Première étape...

...vers une réforme de l'enseignement mathématique dans les classes élémentaires

Pourquoi nous publions cette brochure

L'école élémentaire est actuellement en quête d'une nouvelle manière d'être dont l'institution du « tiers-temps » avec l'introduction massive de l'éducation physique ne sont pas les moindres signes. Les raisons essentielles de cette mutation ont été mises en évidence par la Commission Ministérielle de Rénovation Pédagogique, de façon assez convaincante pour que les propositions exprimées par cette Commission dans son rapport de synthèse ne restent pas lettre morte. Nous nous en réjouissons.

Dans ces perspectives, la réorganisation de l'enseignement du « calcul » que nous souhaitions depuis longtemps, va enfin pouvoir être mise en œuvre. Au printemps de cette année 1969, la Commission que préside le Pr Lichnérowicz, et qui depuis 1966 s'est vu confier la tâche de définir les contenus, les méthodes, les moyens d'un enseignement mathématique conforme aux exigences et aux possibilités de notre époque, partout et à tous les niveaux, s'est précisément consacrée au niveau élémentaire, point de départ de l'éducation en mathématique comme en tout autre domaine (1).

Le souci de présenter des propositions applicables dès la rentrée 1969, a conduit les membres de la Commission à s'attacher en premier lieu à l'élaboration d'un programme de formation initiale des futurs instituteurs, ainsi qu'à une nouvelle rédaction des programmes de 1945 accompagnée de commentaires assez nourris pour éclairer la réforme déjà possible.

Un projet concernant la formation des maîtres en exercice (mise à jour et formation permanente) est également à l'étude. Et il reste à élaborer un véritable programme qui montrera nettement ce que l'enseignement élémentaire peut et doit apporter aux enfants, dans la perspective d'une formation mathématique de conception « moderne », et à envisager l'échelonnement dans le temps de l'application d'un tel programme.

Nous remercions le Pr Lichnérowicz, de nous autoriser à publier les deux premières parties du rapport, adoptées fin juin par la Commission.

Les délais administratifs trop habituels n'ont pas permis la publication officielle de ces textes avant la rentrée scolaire. Elle ne saurait tarder paraît-il, mais

(1) Cf. rapport publié dans le bulletin l'A.P.M.E.P. n° 258.

il nous est agréable de répondre aux demandes qui nous sont adressées de toutes parts, en faisant connaître ces documents dès maintenant à tous les maîtres qui souhaitent s'en inspirer déjà pour la conduite de leur classe, à ceux qui acceptent de se remettre à l'étude pour dominer l'évolution ainsi engagée. Le programme destiné aux élèves-maîtres de 4e et 5e année, doit effectivement fournir les thèmes de travail pour la mise à jour des connaissances de tous.

Le texte proposé pour les programmes des classes élémentaires concorde avec le projet « A » présenté par un groupe de collègues de notre Association et adopté à l'Institut Pédagogique National par l'ensemble des animateurs des expériences en cours, lors des réunions de décembre et janvier 1968-69 (2).

Ce texte se borne à redistribuer et alléger le contenu des programmes de 1945. La rédaction en trois paragraphes pour les C.E. et C.M. souligne la distinction entre les notions mathématiques dont il convient d'organiser l'approche et d'autres domaines d'activités qui leur sont en partie étrangères : observation de l'espace et familiarisation avec des objets « géométriques » ; pratique de mesures, étude d'objets et de phénomènes physiques mesurables. A ce propos, les soucis « pratiques » qui pesaient lourdement sur les textes de 1945 (prix et poids à l'unité..., peintures et tapisseries etc.) n'apparaissent plus dans la rédaction proposée. Bien sûr, il convient de faire appel au besoin à des exemples tirés de situations familières pour mettre en jeu des notions mathématiques, mais le but de l'enseignement mathématique n'est pas de fournir telle ou telle réponse à telle ou telle question « pratique », comme on a pu le croire. C'est en fait de fournir des modes et des outils de pensée plus puissants, capables de s'appliquer à des situations imprévues, et avant tout de construire ces outils.

A ce projet immédiat nous avions alors associé un projet « B » plus élaboré, qui servira probablement de référence, de la même façon, pour l'élaboration du nouveau programme envisagé par la Commission. Il nous paraît donc utile de publier de nouveau ce projet, dans sa forme primitive (où l'on a simplement fait apparaître les idées essentielles sans chercher à soigner la rédaction).

L'année scolaire 1969-70 voit l'application générale de la réforme de l'enseignement mathématique dans le second degré aux niveaux des classes de Sixième et de Seconde. Sept académies (Paris, Strasbourg, Lyon, Rennes, Besançon, Bordeaux, Aix-Marseille) vont cette année bénéficier de la création des I.R.E.M. pour l'animation des recherches et des expériences pédagogiques, ainsi que pour la formation des maîtres. Partout notre Association s'efforce, en multipliant les réunions entre les professeurs, de faciliter cette formation et d'assurer la réussite de la réforme.

L'école élémentaire ne doit plus rester en marge d'un tel mouvement. Comme dans tant d'autres pays, engagés eux-aussi dans la même évolution (Danemark, Grande-Bretagne, Allemagne, etc.), ces premières années d'école peuvent offrir à nos enfants les activités mathématiques les plus stimulantes, les plus efficaces, les plus riches d'avenir... Beaucoup d'efforts seront nécessaires pour réaliser partout ces objectifs. Une première étape est une manière sage et sûre d'avancer tout en préparant la suivante, et d'amorcer ainsi la réforme permanente grâce à laquelle l'école, maison de toute la jeunesse, saura répondre toujours mieux à sa mission.

Mme M.-A. TOUYAROT,
Présidente de l'A.P.M.E.P.

(2) Cf. rapport sur ces journées, dans le bulletin de l'A.P.M.E.P. nº 267 (p. 120 et suite).

Commission ministérielle
sur l'enseignement des mathématiques

Rapport des sous-commissions 3 et 4 de l'enseignement élémentaire

(Paris, le 30 juin 1969)

1. Recommandations en vue d'une action immédiate

L'enseignement mathématique à l'école élémentaire veut répondre désormais aux impératifs qui découlent d'une scolarité obligatoire prolongée et de l'évolution de la pensée mathématique elle-même.

Il s'agit alors de faire en sorte que cet enseignement contribue au meilleur développement de tous les enfants de six à onze ans, dans le but de donner à tous les mêmes chances de succès dans le premier cycle secondaire et non plus de les préparer directement à la vie active.

L'ambition essentielle de cet enseignement n'est plus en premier lieu de faire acquérir des techniques de résolution de problèmes catalogués suggérés par « la vie courante ». Les notions mathématiques liées à ces techniques ne sont pas évidentes, cependant il paraît possible à ce niveau d'en assurer une approche correcte et une compréhension réelle par les enfants. Il faut le plus tôt possible leur donner une véritable formation qui leur permette, d'une manière adaptée à leur âge, de dégager des concepts mathématiques et qui leur assure la maîtrise d'une pensée mathématique disponible et féconde. Les progrès dans la connaissance du développement psychologique de l'enfant montrent d'ailleurs tout le bénéfice qu'il peut retirer d'un tel enseignement pour l'ensemble de sa formation.

Ces connaissances mathématiques ainsi construites peu à peu se prolongeront sans heurt au delà de l'école élémentaire, mais à ce niveau déjà, les enfants pourront se rendre compte que l'univers mathématique n'est pas clos sur lui-même et mesurer le pouvoir que leur donne l'outil mathématique sur l'univers réel.

Depuis 1964, des expériences nombreuses ont été réalisées en particulier autour des Écoles Normales, dans le cadre des recherches organisées par l'Ins-

titut Pédagogique National, elles permettent dès maintenant d'élaborer un programme adapté à un enseignement rénové. Mais la mise en œuvre généralisée d'un tel enseignement suppose que tous les maîtres aient pu bénéficier d'une préparation appropriée et demande un certain délai. Aussi la sous-commission est amenée à proposer des mesures provisoires immédiatement applicables.

Elles consisteraient à alléger le programme actuel de l'enseignement élémentaire et à adopter une nouvelle rédaction de celui-ci. La sous-commission a proposé cette rédaction à la commission pleinière, qui l'a acceptée; elle n'introduit à dessein aucune terminologie nouvelle.

D'autre part, les instructions actuelles (de 1945) devenant par le fait même caduques, les maîtres pourraient s'inspirer avantageusement, surtout pour les questions dont le point de vue a été rénové, des « commentaires » présentés également par la sous-commission. Dans la rédaction du programme, les trois niveaux, CP, CE (en deux ans) CM (en deux ans) sont conservés.

Pour chacun de ces niveaux, les notions numériques qui constituent l'essentiel du programme sont présentées dans le paragraphe 1. Les paragraphes suivants proposent des thèmes d'activités plus divers : le paragraphe 2 concerne l'observation de l'espace et des objets « géométriques »; le paragraphe 3 envisage la pratique des mesures dans une perspective expérimentale La matière de ces activités sera donc largement empruntée aux « disciplines d'éveil ».

