » ou non à un autre couple (c, d), on considère qu'il est suffisant et plus avantageux pour repérer un point ou une maille de connaître le numérotage de sa « ligne » et celui de sa « colonne ». C'est en cela que consiste l'ordre-produit.

blement plus. Une fois admises les propriétés topologiques, le rôle du support physique est réduit au minimum; ce qui apparaît au premier plan, ce sont les propriétés corrélatives des « réunions disjointes » et des sommes numériques, celles des produits cartésiens et des produits numériques (on peut même se demander si l'on n'aurait pas eu intérêt à accentuer cet aspect dans le programme). De même se trouvent dépouillés de tous éléments superflus le problème du changement d'origine par « translation » et le problème du changement d' « unité », qui n'est autre que l'affinage. La nette séparation entre le rôle physique de la graduation G et le rôle mathématique des opérateurs entiers nous met à l'aise pour introduire l'addition dans $\mathbb{Z}$ suivant le schéma (qui donnera plus tard la construction d'un espace affine sur un espace vectoriel).

$(MT a)Tb = MT(a + b)$, où l'opération externe T est un « déplacement physique » opérant sur les points M de la graduation, alors que $+$ symbolise l'addition « pure » : il suffit d'imaginer pour G n'importe quelle ligne d'autobus découpée en sections, pour a et b un nombre de tickets, par exemple bleus ou rouges suivant le sens de parcours. Enfin nous disposons, avec l'ordre, de la notion d'encadrement; ici encore on peut juger excessive la discrétion du programme quant à la compatibilité de l'ordre avec certaines opérations dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{D}$, sur quoi se fondent tous les problèmes d'encadrement : il est beaucoup plus difficile d'évaluer l'aire d'une table que de faire une multiplication exacte, cela on ne l'apprendra jamais trop tôt!

***

Cependant nous en tenir là ne serait conforme ni au programme, ni aux besoins pratiques : nous devons nous inquiéter, *en tant que physiciens* cette fois, de savoir si les segments de la graduation, les mailles du réseau..., sont « superposables » (« isométriques », « équivalents »). C'est seulement alors que s'introduit l'idée de graduation « régulière » ou, ce qui revient au même, l'idée d'*unité* de longueur, d'aire, etc. Fondamentalement, rien n'est changé : un mesurage à 1 centimètre près est à présent le couple (cm, $\mathbb{N}$) affiné en (mm, $\mathbb{N}$) ou en (cm, $\mathbb{D}_1$); à la dimension 2, un mesurage à 1 mètre carré près est (m^2, $\mathbb{N}$), affiné par exemple en (cm^2, $\mathbb{N}$) ou (dm^2, $\mathbb{D}_2$), ou (m^2, $\mathbb{D}_4$); même chose pour les temps, les masses, etc.

Il subsiste cependant un malaise, une équivoque, qui apparaissent dans les notations, mais sont plus profonds : est-ce que AB signifie 3 ou bien 3 cm? J'avoue que, si nos élèves le savent après la lecture de la plupart de leurs manuels, ils sont diablement intelligents et n'ont que faire de nos conseils; souvent le même ouvrage, à quelques pages, voire à quelques lignes d'intervalle, passe d'une interprétation à l'autre sans même prévenir. Pis encore, on a la pénible surprise de lire à peu près partout (du moins dans les manuels qui donnent des exemples) des écritures bâtardes du genre de : $3 + 5 = 8$ cm; on ne saurait mieux brouiller les cervelles innocentes, les inciter à écrire plus tard : $3 + 5 = 8x$ et les « conditionner » à ne jamais savoir ce qu'est une opération externe.

Pour les « purs », la longueur est une application à valeurs numériques; elle s'identifie donc à la mesure (ou du moins une certaine mesure) et il faut écrire $AB = 3$. Mais, comme au moindre changement d'unité j'aurai $AB = 30$ ou $AB = 0{,}03$, cela est propre à faire naître des doutes sur la transitivité de l'égalité. Je fais l'âne, bien sûr; ce qu'on voulait me faire entendre, c'est que cm-mes $AB = 3$, mm-mes $AB = 30$, etc. D'accord, mais ce que démontre justement cette forme, c'est que AB n'était pas un nombre, et, comme de surcroît elle est fastidieuse, elle incite à revenir à l'écriture $AB = 3$, donc au fond *dans le couple* (cm, $\mathbb{N}$) *à ne considérer que* $\mathbb{N}$.

