quotient, n. m.

1969-1/2

Etym.: Nombre qui exprime « combien de fois » (lat. *quoties*). C'est le sens élémentaire en mathématiques, mais il s'est considérablement élargi.

I. Sens général.

1.1. Si, dans un ensemble muni d'une opération notée multiplicativement (notation elle-même capable de très larges interprétations), on écrit l'équation, d'inconnue x, $a = bx$ (resp. l'équation, d'inconnue y, $a = yb$), n'importe laquelle de ses solutions peut être appelée *quotient à droite* (resp. *quotient à gauche*) de a par b. Dans le cas plus particulier où, pour certains couples (a, b) au moins, ces deux équations ont une même solution unique, cette solution ou *quotient* est le composé de a et de b pour une opération généralement appelée *division* [DIVISION, 1, 2, 3, 4].

Si a est l'élément neutre pour la « multiplication » considérée, les solutions des équations précédentes sont appelées suivant les cas *inverse à droite*, *inverse à gauche*, ou *inverse* de b [INVERSE].

1.2. Dans certains anneaux, en l'absence de solutions du type précédent, on cherche parfois à en donner des valeurs approchées satisfaisant à des conditions adventices. Tel est le cas du *quotient euclidien* dans $\mathbb{Z}$ ou, plus généralement, du quotient à 10^{-n} près dans $\mathbb{Q}$, du *quotient croissant* ou du *quotient décroissant* dans l'anneau des polynomes [DIVISION, 5].

1.3. Une autre voie s'ouvre dans les anneaux intègres, celle de la construction systématique du *corps des quotients*, dans lequel les équations $a = bx$ ou $a = yb$ ont une solution pour tout b non nul, alors qu'elles n'en avaient pas en général dans l'anneau. C'est

ainsi qu'on construit le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels à partir de l'anneau $\mathbb{Z}$, le corps dit des « fractions rationnelles » à partir de l'anneau des polynomes, etc.

2. Application-quotient.

Soient f et g deux applications d'un même ensemble E dans les ensembles F et G respectivement. On montre qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe au moins une application h quotient *(à gauche)* de f par g, c'est-à-dire telle que $f = h \, o \, g$, est que

$$\forall (x', x'') \in \mathrm{E} \times \mathrm{E} \qquad ([g(x') = g(x'')] \Rightarrow [f(x') = f(x'')]).$$

D'autre part la restriction de h à l'ensemble-image $g < \mathrm{E} >$ est unique.

Si f et g sont linéaires, on montre qu'on peut trouver un quotient à gauche h linéaire; dans le cas des espaces de dimension finie, ceci conduit aux multiplicateurs de Lagrange.

3. Ensemble-quotient.

Une relation d'équivalence R ayant été définie sur un ensemble E, l'ensemble des classes d'équivalence s'appelle *ensemble-quotient* de E par R et se note $\mathrm{E/R}$ ou $\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}$.

Lorsque l'ensemble E est structuré, il peut en résulter une structure pour l'ensemble-quotient lui-même. Ainsi soit une loi de composition interne notée $\top$, définie sur E; on dit que cette loi et la relation d'équivalence R sont *compatibles* si

$$\forall (x, x', y, y'), \ ([x\mathrm{R}x' \text{ et } y\mathrm{R}y'] \Rightarrow [(x \top y)\mathrm{R}(x' \top y')])$$

et l'on peut alors définir sur $\mathrm{E/R}$ une loi de composition, soit $\top_{\mathrm{R}}$, telle que : $\mathrm{Cl_R}(x) \top_{\mathrm{R}} \mathrm{Cl_R}(y) = \mathrm{Cl_R}(x \top y)$. On dit dans ces conditions que la loi « *passe au quotient* » $\mathrm{E/R}$.

Par exemple dans le cas des groupes on peut définir à partir d'un

sous-groupe invariant une relation d'équivalence compatible avec la loi de groupe : l'usage est alors de parler du *groupe-quotient* du groupe par ce sous-groupe (plutôt que par la relation d'équivalence associée) [GROUPE]. De façon analogue on parle d'*anneau-quotient* d'un anneau par un de ses idéaux [IDÉAL]. Ainsi $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ désigne l'anneau-quotient de l'anneau $\mathbb{Z}$ par l'idéal $4\mathbb{Z}$.