Notions de partition; intersection; différence symétrique; complémentaire; fonction caractéristique

M. Dumont
Lycée international, Saint-Germain-en-Laye

L'introduction de nouvelles notions dans notre enseignement, introduction rendue nécessaire pour diverses raisons dont l'une, pédagogique, est souvent méconnue, ne peut se faire valablement que par un choix raisonné et une longue expérimentation de pédagogies diverses. Malheureusement, ces notions sont trop souvent retransmises aux élèves, quel que soit le niveau de ceux-ci, sous des formes pratiquement identiques à celles sous lesquelles les maîtres les ont reçues. Or l'élaboration d'une pédagogie concernant ces notions ne peut se faire en un an, voire plusieurs années. Nous assisterons donc, dans les années qui viennent, à une floraison d'ouvrages, de méthodes, de matériels plus ou moins valables. Il importe que chaque maître reste conscient de ce phénomène et sache faire un choix entre des matériels souvent coûteux, parfois insuffisamment analysés et une foule de matériels réalisables en classe, imaginés par le maître lui-même et de ce fait parfaitement adaptés à sa pédagogie.

Remarques préliminaires.

De toute évidence, un matériel ne vaut que par l'usage qu'on en fait. L'essentiel est : 1° d'en connaître les avantages et les inconvénients; 2° de savoir que ceux-ci n'ont pas un caractère absolu mais sont relatifs à un objectif bien déterminé. D'ailleurs, à la limite, un danger décelé à temps peut devenir un avantage pédagogique puisqu'il stimule l'attention, la maintient en éveil du fait de la connaissance de l'existence de ce danger. Inversement, l'absence de danger endort la méfiance, encourage l'automatisme, c'est-à-dire l'inconscience et... risque de devenir un danger sur le plan éducatif. C'est donc au maître et à lui seul que revient le choix d'un matériel, d'une stratégie adaptés à sa classe, à son style d'enseignement.

Il est absurde de croire qu'une notion puisse être analysée définitivement à un niveau donné et être utilisée sans autre analyse dans les niveaux supérieurs. C'est pourtant ce que la lecture de nos programmes (automatismes exclus) laisse à penser. Une étape préliminaire de familiarisation facilite toujours l'analyse d'une notion. Cette première analyse, d'ailleurs, peut et doit être reprise et approfondie au fur et à mesure que la familiarisation est meilleure. Cette familiarisation, trop souvent confondue avec une activité inconsciente, c'est-à-dire un automatisme, consiste à se trouver en présence de situations variées contenant ou ne contenant pas le concept à étudier, et à agir sur ces situations. C'est au cours de ces diverses activités que l'on prend conscience d'une similitude de démarches dues à la présence du concept et c'est seulement à partir de cet instant que l'on peut tenter un début d'analyse, puis, plus tard, de formalisation.

Les situations présentées à l'élève peuvent appartenir à deux classes différentes :

1° Une classe de situations naturelles, extraites du champ d'expérience de l'élève. Ces situations ont un énorme avantage : d'une part elles fournissent une motivation quasi certaine aux activités, d'autre part elles permettent des transferts indispensables pour assurer une bonne compréhension. Mais ces situations ont un inconvénient d'ordre scolaire : appartenant souvent à des domaines extrascolaires, l'élève ne peut agir directement sur elles, soit pour des raisons d'encombrement, soit parce qu'elles sont éphémères. Son action n'a lieu que sur une description de ces situations et exige déjà un certain stade de formalisation.

2° Une classe de situations artificielles, conçues par le maître non pour isoler le concept mais pour permettre une activité réelle précédant avant toute chose la description. C'est à cette classe qu'appartient le matériel décrit plus loin. Une telle situation a en outre l'avantage suivant : ses objets n'ont pas de valeur sémantique et peuvent représenter les objets d'une situation réelle ayant même structure. C'est en quelque sorte la matérialisation de la structure commune aux situations de la première classe.