Les activités désignées jusqu'alors sous le vocable de « calcul » ne constituent qu'une partie de l'activité mathématique, il convient de désigner désormais la matière du programme sous le terme « mathématique ».

La sous-commission espère que la nouvelle rédaction du programme et l'allègement substantiel de celui-ci inviteront les maîtres à réfléchir sur le contenu mathématique de leur enseignement. Ils y seront aidés par les commentaires, ceux-ci ont été particulièrement détaillés à propos des questions dont la présentation peut être avantageusement renouvelée; pour faciliter leur étude, ils ont été rédigés non pas par niveau, mais par thème du programme.

2. Programme (1945 modifié 1969)

Cours préparatoire

Notion de nombre naturel. Nommer et écrire des nombres.
Comparer deux nombres. Somme de deux nombres.

Cours élémentaires 1re et 2e années

1) Les nombres naturels : nom et écriture.

Somme et différence de deux nombres; pratique de l'addition et de la soustraction.

Produit de deux nombres; pratique de la multiplication.

Quotient exact de deux nombres; division avec reste; pratique de la division par un nombre d'un chiffre.

Calcul mental.

2) Exercices d'observation et travaux sur des objets géométriques.

Tracés, découpages, pliages.

Cube, carré, rectangle, triangle.

Quadrillages.

3) Mesures : exercices pratiques.

Lecture de l'heure. Usage du calendrier.

Cours moyen 1re et 2e années

1) Éléments de mathématique.

Nombres naturels et décimaux : nom et écriture.

Multiplication et division par 10, 100, 1000 .....

Opérations et leurs propriétés; suite d'opérations; pratique des opérations; calcul mental.

Divisibilité des nombres naturels par 2, 5, 9.

Fractions considérées comme opérateurs. Produit de deux fractions.

Exemples de relations numériques. Proportionnalité.

2) Exercices d'observation et travaux sur des objets géométriques.

— bande, parallélogramme (et ses cas particuliers), triangle;
— disque, cercle;
— parallélépipède.

3) Mesures : exercices pratiques;

— longueur, aire, volume;
— temps, masse;
— expressions d'un résultat avec une unité convenablement choisie. Ordre de grandeur. Encadrements.

3. Commentaires

1. Nombres et opérations

L'ordre dans lequel les rubriques sont énumérées ci-dessous n'est pas nécessairement l'ordre chronologique de leur présentation dans les classes. Il appartiendra à chaque maître d'organiser sa progression selon les possibilités des élèves et ses préférences personnelles.

1. *Notion de nombre naturel*
2. *Nommer et écrire les nombres*
3. *Comparer deux nombres*
4. *Opérations — Propriétés — Pratique*
5. *Décimaux*
6. *Relations numériques : tableaux de nombres*
9. *Fractions.*

1.1. Notion de nombre naturel

Le programme du C.P. a été réduit à :

— l'élaboration du concept de nombre naturel;
— une initiation à la numération;
— l'apprentissage de l'addition des nombres naturels.

C'est en manipulant de multiples collections d'objets que les enfants élaborent peu à peu la notion de nombre naturel. Il est essentiel de bien comprendre que le nombre naturel n'est ni un objet, ni une propriété attachée à des objets, mais une propriété attachée à des collections.

A l'École Maternelle, pour dégager la notion de couleur, qui est une propriété d'objets, on pratique des exercices de classement portant sur des objets variés dont la forme, la matière, la taille... sont différentes, afin de répartir ces objets selon leur couleur.

De telles activités devront être reprises dans les premières semaines du Cours Préparatoire (les propriétés n'étant pas nécessairement des propriétés d'ordre sensoriel).

La notion de nombre naturel comme propriété d'une collection apparaîtra dans la mesure où l'on pourra établir une mise en correspondance terme à terme entre collections. Cette correspondance est indépendante de la nature et de la disposition des objets qui constituent les collections.

Exemples

1. Si on peut mettre en correspondance un à un les enfants de la classe et les porte-manteaux, on conclut qu'il y a *autant* d'enfants *que* de portemanteaux et *autant* de portemanteaux *que* d'enfants.

2. Deux enfants étalent sur leur table le contenu de leur trousse. Si l'on peut mettre en correspondance un à un les objets d'une trousse et ceux de l'autre (sans s'occuper de leur nature ni de leur disposition), on peut conclure qu'il y a *autant* d'objets dans l'une des trousses *que* dans l'autre.

C'est quand on aura multiplié ces exercices que les enfants comprendront que le nombre est une propriété qui s'attache à des collections, et ceci par une démarche analogue à celle qui leur avait permis de comprendre à l'École Maternelle que la couleur, par exemple, est une propriété qui s'attache à des objets.

L'emploi systématique de la correspondance terme à terme permettra de classer des collections et d'attribuer à chaque classe un nombre : ainsi, la classe de toutes les collections qui ont autant d'objets que l'on a de doigts dans une main définit le *nombre naturel « cinq »*. Cinq doigts, cinq enfants, cinq fruits, etc... ne sont pas des nombres : le nombre cinq est une propriété commune à l'ensemble des doigts d'une main, à un groupe d'enfants, au contenu d'une coupe de fruits.

Dans le premier exemple, si la correspondance un à un est impossible, il y a plus de portemanteaux que d'enfants ou plus d'enfants que de portemanteaux. On insistera sur le sens des expressions : *autant que*, *plus que*, *moins que*.

1.2. Nommer et écrire les nombres

Chaque nombre naturel peut être représenté par un signe. Nommer et écrire un nombre naturel avec un nombre limité de signes constitue ce que l'on désigne sous le terme « *numération* ».

L'activité de base est le groupement des objets d'une collection selon un certain mode. Une telle activité s'impose d'elle-même dès que les collections ont « beaucoup » d'objets.

Exemples de jeux de groupements préalables à la numération :

1er jeu : Dans une classe de vingt-sept enfants, on groupe les enfants quatre par quatre. Cela fait :

six groupes de quatre enfants,
trois enfants non groupés.

2e jeu : On répète l'opération de groupements avec les groupes de quatre enfants, cela fait :

— un « grand groupe » formé de quatre groupes de quatre enfants chacun,
— deux « groupes » de quatre enfants,
— trois enfants non groupés.

Ces résultats peuvent, si on le désire, être consignés dans un tableau :

grands groupes	groupes	enfants non groupés
1	2	3

On pourra faire des exercices analogues en groupant par trois, par cinq, par dix...

Si l'on choisit de grouper par dix, on retrouve la numération usuelle (décimale) : les « groupes » sont des dizaines, les « grands groupes » des centaines etc...

Ainsi, dans l'exemple précédent, le tableau devient :

groupes	enfants non groupés
2	7

C'est à la numération décimale seule que correspond la numération orale habituelle : dans cet exemple 27 est lu vingt sept.

Au cours de ces exercices d'écriture, on rencontre fréquemment le zéro (0) comme signe pour représenter la propriété d'une collection sans objet.

Il paraît raisonnable de ne pas dépasser cent au cours préparatoire et dix mille au cours élémentaire.

1.3. Comparer deux nombres

Emploi du signe « = »

Au cours de la scolarité, on verra qu'un nombre peut s'exprimer de différentes façons. Exemple : 6; 2×3; $4 + 2$; $8 - 2$; $24/4$; $24 : 4$ sont des expressions du même nombre.

Cela donne le droit d'écrire

$$6 = 6$$
$$6 = 2 \times 3$$
$$2 \times 3 = 4 + 2 \text{ etc...}$$

Emploi des signes $\neq$, $>$, $<$

On utilisera avec profit ces signes dès l'école élémentaire :

$$3 \neq 4$$
$$3 < 4$$
$$2 + 3 \neq 4 + 2$$
$$3 \times 2 > 5 - 1$$
$$18/3 < 7 \times 2 \text{ etc...}$$

1.4. Opérations : propriétés, pratique

L'étude des nombres naturels comprend celle des deux opérations élémentaires : l'addition, la multiplication, qui donnent à l'ensemble de ces nombres sa structure algébrique propre.

Parmi les opérations qui se rattachent aux précédentes, on étudie également la soustraction, la division exacte et la division euclidienne (avec reste pouvant être différent de zéro).

« Sens » de ces opérations

Il faut que les enfants comprennent que l'addition, la multiplication, etc... ne portent que sur des nombres.

Addition-Soustraction

Exemple 1 : On réunit dans une corbeille 8 pommes et 7 pommes... Le nombre de toutes les pommes est alors $(8 + 7)$.

$(8 + 7)$ est une première expression immédiate de la *somme* des nombres 8 et 7. Elle utilise un signe particulier, le signe « + » (plus). Les parenthèses soulignent qu'il s'agit de l'expression d'UN nombre; à ce point de vue il est utile d'en faire usage dès l'école élémentaire.