Franchement, AB = 3 cm = 30 mm était plus clair. Les fanatiques du nombre pur ont d'ailleurs la ressource de transformer cela en $\frac{AB}{cm} = 3$ et $\frac{AB}{mm} = 30$ en interprétant les premiers membres non comme des rapports — qui leur feraient probablement horreur — mais comme de simples notations, tout de même plus légères que les précédentes.

Pour constater les mauvais tours que nous joue cette obsession du nombre, il n'est que de lire certains ouvrages : on y relève par exemple qu'il convient de bien distinguer la densité, « qui est un nombre » (il s'en trouve même encore pour ajouter « abstrait »!) de la masse volumique, laquelle est « la masse de l'unité de volume »; ce serait lumineux si, quelques pages auparavant, la masse n'avait été définie... comme un nombre. D'ailleurs, dès l'instant que tout est nombre (Pythagore avec nous!), on ne voit pas pourquoi cette densité, cette masse, ne seraient pas *aussi* une longueur, un temps, une vitesse... et l'âge d'un sexagénaire égal à l'angle d'un triangle équilatéral. J'entends bien qu'il s'agit d'applications *différentes* ayant *même* ensemble de valeurs; mais, si l'on commence précisément par dissimuler la chose sous des notations insuffisamment explicites, il faudra pas mal de salive avant que l'élève de Sixième moyen en prenne une nette conscience, ... surtout dans le cas de l'eau, qui a pris la fâcheuse habitude, depuis la Révolution, d'avoir une masse et un volume de même valeur.

Nous a-t-on assez dit, et à bon droit, que la mathématique « moderne » allait enfin nous libérer de la tyrannie du Nombre? établir entre des ensembles tout-à-fait quelconques des relations qui ne seraient plus forcément numériques? Eh bien, voici l'occasion! Dans une collection E d'objets, une bille, un dé, un caillou, plongés dans un vase à trop-plein, font écouler exactement de quoi emplir un même récipient : c'est une relation d'équivalence sur E, et j'appelle *volume* la classe d'équivalence; d'autres objets font équilibre à une même tare sur la balance : autre classe que j'appelle *masse;* comme de toute évidence la bande de papier ou le compas ne sont pas moins « physiques » que les instruments précédents, nouvelle classe, la *longueur*, etc. Rien n'empêche d'aller jusqu'à l'ordre sur ces classes — car « plus gros », « plus massif », « plus long » sont des notions directement accessibles par l'expérience — ou jusqu'à une approche qualitative de la densité (masse supérieure à volume égal) sans qu'à aucun moment le nombre soit intervenu. C'est pourquoi donner de ces choses-là des *définitions* numériques me paraît aller à contre-sens.

Ce qui n'est pas douteux, en revanche, c'est que notre tâche consiste à *introduire* le nombre dans cet embryon de « physique mathématique », fort évidemment par le canal de la mesure et le biais des opérations externes... qui nous achemine vers les espaces vectoriels.

Pour ce qui est linéaire, nous disposons d'une « addition interne » des classes (notons-la s), qui débouche naturellement sur une « multiplication externe à opérateurs dans $\mathbb{N}$ », ultérieurement dans $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ (notée par simple juxtaposition). Cela nous permet d'écrire :

$$(1) \quad \begin{cases} (3\text{ cm})\ s\ (5\text{ cm}) = (3 + 5)\text{ cm} \\ 3\text{ cm} = 3\ (10\text{ mm}) = (3 \times 10)\text{ mm} \end{cases}$$

Un peu plus délicat, mais pas essentiellement différent, est le cas des « formes bilinéaires » — ou trilinéaires — où cela se combine avec une « multiplication extérieure » (notons-la $\perp$) possédant les propriétés suivantes :