L'étude unique d'une telle situation est évidemment dangereuse puisqu'elle ne permet pas les transferts. Si l'on crée d'autres situations artificielles de même structure, alors leurs objets prennent une valeur sémantique et l'avantage obtenu sur le plan des transferts est un inconvénient sur le plan de la formalisation. Un autre moyen de provoquer les transferts est de choisir une situation artificielle suffisamment riche, pour que l'on puisse présenter à l'élève des « sous-situations » extraites de la précédente, ce qui présente un double avantage : 1° permettre des transferts; 2° habituer à restreindre, élargir ou varier l'univers dans lequel il travaille.

Un concept pris isolément n'a pas grande signification. C'est toujours par rapport à d'autres concepts ou mieux par rapport à une ou des structures bien déterminées qu'il prend son caractère propre. Il en est ainsi du concept « ensemble ». La prise de conscience de ce concept ne peut se faire que dans des structures assez riches qui feront sentir la nécessité de ce concept. Trop souvent nous voulons définir un ensemble avant d'avoir provoqué ce besoin de penser aux ensembles. Puis, presque immédiatement, nous voulons analyser les diverses définitions : en extension (liste exhaustive des éléments), en compréhension (citation d'une propriété commune aux éléments et à eux seulement), et autres modes (citation d'une loi de construction des éléments par exemple une loi de récurrence), etc. Et l'on est ainsi conduit inévitablement aux symbolisations maintenant classiques $a \in \{a, b, c, d\}$ ou $a \in \{x : \mathcal{P}(x)\}$ si $\mathcal{P}(a)$ est vraie, et combien dangereuses sur le plan pédagogique à ce premier stade.

Il s'ensuit que nous ne pouvons proposer aux élèves, à ce niveau, que des exercices de définition, de symbolisation dans lesquels il n'y a pratiquement aucune autre activité que cette symbolisation. Cette activité, cette analyse, se fait ainsi sous la contrainte du maître alors qu'elle devrait se faire, *a posteriori*, sous la pression des expériences.

La plupart des activités humaines extra-scolaires ou scolaires peuvent se ramener, entre autres, aux types suivants :

1° Organisation (d'objets, d'activités, de souvenirs, etc.).
2° Invention, c'est-à-dire combinatoire.
3° Décision ou choix.
4° Description ou expression.
5° Simulation ou répétition.

Ce dernier type de problèmes est évidemment sur le plan éducatif le plus dangereux tout en restant important sur un certain plan social. C'est presque uniquement ce type d'activité que nous développons consciemment ou non chez nos élèves. En fait, chaque type d'activités fait intervenir d'autres types : par exemple un problème de description fait intervenir des activités d'organisation, d'invention, de choix, de répétition au niveau du discours.

Mais pour susciter un besoin d'organisation chez l'élève, il faut le mettre devant des situations suffisamment riches pour que ce besoin se fasse sentir.

Construction ou présentation du matériel.

Toutes ces raisons, parmi d'autres, ont provoqué le choix du type de matériel décrit ci-dessous, matériel qui n'a rien d'original et se situe dans la lignée des blocs logiques de Dienes.

Les élèves sont invités à découper dans du carton 120 objets ayant :

1° l'une des 5 formes suivantes : disque, carré, triangle, fer de lance, hexagone, notées respectivement D, C, T, F, H, leur ensemble étant noté $\mathcal{F}$;

2° l'une des 4 couleurs : rouge, jaune, vert, bleu R, J, V, B, leur ensemble étant noté $\mathcal{C}$;

3° l'une des 3 tailles : diamètre ou côté 8, 5, 3 centimètres, notées G, M, P, leur ensemble étant noté $\mathcal{G}$;

4° l'une des 2 marques suivantes : non barré d'une croix, barré d'une croix, notées 0,1, leur ensemble étant noté $\mathcal{M}$.