L'addition est l'opération qui associe aux nombres 8 et 7 leur somme $(8 + 7)$.

Habituellement on cherche à désigner ce nombre $(8 + 7)$ sans utiliser le signe +. Le groupement des objets selon la numération décimale conduit à écrire ce nombre 15 (quinze).

Alors $(8 + 7)$ et 15 sont deux expressions d'un même nombre, ce qui justifie l'égalité $(8 + 7) = 15$ que l'on écrit plus simplement :

$$8 + 7 = 15,$$

c'est par abus de langage qu'on a pu écrire des expressions telles que

$$8 \text{ pommes} + 7 \text{ pommes} = 15 \text{ pommes}$$

qui n'appartiennent en fait, ni au langage mathématique ni au langage usuel.

On n'écrit donc pas 8 pommes + 7 pommes = 15 pommes.

On écrit : le nombre de pommes est $(8 + 7)$:

$$8 + 7 = 15,$$

ce qui permet de conclure en langage courant « la corbeille contient 15 pommes ».

Au lieu d'écrire $(8 + 7)$ on peut choisir d'écrire $(7 + 8)$.

Aux couples (8; 7) et (7; 8) l'addition associe le même nombre (elle est commutative).

Remarquons que : $8 + 0 = 8$, $0 + 8 = 8$; $4 + 0 = 4$; $0 + 0 = 0$, etc...

Exemple 2 : Parmi 15 fruits, 8 fruits sont des pommes... Le nombre des fruits qui ne sont pas des pommes est alors celui qui complète l'égalité $8 + \square = 15$ ou $\square + 8 = 15$

On cherche parmi les nombres $(8 + 0)$, $(8 + 1)$,... celui qui est égal à 15. Le nombre cherché est $(8 + 7)$. Le nombre qui doit remplacer le carré est donc 7.

On peut aussi désigner directement le nombre par l'expression $(15 - 8)$ qui utilise le signe « — » (moins).

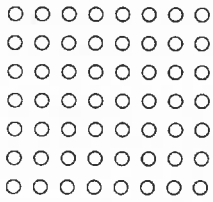
Ceci conduit à écrire : $15 - 8 = 7$.

La soustraction est l'opération qui associe aux nombres 15 et 8 leur *différence* $(15 - 8)$ (ou encore 7).

Au Cours Préparatoire, il suffit que les enfants sachent utiliser correctement l'addition. La soustraction sera introduite au Cours Élémentaire.

Multiplication

Exemple : On réunit 7 collections qui comprennent chacune 8 objets.



Le nombre de tous les objets est alors :

$(8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8)$ ou $(7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7)$

Par convention, ce nombre peut être écrit indifféremment :

(8×7) ou (7×8).

C'est le produit des nombres 8 et 7.

Dans les expressions précédentes, le signe « $\times$ » se lit « multiplié par ».

Les deux expressions (8×7) et (7×8) désignent le nombre de tous les objets. On constate que ce nombre est 56 donc : $(8 \times 7) = 56$ ou $(7 \times 8) = 56$ ce que l'on écrit plus simplement $8 \times 7 = 56$ ou $7 \times 8 = 56$.

La multiplication est l'opération qui associe à deux nombres leur produit.

Ainsi, aux couples (8; 7) et (7; 8) la multiplication fait correspondre le même nombre

$8 \times 7 = 7 \times 8$ (la multiplication est commutative).

Remarquons que

1^0 $7 \times 1 = 1 \times 7 = 7$; $\quad 3 \times 1 = 1 \times 3 = 3$; etc...

2^0 $7 \times 0 = 0 \times 7 = 0$; $\quad 1 \times 0 = 0 \times 1 = 0$; etc...

Tables

Aux tables tarditionnelles, on préferera des tables de Pythagore construites par les élèves avec des nombres divers (sans oublier les lignes et colonnes qui comprennent 0 et 1).

Exemples :

+	2	5	8	4
7	9	12	15	11
0	2	5	8	4
6	8	11	14	10
3	5	8	11	7

×	0	7	2	5	3
6	0	42	12	30	18
1	0	7	2	5	3
4	0	28	8	20	12
3	0	21	6	15	9

La construction de telles tables facilite l'apprentissage et la mémorisation de sommes et de produits indispensables au calcul. On construira notamment les tables d'addition et de multiplication dans lesquelles les nombres placés en ligne et colonne sont ordonnés de 0 à 9.

Division exacte

Exemple : On a dénombré 56 objets en réunissant 7 collections qui comprenaient chacune le même nombre d'objets.

Il est naturel de désigner ce nombre par un signe (., □ ou une lettre quelconque) et d'écrire une égalité entre les deux expressions du nombre de tous les objets.

$$56 = 7 \times \square \text{ ou } 56 = \square \times 7$$

□ représente un nombre que l'on peut désigner directement par l'expression

$$(56 : 7) \text{ ou } (56/7)$$

La division est l'opération qui associe aux nombres 56 et 7 leur quotient exact (56 : 7).

Ce nombre s'écrit 8 d'où l'égalité (56 : 7) = 8 que l'on écrit plus simplement 56 : 7 = 8.

Cet exemple montre que la division exacte peut intervenir à propos d'un partage d'objets (lorsque les parts ont le même nombre). Mais son véritable sens découle de sa liaison avec la multiplication; les égalités :

$$56 = 7 \times \square$$
$$\square = 56/7$$

disent la même chose.

Remarque : □ représente un nombre naturel parce que 56 est un multiple de 7.

D'une façon générale, le quotient exact de deux nombres naturels n'existe que si le premier est multiple du deuxième.

Il ne faut donc désigner un quotient à l'aide d'un des signes « : » ou « / » que lorsque l'on sait que ce quotient existe.

Division euclidienne (division avec reste, ce reste pouvant être nul). Exemple : On veut distribuer équitablement 17 cerises entre 3 enfants. Existe-t-il un nombre x de cerises tel que chaque enfant reçoive x cerises et qu'il n'en reste plus ?

Formons la suite des produits (3 × 1); (3 × 2); (3 × 3) etc... Aucun de ces nombres n'est égal à 17 donc il est impossible de servir équitablement les enfants en utilisant toutes les cerises.

On constate que :

$$(3 \times 5) < 17 < (3 \times 6)$$

et aussi que $17 = (3 \times 5) + 2$

Cette dernière égalité montre que le plus grand nombre de cerises que l'on peut donner à chaque enfant est 5; 2 cerises ne sont pas distribuées.

La division euclidienne de 17 par 3 fait correspondre au couple de nombres (17; 3) le couple (5; 2).

5 est le quotient entier de 17 par 3;

2 est le reste de la division euclidienne de 17 par 3.

Remarque : Il est incorrect d'écrire $17 : 3 = 5$ car $17 : 3$ devrait représenter un quotient exact, or $5 \times 3 \neq 17$.

Par convention, on peut désigner le quotient entier de 17 par 3 par l'expression $(17 \div 3)$ ce qui donne le droit d'écrire :

$$17 \div 3 = 5$$

Suites d'opérations :

Additions successives — Somme de trois nombres.

Exemple : A partir des nombres 8, 7, 5, on calcule :

$(8 + 7)$ c'est-à-dire 15,

puis $((8 + 7) + 5)$ c'est-à-dire $(15 + 5)$.

On constate que ce nombre peut être obtenu par un autre mode de calcul, sans modifier l'ordre des nombres donnés (8, 7, 5).

On peut, en effet, calculer $(7 + 5)$ c'est-à-dire 12, puis $(8 + (7 + 5))$ c'est-à-dire $(8 + 12)$.

La somme des trois nombres 8, 7, 5 s'écrit $(8 + 7 + 5)$. On peut la calculer de l'une ou l'autre des deux manières précédentes.

(Cet exemple illustre une propriété de l'addition : l'associativité).

Multiplication successives : Produit de trois nombres

Exemple : On calcule (5×6) puis $((5 \times 6) \times 4)$ c'est-à-dire (30×4) ou bien (6×4) puis $(5 \times (6 \times 4))$ c'est-à-dire (5×24).

Les deux expressions ainsi écrites désignent en fait le même nombre Ceci peut être constaté en revenant à des collections d'objets.

Le produit des trois nombres 5, 6, 4 s'écrit $(5 \times 6 \times 4)$. On peut le calculer de l'une ou l'autre des deux manières indiquées.

(Cet exemple illustre le fait que la multiplication est associative).

Addition et multiplication

Exemple : Calculer $(2 + 5)$ puis $((2 + 5) \times 3)$ c'est-à-dire (7×3)

Peut-on obtenir le même résultat d'une autre façon ?

On constate que ce nombre est le même que la somme

$((2 \times 3) + (5 \times 3))$ c'est-à-dire $(6 + 15)$.