(2) $\begin{cases} (3\text{ m}) \perp (4\text{ m}) = (3 \times 4)\,(\text{m} \perp \text{m}) \\ [(3\text{ m})\ s\ (2\text{ m})] \perp (4\text{ m}) = [(3\text{ m}) \perp (4\text{ m})]\ s'\ [(2\text{ m}) \perp (4\text{ m})] \end{cases}$

(Dans cette dernière expression, s' désigne une « somme » d'aires comme s désignait une « somme » de longueurs. Remarquer d'autre part qu'il n'est pas nécessaire que les deux « facteurs » de l'opération $\perp$ soient les mêmes, cela serait même plus clair avec des facteurs différents comme dans le vieil exemple des tonnes-kilomètres, ici t $\perp$ km.)

Visiblement les propriétés (1) et (2) sont le fidèle reflet des propriétés classiques de l'addition et de la multiplication dans les ensembles numériques. Cette analogie — plus précisément cet isomorphisme — justifie l'attitude des « purs » lorsqu'ils rejettent toute référence à des « grandeurs physiques », mais elle la justifie *à terme* et non d'emblée. Elle peut justifier aussi l' « abus de notation » qui consiste à remplacer s ou s' par $+$, la juxtaposition ou $\perp$ par $\times$. Je sais que certains collègues sont allergiques à des écritures comme celles-ci :

$$2\text{ cm} \times 3\text{ cm} = 6\text{ cm}^2$$
$$15\text{ km} : 3\text{ h} = 5\text{ km/h}$$
$$8\text{ kg} : 4\text{ dm}^3 = 2\text{ kg/dm}^3 = 2\text{ g/cm}^3$$

Cette hostilité peut avoir des raisons pédagogiques; c'est un plan sur lequel les avis se partagent, car on peut tout aussi bien plaider que l'indication constante des unités sert de garde-fou à l'élève et le prépare aux futures « équations aux dimensions »; je l'ai fait pendant des années, d'autres le font sans dommage semble-t-il, mais enfin le débat reste ouvert. En revanche, il me paraît difficile d'invoquer des raisons *théoriques* profondes à ce refus d'employer $+$ et $\times$ ailleurs que dans les ensembles numériques : si « abus de notation » il y a, disons qu'il est constant et inévitable, sans quoi nous serions ensevelis sous l'avalanche des notations. Et tout le reste est superstition.

***

On est libre de trouver les présentes réflexions soit « conservatrices », soit « progressistes », soit même les deux à la fois; on est même libre de n'y accorder aucune importance. Je ne fais pas de profession de foi et me bornerai en conclusion à souligner deux points :

1. Rien n'est plus absurde que d'introduire dans un programme des notions nouvelles — ici les ensembles et relations — si c'est pour ne pas s'en servir et continuer à enseigner les « surfaces » comme avant : c'est cette articulation que j'ai cherchée ici, sous une forme assez condensée, destinée (est-il besoin de le dire) aux collègues et non directement aux élèves.

2. On ne reproche pas à une synthèse d'être vaste, ou même ambitieuse, mais on peut lui reprocher d'être prématurée si elle néglige de s'appuyer sur une analyse préalable qui, elle, doit être modeste, soigneuse et patiente. La « physique », au sens large, continue à fournir un terrain de choix à cette analyse.

J.-M. C.

P.S. — Le rapport de la Commission Lichnérowicz sur l'enseignement élémentaire condamne l'écriture 12 cm + 5 cm = 17 cm. Je signale la chose par souci d'objectivité sans me déclarer couverti pour autant. D'ailleurs le rapport retombe immédiatement dans les embarras de langage : « le centimètre étant l'unité, la longueur est 17; ou, en langage courant, la longueur est 17 centimètres ». Eh bien, vivent les crocheteurs du Port-au-Foin! Si les mathématiciens veulent parler autrement, qu'ils disent : « le centimètre étant l'unité, la *mesure* est 17 »; quelle précision apporte *longueur?*