L'ensemble des 120 objets ou univers sera noté $\mathcal{U}$, mais il est bien évident que ces notations n'interviendront devant les élèves que lorsqu'elles seront nécessaires. Il importe dans un tel choix de ne pas utiliser : 1° des objets pour lesquels la terminologie usuelle sera en contradiction avec une terminologie ultérieure (par exemple la « forme » d'un objet dépend de son épaisseur, de son aspect « intérieur » aussi bien qu' « extérieur », etc.); 2° une organisation qui sera en contradiction avec des organisations ultérieures et pourtant attachées à un même vocabulaire (par exemple présenter l'ensemble des carrés et l'ensemble des rectangles comme disjoints alors que plus tard il faudra prendre conscience qu'un carré a toutes les propriétés d'un rectangle, donc est un rectangle particulier, et présenter alors l'ensemble des carrés comme une partie de l'ensemble des rectangles).

Ce seul exercice de découpage exige déjà une organisation implicite de l'Univers, permettant de choisir un ordre de description, puis un ordre de découpage. Par conséquent, il appartient à une classe d'exercices déjà faits par l'élève et consistant : 1° à construire des « arbres »; 2° à jouer sur des « claviers » (en fait, définir en extension des produits d'ensembles). Rappelons ce genre d'exercices à propos de cet exemple particulier :

a) Un ordre est choisi entre les claviers, et parallèlement entre les « étages » de l'arbre :

1er	clavier	1er étage	les formes
2e	»	»	les couleurs
3e	»	»	les tailles
4e	»	»	les marques

Cet ordre étant arbitraire.

b) Un ordre est choisi entre les « touches » de chaque clavier, entre les branches de chaque étage, par exemple l'ordre adopté dans la description au paragraphe ci-dessus.

Ceci étant fait, l'élève « tape » sur une touche de chaque clavier et dessine : *a*) les différents chemins entre les touches des claviers; *b*) l'arbre ou une partie de l'arbre sur lequel il chemine. Ceci revient à définir en extension les éléments des

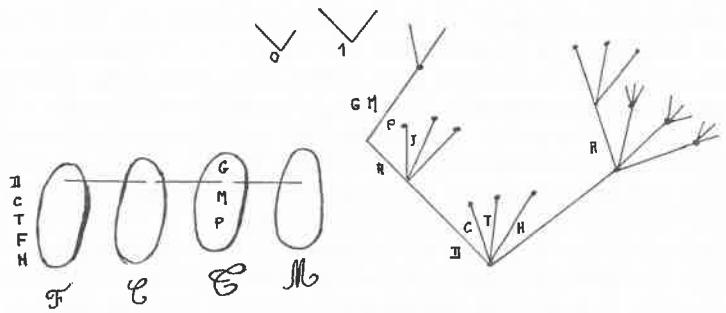


Schéma visiblement très incomplet; si le lecteur veut bien repasser en rouge une suite de choix sur l'arbre, il traduira celle-ci par une suite de flèches sur le diagramme sagittal, à gauche.

FIG. 1.

ensembles produits $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \times \mathcal{C}$, $\mathcal{F} \times \mathcal{C} \times \mathcal{T}$, $\mathcal{F} \times \mathcal{C} \times \mathcal{T} \times \mathcal{M}$, c'est-à-dire des couples, des triplets, des quadruplets de propriétés. Dans cette étape de construction de l'univers, le seul ensemble qui nous intéresse est le dernier. Il importe de remarquer qu'un ensemble produit d'ensembles est *a priori* non ordonné. C'est la nécessité de définir en extension cet ensemble, c'est-à-dire de distinguer les objets, de les désigner successivement, qui impose le choix d'un ordre entre les éléments de chacun des ensembles facteurs. Par contre, le choix d'un ordre entre les ensembles facteurs est indispensable au concept de produit d'ensemble. Si tel était notre objectif, alors il faudrait immédiatement proposer de meilleures situations. Car ici le choix d'un autre ordre, par exemple $\mathcal{C} \times \mathcal{M} \times \mathcal{T} \times \mathcal{F}$, nous conduit au même univers, ce qui met déjà en évidence le danger de confusion entre l'univers $\mathcal{U}$ des 120 objets et l'ensemble produit $\mathcal{F} \times \mathcal{C} \times \mathcal{T} \times \mathcal{M}$.

Premiers inventaires.