(Cet exemple illustre une nouvelle propriété de ces opérations : la multiplication est distributive par rapport à l'addition).

Le fait de pouvoir désigner et calculer un nombre de plusieurs façons différentes, est donc une conséquence des propriétés essentielles de l'addition et de la multiplication que nous venons de signaler au passage : commutativité et associativité de l'addition et de la multiplication, distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Il n'est nullement question de vouloir *nommer* de telles propriétés au niveau élémentaire. Mais il est important de faire en sorte que les enfants les utilisent de façon naturelle et familière, parce qu'elles sont à l'origine de tous les modes de calcul : calcul mental et techniques usuelles.

Techniques opératoires

Il est indispensable que les techniques usuelles concernant les opérations soient parfaitement connues. Elles ne seront pas apprises par les enfants de façon purement mécanique, mais découvertes par eux-mêmes comme synthèse d'expériences suffisamment variées et nombreuses.

1.5. Nombres décimaux

Les nombres décimaux sont introduits au cours moyen; à ce niveau, les enfants savent écrire et nommer les nombres naturels à partir de groupements d'objets d'une collection (cf. § 1.2.).

Au lieu d'écrire le nombre de tous les objets, on peut chercher à écrire le nombre des groupements d'une certaine espèce.

Exemple 1 : le nombre d'habitants de la France est cinquante millions. Si l'on imagine une répartition des Français en groupements comprenant chacun un million d'habitants, le nombre de ces groupements s'écrit 50. Il exprime la population de la France, le million étant choisi comme unité.

Si les groupements choisis comprennent cent habitants, la population s'exprime par le nombre qui s'écrit : 500 000.

Si les groupements ne comprennent qu'un seul habitant, la population s'exprime par le nombre qui s'écrit : 50 000 000.

Exemple 2. La population de l'agglomération de Romorantin compte 10 850 habitants. Le *millier* étant choisi comme unité, la population s'exprime par le *nombre décimal* 10,850.

La virgule est utilisée pour repérer le rang du groupement choisi comme unité.

D'autres exemples pourront être trouvés à l'occasion d'exercices de mesure utilisant le système métrique.

On remarquera qu'à tout nombre naturel exprimant une mesure on peut associer, par un changement d'unité convenable un nombre décimal et qu'à tout nombre décimal on peut associer, par un changement d'unité, un nombre naturel (et ce de diverses façons).

Les opérations sur les décimaux reviennent donc aux opérations de même nom sur les nombres naturels associés.

Relations numériques : tableaux de nombres

Exemple : 1. On choisit une liste de nombres naturels

3, 9, 14, 25, 17

A chacun de ces nombres on additionne 4.
On construit ainsi une deuxième liste de nombres déduite de la première

7, 13, 18, 29, 21

On peut disposer ces deux listes en utilisant un tableau mettant en évidence la correspondance terme à terme

additionner 4	↓	3	9	14	25	17
		7	13	18	29	21
						↑ soustraire 4

La consigne « soustraire 4 » fait correspondre à tout nombre de la deuxième liste un nombre de la première liste.
Cas particulier : « Additionner 1 — Soustraire 1 »

additionner 1	↓	4	0	1	7	2	9
		5	1	2	8	3	10
							↑ soustraire 1

A chacun des nombres de la première liste, la consigne « additionner 1 » fait correspondre son *successeur* dans la suite des nombres naturels (0, 1, 2, 3, 4, . . .).

A chacun des nombres de la deuxième liste, la consigne « soustraire 1 » fait correspondre son *prédécesseur* dans la suite des nombres naturels.

Pour construire des tableaux de nombres, on peut utiliser d'autres consignes telles que « multiplier par . . . » « diviser par . . . » (division exacte quand elle est possible).

2. Connaissant la consigne qui fait passer de la première à la deuxième liste, on peut chercher un élément manquant dans l'une ou l'autre de ces listes, connaissant l'élément correspondant à l'autre :

multiplier par 5	↓	7	12	100	
		35	42	65	↑ diviser par 5

Remarque : on s'aperçoit qu'aucun nombre ne correspond à 42 (42 n'est pas multiple de 5).

3. Connaissant un couple d'éléments correspondants, trouver les consignes de l'un des quatres types précédents (additionner...; soustraire...; multiplier par...; diviser par...) qui font passer d'une liste à l'autre.

7	5 4
↓ 14	8

(deux consignes possibles : additionner 7; multiplier par 2).

4. Connaissant deux couples correspondants de deux listes, trouver *la* consigne de l'un des 4 types précédents qui fait passer d'une ligne à l'autre

7	5 4
↓ 14	10 8

(la seule consigne possible est multiplier par 2).

Lorsque la consigne est « multiplier par » ou « diviser par », les exercices sur les tableaux de nombres correspondent à l'étude de la proportionnalité. Dans l'ensemble des problèmes traités au cours moyen, on rencontre les thèmes suivants : recherche de

— prix à payer pour une certaine longueur de ruban, connaissant le prix pour une longueur déterminée de ce ruban;

— poids correspondant à un certain volume de matière homogène sachant le poids pour un volume connu de cette matière;

— prix d'un terrain connaissant le prix de l'hectare;

— distance parcourue en un temps donné connaissant le temps mis pour effectuer un trajet déterminé, dans le cas d'un mouvement uniforme;

— pourcentage;

— rendement;

— crédit;

— échelle;

etc...

Il est essentiel de savoir qu'il s'agit d'un seul et même problème, qu'il convient d'expliquer en termes nouveaux. D'une façon générale, tous les problèmes traités au moyen de la « règle de trois » relèvent du modèle mathématique précédent.

Exemples : 1) Pour une fête, des enfants font des colliers composés tous du même nombre de perles. Un enfant a utilisé 45 perles pour faire 3 colliers.

colliers	perles
3	45
6	.
.	135

Le tableau ci-contre permet de répondre aux deux questions :

— Combien faut-il de perles pour fabriquer 6 colliers ?

— Combien de colliers peut-on fabriquer avec 135 perles ?

Il suffit en effet

1° de chercher la consigne qui fait passer de la première à la deuxième colonne (c'est-à-dire « multiplier par 15 » (la situation étant une situation « multiplicative », la consigne ne peut être « additionner 42 »);

2° Calculer 6×15;

3° Calculer $135/15$;

2) On sait que 5 centimètres sur une carte représentent 10 kilomètres sur le terrain.

— A quelle distance sur le terrain correspond une distance de 18 centimètres sur la carte ?

— A quelle distance correspond sur la carte une distance de 32 kilomètres sur le terrain ?

Le tableau suivant permet de répondre aux questions :

distance sur la carte en centimètres	5	18	.
distance sur le terrain en kilomètres	10	.	32

La consigne qui fait masser de 5 à 10 est « multiplier par 2 » ce qui permet de trouver le correspondant de 18 dans la deuxième ligne soit (18×2) c'est-à-dire 36 et le correspondant dans la première ligne de 32, soit $(32/2)$ c'est-à-dire 16.

On peut donner maintenant les réponses en langage courant :
18 centimètres sur la carte correspondent à 36 kilomètres sur le terrain, 32 kilomètres sur le terrain sont représentés par 16 centimètres sur la carte.

3) On considère une série de rectangles de même largeur mesurée par le nombre 4 et de longueurs différentes.

Un quadrillage permet de déterminer les aires de ces rectangles en prenant comme unité d'aire le carré de côté 1 (cf. 3, mesure).

Nous pouvons construire le tableau de correspondance entre la longueur et l'aire de ces rectangles De façon générale si la longueur, l'unité étant choisie comme il est dit plus haut, est x, l'aire (l'unité étant déterminée comme plus haut) est $4\ x$.

longueur	aire
2	8
3	.
5	.
.	24
.	36
.....	
x	$4\ x$

Nous pouvons constater sur les tableaux précédents les propriétés suivantes :

1° Exemple 1 — multiplier par 15 →

3	45
6	90
9	135

Exemple 2 — multiplier par 4 →

2	8
3	12
5	20

Remarquons que :
dans le 1er tableau $3 + 6 = 9$; $45 + 90 = 135$
dans le 2e tableau $2 + 3 = 5$; $8 + 12 = 20$.

De façon générale, à la somme de deux nombres de la première colonne correspond la somme des nombres associés de la deuxième colonne.

Ceci peut être représenté par le tableau :

multiplier par a →

x	$(x \times a)$
y	$(y \times a)$
$x + y$	$(x \times a) + (y \times a)$

2° Exemple 1 — multiplier par 15 →

3	45
9	135

9 et 135 peuvent être obtenus en multipliant respectivement 3 et 45 par 3

Exemple 2 — multiplier par 4 →

3	12
6	24

6 et 24 peuvent être obtenus en multipliant respectivement 3 et 12 par 2

Ceci peut être représenté de façon générale par le tableau suivant :

multiplié par x →

multiplier par y ↓

m	$(m \times x)$
$(m \times y)$	$(m \times x) \times y$

au produit par y d'un nombre quelconque m de la première colonne correspond le produit par y du nombre de la deuxième colonne associé à m.

Suites d'additions et de soustractions

Exemple 1

4	9	11
7	12	14
9	14	16
	⟶ add. 5	⟶ add. 2

On peut passer directement de la première à la troisième colonne en additionnant 7 à chacun des nombres de la première colonne.

$$(7 = 5 + 2)$$

Exemple 2

8	6	3
5	3	0
4	2	
2		
	⟶ soustr. 2	⟶ soustr. 3

On peut passer directement de la première à la troisième colonne en soustrayant 5 à chacun des nombres de la première colonne (ce qui est possible si ces nombres sont égaux ou supérieurs à 5).

$$(5 = 2 + 3)$$

Exemple 3

5	8	4
8	11	7
2	5	1
	⟶ add. 3	⟶ soustr. 4

On peut passer directement de la première à la troisième colonne en soustrayant 1.

$$(1 = 4 - 3)$$

Exemple 4

5	9	6
8	12	9
2	6	3
	⟶ add. 4	⟶ soustr. 3

On peut passer directement de la première colonne en additionnant 1 à chacun des nombres de la première colonne.

$$(1 = 4 - 3)$$

Suites de multiplications et de divisions exactes

Exemple 1

3	6	18
5	10	30
4	8	24
	⟶ mult. par 2	⟶ mult. par 3

On peut passer directement de la première à la troisième colonne en multipliant par 6.

Remarquons que les résultats de la troisième colonne auraient été les mêmes si on avait d'abord multiplié par 3 puis si on avait multiplié le résultat par 2.

Exemple 2

36	12	3
24	8	2
48	16	4
	⟶ div. par 3	⟶ div. par 4

On peut passer directement de la première à la troisième colonne en divisant par 12.

Remarquons que les résultats de la troisième colonne auraient été les mêmes si on avait d'abord divisé par 4 puis si on avait divisé le résultat par 3.

Exemple 3

1	10	5
7	70	35
0	0	0
4	40	20
	⟶ mult. par 10	⟶ div. par 2

On peut passer directement de la première à la troisième colonne en multipliant par 5 (10 est multiple de 2).

Exemple 4

4	12	1
12	36	3
24	72	6
16	48	4
	⟶ mult. par 3	⟶ div. par 12

On peut passer directement de la première à la troisième colonne en divisant par 4 (12 est multiple de 3).

Exemple 5

35	210	21
5	30	3
15	90	9
20	120	12
⟶		⟶
mult. par 6		div. par 10

Il n'est pas possible de passer directement de la première à la dernière colonne en multipliant ou divisant par un nombre naturel :
6 n'est pas multiplie de 10;
10 n'est pas multiple de 6.

Fractions comme opérateurs

Par définition du symbole (6/10), dans l'exemple 5, on peut passer de la piemière à la troisième colonne en *multipliant* chaque nombre par (6/10) On dit que (6/10) est une fraction.

D'une façon générale, x et y désignant des nombres naturels, $y \neq 0$, *multiplier par* (x/y) revient à multiplier par x puis diviser le résultat par y. Remarquons que [multiplier par (2/10)] est équivalent à [multiplier par 0,2]

Exemple 6.1

12	84	21
24	168	42
4	28	7
16	112	28
⟶	⟶	
mult. par 7	div. par 4	

Exemple 6.2

12	3	21
24	6	42
4	1	7
16	4	28
⟶	⟶	
div. par 4	mult. par 7	

On constate qu'à partir de la même première colonne, on obtient la même troisième colonne
— en multipliant par 7 puis en divisant le résultat par 4 ou
— en divisant par 4 puis en pultipliant le résultat par 7.

Dans les deux cas, on a multiplié par (7/4).

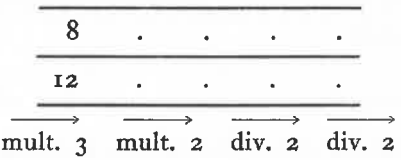
Remarquons que les calculs sont plus faciles dans l'exemple 6.2.

Opérateurs équivalents

Exemple 7

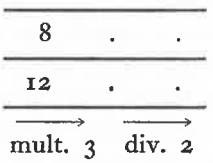
8	.	.
12	.	.
⟶		⟶
mult. 6		div. 4

Ce tableau peut être décomposé de la façon suivante



multiplier par 2 puis diviser par 2 est équivalent à mult (2/2), c'est-à-dire (mult. 1).

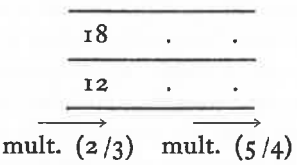
Le tableau se réduit à



On observe que mult. (6/4) est équivalent à mult. (3/2).

Produit d'opérateurs

Exemple 8



Par définition :
mult (2/3) est équivalent à la suite mult. 2, div. 3;
mult (5/4) est équivalent à la suite mult. 5, div. 4;
donc la suite mult. (2/3), mult. (5/4) est équivalent à la suite mult. 2, div. 3, mult. 5, div. 4. On sait aussi que la suite div. 3, mult. 5 est équivalente à la suite mult. 5, div. 3. La suite mult. (2/3), mult. (5/4) est donc équivalente à la suite mult. 2, mult. 5, div. 3, div. 4; ce qui donne, en composant la suite, mult. 10, div. 12 ou mult. (10/12).

Donc la suite mult. (2/3), mult. (5/4) est équivalent à mult. (10/12).

On peut constater que mult. (10/12) est équivalent à mult. (5/6);
donc la suite mult. (2/3), mult. (5/4) est équivalent à mult. (5/6) :

Exemple 9

La suite mult. (2/3), mult. (3/2) est équivalent à la suite mult. 2, div. 3, mult. 3, div. 2; div. 3, mult. 3 est une suite équivalente à mult. 1.

La suite précédente se réduit donc à la suite mult. 2, div. 2, elle-même équivalent à mult. 1;
donc la suite mult. (2/3), mult. (3/2) est équivalente à mult. 1.

Dans le langage courant, on trouve des expressions telles que un quart d'heure, un demi-litre, avoir parcouru les trois quarts du chemin... L'emploi

de ces expressions qui utilisent le vocabulaire des fractions donne lieu à des calculs numériques où l'on retrouve les fractions comme opérateurs sur les nombres entiers naturels.

2. Exercices d'observation et travaux sur des objets géométriques

Ces exercices trouvent naturellement leur place dans les *activités d'éveil.* L'espace physique et les objets qui le peuplent fournissent une matière sur laquelle la pensée mathématique a bien des occasions de s'exercer. Ces exercices doivent, en même temps aider l'enfant à s'adapter à ce milieu. Ils font appel, non seulement à *l'observation* mais aussi à l'activité manuelle qui soutient, complète l'observation et l'étude des situations et des choses. L'enfant doit acquérir le goût de travaux manuels : tracer, dessiner, plier, découper pour *construire :* l'emploi des instruments (règle, équerre, compas...) pour la réalisation de ces constructions développera l'habileté et le soin.

On se devra de proposer aux enfants des thèmes et des buts d'activité à leur mesure et conformes à leur intérêt.

Il y aura souvent avantage à réaliser ces exercices en équipes.

Les démarches mathématiques porteront, comme dans le domaine numérique sur la découverte de propriétés, les classements selon telle ou telle propriété, l'étude de relations sur un objet ou entre des objets. On reconnaît :
— que deux lignes droites sont perpendiculaires ou forment un angle droit par un pliage convenable ou à l'aide de l'équerre;
— que deux lignes droites sont parallèles à l'aide de la règle et de l'équerre;
— qu'un polygone découpé dans du carton épais et rigide est convexe par exemple en l'entourant d'un élastique et constatant que cet élastique est en contact avec tous les sommets.

Pour un polygone, on peut s'intéresser aux propriétés suivantes : convexité, nombre de côtés, nombre de sommets, longueur de côtés, existence de côtés perpendiculaires, existence de côtés parallèles, etc...

Les enfants ayant construit différents polygones, ils pourront les classer selon l'une ou l'autre de ces propriétés : ainsi, s'il s'agit de quadrilatères ils distingueront par exemple, les parallélogrammes et parmi ceux-ci les rectangles, les losanges. Ils découvriront ainsi que les carrés sont les quadrilatères qui ont la propriété d'être à la fois des rectangles et des losanges.

Pour un polyèdre (tétraèdre, cube, parallélépipède, prisme, dodécaèdre etc...) on pourra s'intéresser à la nature des faces, à leur nombre ainsi qu'à celui des sommets et des arêtes etc... Dans ce but, les élèves à l'occasion du travail manuel construiront de tels objets géométriques, en carton par exemple.

3. Mesures : exercices pratiques

A l'école primaire, l'idée de mesure sera toujours intimement liée à la pratique, à l'activité manuelle, à l'expérience, à l'étude du milieu.