L'Univers $\mathfrak{U}$ étant ainsi construit, la seconde étape consiste à inventorier cet univers. Les élèves sont invités à disposer sur leur table les 120 objets répartis en 5 tas (formes), puis en 4 tas (couleurs), 3 tas (tailles), 2 tas (couleurs). Chaque partition étant réalisée matériellement, les élèves la dessinent alors sur leur cahier en la schématisant : par exemple, chaque « objet » est représenté par un point.

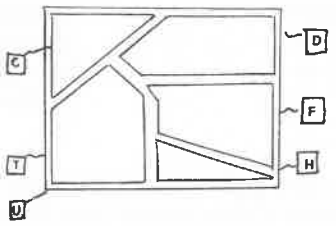


FIG. 2.

Des « étiquettes » (*) sont alors accrochées aux « tas » et à la « caisse », ce qui donne alors l'occasion de prendre conscience de l'imprécision de mots tels que «forme». Qu'est-ce qu'une forme, sinon une classe d'une certaine partition de l'univers?

Or, sur le dessin ci-dessus une erreur a été commise à propos des étiquettes, erreur fondamentale : laquelle? Si U représente l'ensemble des 120 objets, il est absurde de désigner par la même étiquette le « meuble » à « 5 tiroirs » contenant les 120 objets, c'est-à-dire la partition en 5 classes. Mais cette erreur n'apparaît que lorsque nous comparons le meuble à 5 tiroirs, le meuble à 4 tiroirs, puis à 3 tiroirs, puis à 2 tiroirs. C'est seulement à ce moment que nous sentons la nécessité de distinguer ces différents meubles, ou partitions notées U_1, U_2, U_3, U_4, U_5 (U_1 est un ensemble de 5 éléments tiroirs, tas ou classes, $\mathfrak{U}$ est un ensemble de 120 éléments; il faut alors remplacer sur le dessin précédent $\mathfrak{U}$ par U_1).

Une seconde erreur est presque inévitablement commise au cours des deux étapes. Il arrive que les élèves ou le maître ont besoin de nommer l'un des 120 objets, par exemple le carré, vert, grand et marqué d'une croix. La tentation est alors grande d'accrocher des étiquettes à chacun des 120 objets, par exemple pour l'objet précédent (CVQ1). C'est en effet l'un des codages utilisés pour désigner les chemins de l'arbre ou des claviers. Le danger d'un tel codage est évident si on ne l'aborde pas au grand jour, d'où alors les activités suivantes.

Inventaires plus « fins ».

Certains élèves ont l'idée de répartir leurs 120 objets en plus de 5 tas. Par exemple, ils le transportent dans 10 enveloppes, mais ces tas ne respectent pas nécessairement l'homogénéité des ensembles (ainsi, carrés rouges et jaunes, carrés verts et bleus, disques rouges et jaunes, disques verts et bleus, etc., pourquoi ne pas réunir les rouges et verts?). Comment alors répartir les objets en 10 tas sans faire d'envieux parmi les

(*) N.D.L.R. — Excusez l'imperfection des dessins réalisés trop hâtivement : ici les étiquettes sont mal attachées.

formes, les couleurs, les tailles, les marques. On aboutit ainsi à la partition suivante U_6 en 10 classes notées provisoirement C0 (carrés non marqués), D1 (disques marqués), etc.

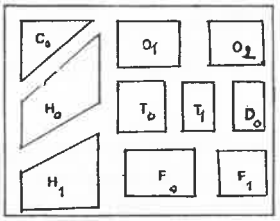


FIG. 3.

Ce problème conduit évidemment aux autres partitions utilisant 2 des 4 propriétés, par exemple : forme et couleur (20 classes), forme et taille (15 classes), couleur et taille (12 classes), etc., puis aux partitions utilisant 3 des 4 propriétés, par exemple : forme, taille, marque (30 classes). Finalement, les élèves réalisent manuellement sur la table toutes les partitions suivantes en 5, 4, 3, 2, 20, 15, 10, 12, 8, 6, 60, 40, 30, 24, 120 classes.