Le rôle du maître consistera à offrir aux enfants un vaste champ d'expé-

riences les amenant à ressentir le besoin de mesurer : longueurs à comparer, charges à évaluer, temps à estimer.

Pour exprimer une mesure, il faut choisir une unité : *la mesure est alors un nombre.*

Jusqu'au cours élémentaire, on ne connaît que les nombres naturels; à partir du cours moyen, on peut utiliser les nombres décimaux. Une unité de mesure étant choisie, on pourra trouver un encadrement d'une mesure.

Les unités seront d'abord celles que proposeront les enfants. La nécessité de la communication des résultats des mesures amènera à choisir, pour tous les élèves de la classe, pour tous les groupes d'enfants travaillant en équipe, la même unité. On arrivera ainsi peu à peu à l'utilisation des unités légales.

Une mesure étant un nombre, les opérations sur les nombres seront naturellement utilisées dans les exercices sur les mesures.

Exemples :

1) On met bout à bout deux règles dont les longueurs, l'unité étant le centimètres, sont 12 et 5, pour former une barre.

On n'écrira pas : longueur de la barre

$$12 \text{ cm} + 5 \text{ cm} = 17 \text{ cm};$$

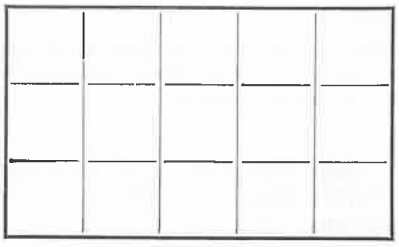
mais : le centimètre étant l'unité, la longueur de la barre est $(12 + 5)$

$$12 + 5 = 17;$$

le centimètre étant l'unité, la longueur de la barre est 17;
ou, en langage courant, la longueur de la barre est 17 centimètres.

2) Aire (mesure de la surface) d'un rectangle.

On construit un rectangle dont les côtés ont pour longueur 5 et 3 (l'unité étant le centimètre).



Le rectangle se décompose naturellement en (5×3) carrés qui ont tous 1 centimètre de côté. Si on choisit un de ces carrés (que l'on appelle centimètre carré) comme unité d'aire, l'aire du rectangle est (5×3)

$$5 \times 3 = 15$$

Le centimètre carré étant l'unité, l'aire du rectangle est 15 ou, en langage courant, l'aire du rectangle est 15 centimètres carrés.

Annexes

N.D.L.R. — En annexe au texte précédent, il nous paraît intéressant de présenter :

ANNEXE 1. *Projet de programme adopté par la commission « Recherche et Réforme » de l'A.P.M.E.P. à partir d'un projet élaboré par le Service de la Recherche Pédagogique de l'Institut Pédagogique National. Il nous paraît indispensable de faire connaître à tous ceux qui s'engagent ou s'engageront dans la « première étape » les perspectives ouvertes par celle-ci.*

Perspectives.

L'enseignement de notions mathématiques au niveau élémentaire a un double objectif : favoriser une bonne structuration mentale, procurer aux enfants un outil intellectuel utilisable dans les situations les plus diverses qu'ils rencontreront au cours de leur existence.

Dans cette perspective l'acquisition de ces notions ne peut être faite par un enseignement dogmatique. Il est indispensable que les enfants tirent de leur propre expérience les notions sur lesquelles ils pourront bâtir peu à peu des structures mathématiques cohérentes.

A chaque étape, la pratique d'activités convenablement choisies conduit à la formation de l'esprit et à la *découverte* de techniques. Cette découverte résulte de la compréhension et de l'utilisation préalables des notions mathématiques sous-jacentes. En particulier, des jeux dont les règles sont, soit proposées par le maître, soit inventées par les enfants, constituent un moyen efficace d'introduire ces notions mathématiques.

A tous les niveaux, les enfants découvrent et utilisent diverses représentations pour :

— décrire des situations;

— organiser des informations puisées dans le contexte de la vie scolaire, familiale, sociale (en particulier des « matériaux » peuvent être trouvés dans l'étude de la langue et dans les matières d'éveil).

1. Rubriques sur lesquelles porteront les activités mathématiques pratiquées au niveau élémentaire.	Ces notions ne peuvent être raisonnablement explicitées avant le :
1 — Logique liaison avec un travail sur des ensembles	C.P — et, non C.E. — ou C.M. — « si .. alors » — « tout » — « pas tout » — « tien » — « pas rien»
2. — Relations	C.P. — travail sur des couples C.E. — partitions — composition de relations

	C.M. — applications — ordre, équivalence
3. — Notion de cardinal	C.P. — Activités pré-numériques : — correspondances terme à terme — autant que, plus que, moins que (en utilisant les correspondances terme à terme) — codage
4. — Codage de cardinaux : numération. Codage d'ordinaux (numérotation).	C.P. — Groupements suivant certaines bases (3, 4, 5, 2...) — Notion d'échange — Codage numérique du résultat de groupements et d'échanges — décodage — comparaison de cardinaux en utilisant des codes C.E. — changement de base C.M. — ordre sur les codes de cardinaux — jeux utilisant des processus récursifs — introduction de la notation exponentielle — numérotation
5. — Opérations sur les cardinaux (en liaison avec les opérations sur les ensembles)	C.P. — addition C.E. — soustraction — multiplication C.M. — division
Techniques opératoires (comme application de la découverte des propriétés des opérations et de l'utilisation de la numération de position)	A tous les niveaux : calcul mental
6. — Nombres à virgule	C.M. — en utilisant différentes bases de numération — opérations sur les nombres à virgule
7. — Relations numériques	C.E.1 — « machines » à additionner et soustraire C.E. 2 — « machines » à multiplier et diviser C.E. — chaînes de machines — réduction de chaînes — chaînes équivalentes C.M. — être multiple de — être diviseur de — découverte de la notion de nombre premier — congruences — applications linéaires
8. — Algébrisation de situations conduisant à certaines structures mathématiques	C.P. — activités préparatoires : jeux combinatoires C.E. — exemples concrets de structures construites sur des ensembles finis C.M. — « dictionnaires » (isomorphisme)

9. — Organisation de l'espace	C.P. — repérage sur des réseaux — topologie-labyrinthes, intérieur, extérieur, ouvert, fermé, frontière — à droite de, à gauche de, au-dessous de, au-dessus de, à l'avant de, à l'arrière de C.E. — déplacement sur un réseau codage et décodage de déplacements — relations d'incidence « borde », « est adjacent à », « est sur » etc.) — jeux sur des graphes avec flèches C.M. — reproduction d'un dessin d'un réseau sur un autre — transformations : symétries, translations, homothéties
10. — Mesure	C.E. (fin) : travaux pratiques entrant dans le cadre des activités d'éveil (conduite d'une expérience, compte rendu d'une expérience, étude du milieu) C.M. — mesure sur fond de quadrillage
11. — Représentations	C.P. — Schématisation de situations par des diagrammes, ensembles de flèches, tableaux C.E. — Exploitation de schémas C.M. — Arbres

2. Présentation du libellé du programme

1° Dans l'approche d'un concept, il y a différentes étapes telles que :

— sensibilisation par des activités diverses;

— familiarisation à l'aide d'exemples et de contre-exemples suffisamment nombreux;

— représentations diverses et prise de conscience;

— imagination d'autres situations analogues;

— explication éventuelle.

2° Un concept mathématique étant toujours lié à d'autres concepts, se réfère à plusieurs rubriques au sein desquelles le travail doit donc être mené simultanément.

3° Il s'ensuit pour les maîtres l'obligation de suivre le rythme des enfants. Aussi les étapes ne peuvent-elles être fixées de façon précise pour chaque niveau.

C'est pourquoi le programme présente :

a) Une liste de rubriques dont l'ordre n'est pas significatif, ce qui laisse aux maîtres une grande liberté dans le choix et la conduite des activités à proposer aux élèves.

b) Une information à propos de chacune de ces rubriques concernant l'explicitation éventuelle aux différents niveaux, de qui implique aux niveaux précédents les étapes préliminaires de sensibilisation, familiarisation, etc.

En effet, l'explicitation prématurée et apportée de l'extérieur peut contrarier la compréhension.

ANNEXE 2. *Nouveau programme et nouvelle organisation pour la formation des maîtres.*

Nous publions ici le texte du rapport adopté par la Commission ministérielle sur l'enseignement des mathématiques, le 16 juin 1969 :

La formation initiale en mathématique des maîtres de l'enseignement élémentaire.

1. La mathématique comme instrument de culture

La mathématique
— en ce qu'elle est un outil de raisonnement,
— en ce qu'elle constitue une méthode de pensée et d'action,
— grâce au rôle privilégié qu'elle joue dans l'intelligence que nous avons du réel de quelque nature qu'il soit,
est un des éléments essentiels de la culture de l'homme contemporain.

Le bagage intellectuel de chacun doit donc comporter un minimum de notions fondamentales de mathématique. Par ailleurs, ce bagage ne doit pas consister, si l'on désire qu'il soit réellement moyen de culture, uniquement en une connaissance formelle de certaines structures mathématiques de base, il doit permettre de comprendre le rôle particulier joué par les mathématiques dans l'appréhension du monde dans lequel nous vivons et la maîtrise d'un certain nombre de ses phénomènes. Dans cette perspective, il est nécessaire d'abord de mathématiser des situations réelles. De leur comparaison se dégagera la notion de structures isomorphes puis de structure abstraite.

Ceci justifie déjà, pour tout futur maître de l'enseignement élémentaire, la nécessité d'une solide formation mathématique au niveau de l'Université : celui qui a une responsabilité dans la formation de l'esprit des enfants doit, plus que tout autre, disposer pour lui-même de ce bagage minimum sans lequel il serait un sous-développé intellectuel dans le monde de demain.

2. La mathématique dans la formation professionnelle du futur maître

Dans le cadre de la réforme de l'enseignement des mathématiques, une importante mutation de l'enseignement au niveau élémentaire est nécessaire. Cette nécessité s'impose tant sur le plan des contenus que sur le plan des méthodes : les expériences entreprises depuis 5 ans montrent que l'enseignement élémentaire prend toute sa valeur de formation de l'esprit, donnant à chacun — quel que soit le contexte socio-culturel dans lequel il vit — son développement optimum
— lorsqu'il permet de prendre conscience des possibilités de création, de maîtrise des situations proposées;
— lorsqu'il donne l'occasion de constater que plusieurs situations diverses en apparence, relèvent en fait d'un même modèle, ont même structure;
— lorsqu'il donne un moyen d'organiser les informations éparses et d'en tirer parti.

Par leur nature même, les mathématiques sont un moyen de choix pour atteindre de tels objectifs. Mais il est bien évident que ces objectifs ne seront réalisés qu'à la seule condition d'utiliser des méthodes

— suscitant l'initiative des élèves;
— développant leurs capacités d'invention;
— acceptant des solutions diverses (même si elles ne sont pas celles qui apparaissent les plus simples à l'adulte);
— permettant à chacun par un travail individualisé de progresser au rythme qui lui est propre.

Or, ce changement de méthode (faire découvrir et non transmettre des connaissances d'une manière pré-organisée) nécessite pour le maître de dominer de façon très sûre la matière qu'il enseigne : il n'est pas possible de tirer parti d'une suggestion d'un élève si l'on ne voit pas de façon immédiate les prolongements possibles de cette suggestion. Le maître ne doit donc pas recevoir seulement une formation lui donnant la possession des bases mathématiques des notions qu'il doit faire acquérir à ses élèves mais aussi une formation telle qu'il domine les prolongements de ces notions (c'est ainsi que dans le programme proposé certaines notions telles que celle de produit scalaire, de continuité et de limites pourraient paraître inutiles dans la perspective où l'on considèrerait qu'il suffit que le maître connaisse ce qu'il doit enseigner).

Un maître n'aura de liberté vis-à-vis de ce qu'il enseigne et en conséquence ne pourra accorder une autonomie à ses élèves qu'à la condition de dominer la matière enseignée. Cela nécessite en particulier *une réflexion sur la mathématique elle-même.* En effet, dans une perspective d'enseignement, l'acquisition des notions fondamentales de base est insuffisante : le maître ne doit pas être seulement quelqu'un qui sait calculer, bien résoudre des problèmes, qui sait reconnaître dans une situation telle ou telle structure, il doit être capable d'une réflexion sur la mathématique qu'il connaît, avoir pris conscience des relations que les structures mathématiques entretiennent entre elles : les différentes rubriques du programme ne doivent pas être perçues comme juxtaposées. Une telle réflexion permettra en particulier au maître, quelle que soit la classe dans laquelle il enseigne, d'avoir pleinement conscience de la place du jalon qu'il est en train de poser, elle pourra s'appliquer, par exemple, aux propriétés des structures construites sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, bien qu'elles ne figurent pas explicitement au programme.

3. Organisation de l'enseignement

L'Enseignement Supérieur doit assumer la responsabilité de la formation théorique.

Une coopération étroite doit exister entre le professeur de l'École Normale chargé de la formation professionnelle et le professeur de l'Enseignement Supérieur chargé de la formation théorique. En particulier, les professeurs d'École Normale devraient pouvoir participer aux cours faits à l'Université afin de pouvoir reprendre avec leurs élèves des applications des notions théoriques présentées et préparer leur insertion dans l'enseignement élémentaire.

De même, les responsables de l'Enseignement Supérieur devraient pouvoir assister — ou mieux participer à des classes ou à des équipes de travail de maîtres déjà en exercice.

4. Remarques sur le programme

Ce programme a été élaboré, compte tenu du fait de l'origine actuelle des élèves (Terminale A). Il est conçu comme une formation initiale permettant de tirer le parti le plus fructueux d'une formation continue ultérieure.

En particulier aucune place n'a été faite à une approche de la pensée informatique dont nous savons pourtant qu'elle est nécessaire à la formation des maîtres.

Il faut toutefois remarquer que la situation actuelle est transitoire : le nouveau programme des classes de deuxième cycle fournira dans trois ans des étudiants déjà bien familiarisés avec une partie non négligeable du programme proposé. Il faudra tenir compte de cet acquis sans quoi le programme proposé actuellement n'apparaîtrait pas comme apportant des notions nouvelles et perdrait une partie de son intérêt; il sera donc nécessaire de revoir ce programme d'ici là :

1° afin de reprendre les rubriques actuelles et d'en modifier éventuellement le contenu;

2° afin d'envisager l'introduction de rubriques nouvelles - telles que des notions d'informatique.

5. Programme de mathématique pour la formation initiale des maîtres de l'enseignement élémentaire

Le programme est rédigé pour 2 heures hebdomadaires d'enseignement assuré par l'Université et 1 heure et demie hedbomadaire d'enseignement assuré par l'École Normale pendant 2 ans de 32 semaines chacun.

Compte tenu des 24 semaines consacrées aux stages d'observation, au stage en situation et au stage à l'étranger, cela fait donc 3 heures hebdomadaires assurées par l'Université pendant les 40 semaines de présence effective des étudiants.

Le programme est rédigé de façon succincte de manière à ce que le responsable ait une grande liberté pour l'organisation de son enseignement. Afin d'obtenir une véritable formation, il sera nécessaire de ne pas se contenter d'un enseignement magistral. Le travail consistera à fournir les connaissances et des applications de celles-ci et à s'assurer que les connaissances sont effectivement acquises.

1. *Logique et ensembles finis*

Ensembles finis. Cardinaux. Parties d'un ensemble fini.

Relation. Relation d'équivalence; ensemble quotient; partition d'un ensemble fini.

Applications et dénombrements associés.

Connecteurs logiques; opérations logiques et opérations sur les ensembles; algèbre de Boole finie.

Notions sur l'utilisation des quantificateurs.

2. *Ordres*

Préordre.
Ordre partiel. Treillis.
Exemples d'ordres totaux.

3. *Algèbre*

Monoïde; relation d'équivalence compatible; monoïde quotient; monoïde ordonné.

Groupe; définition; groupe opérant sur un ensemble; groupes ordonnés; groupes cycliques; générateurs d'un groupe.

Exemples d'homomorphisme de groupes.

Anneaux; anneaux d'opérateurs. Corps.

Analyse des structures de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$.

Systèmes de numération, anneau ordonné des nombres à virgule.

Divisibilité et congruences dans $\mathbb{Z}$.

4. *Algèbre linéaire*

Espace vectoriel de dimension finie. Base. Sous-espace.

Application linéaire, matrices, exemples de calcul sur les $n \times p$ matrices notamment pour $n < 3$ et $p < 3$.

Somme directe et projections.

Produit scalaire et norme associée.

Notion d'espace affine.

5. *Fonctions numériques*

Réflexion sur les propriétés fondamentales de $\mathbb{R}$ (la construction de $\mathbb{R}$ ne sera pas traitée).

Application linéaire.

Continuité et limites de fonctions numériques.

Exemples de fonctions numériques (notamment fonctions en escalier, fonctions affines par morceau).

6. *Mesure et Probabilités*

Mesure définie sur une famille de parties d'un ensemble; additivité; encadrement.

Dans les cas finis, algèbre des événements; notion de probabilité.

6. Moyens à mettre en œuvre pour la formation initiale des maîtres

1° L'Enseignement Supérieur devant assumer la responsabilité de la formation théorique, il faut donc que soient créés des postes de maîtres-assistants en quantité suffisante pour que le travail correspondant constitue une partie du service normal du personnel que l'assurera. Cela correspond à 1/2 service de maître-assistant par École Normale, soit 85 postes.