Deux remarques s'imposent :

1° Il ne faudrait pas, arrivés là, que les élèves croient qu'il n'y a pas d'autres partitions possibles. Il est donc indispensable de leur suggérer de répartir au hasard leurs 120 objets dans les 7 tiroirs d'un meuble par exemple. Ce faisant ils n'utilisent pas les propriétés précédentes. Mais comment alors désigner les objets? Par leurs qualités? Cette solution naturelle doit être retenue, mais seulement un temps : le temps de la réflexion. Voici pourquoi.

2° Lorsque les élèves ont dessiné les partitions, ils ont accroché à chaque classe (tiroir ou tas) une étiquette rappelant les propriétés utilisées (exemple : CRM représente la classe des objets carrés, rouges, moyens). Lors du dessin de la partition en 120 classes, ils ont ainsi désigné par l'étiquette DVPO une certaine classe. Mais cette classe ne contient qu'un objet. D'où alors la tentation de donner le nom de la classe à l'objet unique qu'elle contient. Il est temps de compenser ce cas particulier par un autre.

(Problème analogue aux problèmes de repérage.)

Enrichissement et codage des « éléments » de l'univers.

On décide alors de désigner chaque objet par un mot de deux lettres, une lettre, une voyelle, et pour unifier le vocabulaire dans la classe on choisit un ordre sur les 2 claviers de lettres, un ordre sur chacun des 4 claviers de qualités et une

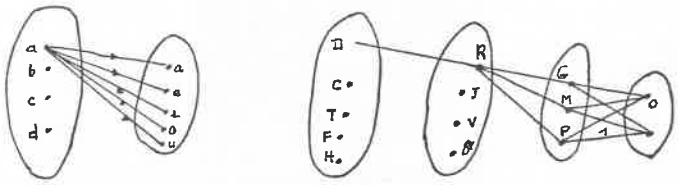


FIG. 4.

application de l'ensemble de couples de lettres dans l'ensemble des quadruplets.

aa ↦ DRG0	*ao* ↦ DRM1
ae ↦ DRG1	*au* ↦ DRP0
ai ↦ DRM0	*ba* ↦ DRP1

etc. Cette application n'est autre que la relation d'appartenance. Exemple : *aa* appartient à la classe DRG0.

Les élèves dressent alors un véritable dictionnaire qui leur permettra par la suite de retrouver plus aisément les objets. (Cette application fournira plus tard un premier exemple d'application croissante ou décroissante suivant les ordres utilisés.) Mais l'ensemble des mots de deux lettres comporte 130 éléments d'où la tentation de fabriquer alors 10 objets supplémentaires désignés par les 10 derniers mots et ayant certaines des propriétés précédentes.

Cette fois la partition du nouvel univers U^0 des 130 objets en 120 classes ne nous permet plus de confondre le nom des classes avec le nom des objets puisque certaines classes contiendront 2 ou même 3 objets. Chaque classe peut ainsi être désignée, soit par le nom de l'attribut (DRM1 par exemple), soit par la liste des noms propres des objets qu'elle contient, liste qui peut être réduite à 1 seul élément. Nous avons là une occasion de faire distinguer un langage en extension d'un langage en compréhension sans définir ces mots. On peut alors se demander s'il ne serait pas bon que certaines de ces classes soient vides. Mais ce matériel trop riche est conçu pour que l'on travaille sur des sous-univers. Il sera donc possible par la suite de désigner des sous-univers où les partitions à l'aide de propriétés conduisent à des classes vides. (Attention! le mathématicien n'utilise le mot partition que pour désigner un ensemble de classes disjointes et *non vides*, dont la réunion soit l'univers.)