2° Le temps de travail consacré par le professeur d'École Normale à la mise au point d'une collaboration efficace entre l'École Normale et l'Université (participation au cours, élaboration d'exercices d'application des notions théoriques) doit faire partie du Service des professeurs d'École Normale : cela nécessiterait, dans les conditions actuelles, la création d'une quarantaine de postes de professeurs agrégés. Ce problème serait d'ailleurs en partie résolu si les classes de baccalauréat étant supprimées dans les Écoles Normales, tout le personnel enseignant de mathématique était affecté à la formation professionnelle de *tous* les futurs maîtres de l'enseignement du premier degré.

ANNEXE 3.

Bibliographie - Documentation

Les Collègues qui mettront en pratique les recommandations de la Commission Ministérielle pourront souhaiter une information mathématique complémentaire ou confronter leurs travaux avec ceux d'autres Collègues engagés comme eux dans la mise en œuvre de la réforme. Nous leur proposons :

1. — de prendre contact avec les Régionales de notre association; nombreuses

sont celles qui organisent des équipes de travail (clubs mathématiques, chantiers de pédagogie mathématique, etc.) et qui publient des bulletins (voir 3.1.);

2. — de prendre contact avec les Instituts de Recherche sur l'Enseignement Mathématique (I.R.E.M.) là où ils existent c'est-à-dire Besançon, Bordeaux, Lyon, Marseille, Rennes, Paris, Strasbourg; ils ont leur siège dans les facultés des Sciences de ces villes;

3. — de s'adresser de préférence, pour tout renseignement sur la réforme aux Collègues ayant participé, au titre de l'A.P.M.E.P., au travail de la Commission Ministérielle (voir en 3.3. leurs noms et adresses);

4. — de consulter et d'utiliser des ouvrages d'information édités spécialement à l'intention des maîtres par notre association ou ses régionales (voir 3.4.).

3.1. Les Régionales de l'A.P.M.E.P.

Dans chaque académie, il existe une section régionale de l'A.P.M.E.P. qui organise diverses activités pédagogiques et qui s'organise elle-même librement. En particulier, dans certains départements, des sections départementales se réunissent et sont rattachées à la Régionale de l'académie.

Pour chaque Régionale ou section, nous donnons le nom et l'adresse d'un responsable, président ou secrétaire, qui fournira des renseignements complémentaires sur les activités de l'association dans la région ou le département.

— *Aix-Marseille :* M^lle MABILLY, 136, bd National, 13-Marseille 3^e.
— *Amiens :* M. DUCEUX, 44, rue Gustave-Charpentier, 80-Amiens.
— *Besançon :* M. ROBBE, Les Prés-Cottreaux, 39-Salins-les-Bains, (Tél. 167).
Section de Belfort : M. DAUTREVAUX.
— *Bordeaux :* M. SIGNORET, lycée Montaigne, 33-Bordeaux.
— *Caen :* M. LETERRIER, 34, avenue du 6-Juin, 14-Caen.
— *Clermont-Ferrand :* M. ALMERAS, 74, bd de l'Eclache, 63-Royat.
— *Dijon :* M. VOGT, lycée Carnot, bd Thiers, 21-Dijon.
Section de Mâcon : M^me CHAUSSIER, 32, rue de la Liberté, 71-Mâcon.
Section de Nevers : M. J. DE JUNTER.
Sectin de Chalon : M. GANTHIER.
— *Grenoble :* M. KUNTZMANN, B.P. 7, 38-Saint-Martin-d'Hères.
Section de Chambéry : M. COMPAIN, lycée technique, 1, rue du Colourbier, 73-Chambéry.
— *Lille :* M. LEGRAND, professeur, lycée Faidherbe, 59-Lille.
— *Limoges :* M. CRUZ, 11, rue Lamartine, 87-Bellac.
— *Lyon :* M. ANGUENOT, 103, rue Pasteur, 69-Caluire.
Section de Saint-Étienne : M. VERSET, villa Epilog, rue H. Dunant, 42-Saint-Chamond.
— *Montpellier :* M. CALCINE, rue des Eglantiers, 34-Montpellier.
— *Nantes :* M. DES COGNETS, 11, rue Gl-de-Sonis, 44-Nantes.
— *Nancy :* M. B. MERCIER, 48, rue Jacques-Gruber, 54-Nancy.
— *Nice :*
— *Orléans :* M. HEUZÉ, dépt de mathématiques, faculté des sciences, 45-Orléans-la-Source.
Section de Montargis : M. KISTER, C.E.G. Pontonnière, 45-Châlette-sur-Loing.
Section de Tours : DELACHET, BASTIEN.
— *Paris :* M. HAMEAU, 38, avenue du Général-de Gaulle, 94-Vincennes, (Tél. 808-43-79).
— *Poitiers :* M. DEHAME, 22, avenue de la Libération, 86-Poitiers.
— *Reims :* M. THIERUS, 57, rue David, 51-Reims.

— *Rennes :* M. LE DILY, lycée technique Joliot-Curie, 35-Rennes.
Section de Brest : M. STEPHAN, collège naval, 29 N-Brest.
— *Rouen :* Mme METENIER, Faculté des sciences, 76-Rouen.
— *Strasbourg :* M. DE COINTET, 62, rue Diedriez, 67-Sélestat.
Section d'Allemagne Fédérale : Président, M. ALEXANDRE, proviseur, lycée de Fribourg; secrétaire, M. DEBU, lycée Charles-de Gaulle, S.P. 69037.
Section Mosellane : M. SCHNEIDER, 54 *bis*, rue de Theuleu, 57-Metz.
— *Toulouse :* M. FRAISSE, 8, rue des Glycines, 31-Toulouse.
— *Côte-d'Ivoire :* M. MATHURIN, B.P. 20 694, Abidjan.
— *Sénégal :* M. SEYNI NIANG, lycée Van-Valenhoven, Dakar.

3.2. Liste de Collègues qui ont participé aux travaux de la commission ministérielle

et qui acceptent de répondre à des demandes de renseignements.

Le nom est suivi ou de l'établissement où le Collègue enseigne ou de l'ordre d'enseignement dans lequel il exerce telle ou telle fonction :

M. Claude BLANZIN, professeur de C.E.G., 150, avenue Félix-Faure, Paris-15e.
M. CREPIN, IDEN. 94, av. de Locarno, 87-Limoges.
M. FORT, doyen de la faculté des sciences de Poitiers.
M. Claude HAMEAU, instituteur, 38, avenue du Général-de Gaulle, 94-Vincennes.
Mme JACQUEMIER, Directrice d'École Normale, 9, rue Jean-Bocq, 38-Grenoble.
Mme M.-A. TOUYAROT, professeur à l'École Normale de Caen, 30, avenue du 6-Juin, 14-Caen.

3.3. Bibliographie pour l'information des maîtres

Nous citons de préférence les ouvrages rédigés par des équipes de Collègues et édités par notre association à l'intention spéciale des maîtres (conditions de vente précisées ensuite).

ÉDITIONS DE L'A.P.M.E.P. : pour se les procurer, envoyer les trois volets d'un virement postal au compte de l'A.P.M.E.P., Paris 5078-21 sous enveloppe timbrée, en précisant bien les ouvrages commandés, à M. André Blondel, 154, avenue Marcel-Cachin, 92-Chatillon-sous-Bagneux.

La Mathématique parlée par ceux qui l'enseignent dictionnaire sur fiches par la Commission du Dictionnaire de l'A.P.M.E.P. (prix 20 F).

Charte de Chambéry : les perspectives de la réforme, 32 p., prix 2 F.

Bulletin de l'A.P.M.E.P. servi aux adhérents de l'A.P.M.E.P., (cotisation annuelle 22 F), six numéros par année civile (environ 500 pages). Demander un bulletin d'adhésion.

ÉDITIONS DE LA RÉGIONALE PARISIENNE DE L'A.P.M.E.P. : même procédure pour se procurer les ouvrages mais virements au compte de la Régionale Parisienne de l'A.P.M.E.P., Paris 25 108 63.

Initiation à la mathématique de base, par Jean Sauvy et les compagnons du Chantier Balard, un volume de 216 p. avec exercices corrigés, prix 10 F.

Chantiers de Pédagogie Mathématique, bulletin de la Régionale Parisienne, spécialement orienté vers la formation permanente des maîtres; six cahiers de 32 p. d'octobre 69 à mai 70; prix 10 F.

L'A.P.M.E.P. participe en outre à la diffusion de : *Apprentissage mathématique*, par Evariste Dupont, un volume cartonné de 248 p., prix 15 F.

Supplément au « Bulletin de l'A.P.M.E.P. » n° 269 — Juillet-Août 1969

Printed in France — *Le Directeur de la publication :* G. WALUSINSKI
FD - Imp. Alençonnaise, B. P. 57, 61-Alençon - Dépôt légal 1969 : 8.818 - C.P.P.P. 35.996