Remarque : On peut penser qu'à ce stade et bien que l'inclusion n'ait pas encore été abordée, il soit possible de demander aux enfants de comparer les diverses partitions afin de constater par exemple que le couple des partitions U_1 et U_2 (5 classes d'après les formes et 4 classes d'après les couleurs) n'a pas le même aspect que le couple U_1, U_6 par exemple (5 classes d'après les formes et 10 classes d'après les formes et marques). Pour ce dernier couple, U_6 est plus fin que U_1, c'est-à-dire chaque classe de U_6 est incluse dans une classe de U_1. Mais il est sans doute prématuré d'aborder l'analyse du treillis des partitions. Disons cependant qu'au cours de l'activité de classification, certains enfants ont fort bien compris que pour obtenir une partition en 20 classes, ils pouvaient utiliser d'abord la partition en 5 classes d'après les formes, puis partager chaque classe en 4 d'après les couleurs ou inversement. Ceci est important car il y a en germe la notion de structure quotient. Certains dessins ont d'ailleurs été ainsi réalisés et ont permis d'attirer l'attention des enfants sur le fait suivant :

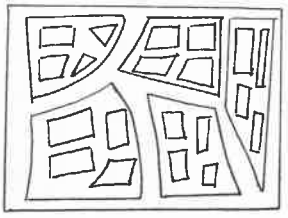


FIG. 5.

Cet ensemble n'est pas la partition U_7 de l'univers U^0 des 130 objets en 20 classes, mais une partition en 5 classes de la partition précédente, c'est-à-dire une partition en 5 classes de l'ensemble U_7 des 20 classes.

Définition en extension, en compréhension. Parties complémentaires.

Le matériel ayant été ainsi exploré globalement, on choisit pour une première étude un sous-univers U′ plus maniable que l'on pourra changer plus tard : par exemple un sous-univers défini en compréhension (par exemple ensemble de tous les objets ayant la propriété suivante : (C ou D) et (R ou V) et (G ou M ou P) et (0 ou 1), ce qui permet de répéter le travail précédent à un niveau moins riche.

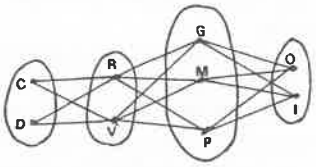
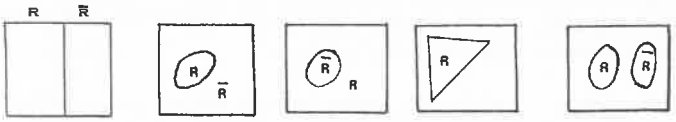


FIG. 6.

Mais d'emblée, cette fois, certaines des classes obtenues auront plus de 1 objet. Par exemple nous aurons 27 objets répartis dans les 24 classes de la partition la plus fine obtenue à l'aide des propriétés précédentes. Ce sous-univers sera isolé et utilisé pendant plusieurs leçons.

Première étape. — L'élève est invité à disposer le sous-univers sur une feuille de papier et à le séparer en 2 classes, de diverses façons, et à dessiner à chaque fois la partition correspondante en entourant directement sur la feuille les 2 tas d'objets (par exemple G et $\overline{G}$, grands et non grands, C et $\overline{C}$, carrés et non carrés, R et $\overline{R}$, rouges et non rouges, etc.). Il est important de penser à toutes les suggestions possibles d'un dessin.



(1) (2) (2′) (3) (4)

Sur chaque dessin, on a représenté R sous-ensemble des rouges de U′ et $\overline{R}$ sous-ensemble des non-rouges de U′. En (3), on peut représenter $\overline{R}$ par un contour d'une autre couleur dans « l'espace » laissé libre dans U′ par R.

FIG. 7.

Ainsi le dessin (1) (diagramme de Carroll) suggère un équilibre entre les deux sous-ensembles, c'est-à-dire entre les deux propriétés dont l'une est la négation de l'autre, alors que le dessin (2) (diagramme de Venn) suggère la prépondérance du sous-ensemble central R. Pour rétablir, on peut évidemment faire un deuxième dessin (2′) où l'on intervertira R et $\overline{R}$. Dans un problème où l'ensemble complémentaire n'a pas d'intérêt, le diagramme de Venn paraît plus naturel. Mais pour des raisons d'éducation logique il est préférable d'utiliser un diagramme type Carroll. Par exemple l'étude

des objets « non-moyens » peut être intéressante et le fait d'utiliser la négation pour désigner cette propriété ne doit pas faire peser sur elle une sorte de déconsidération.

Pédagogiquement, c'est le dessin du type (3) qui parait le mieux convenir car il a les avantages simultanés de (1) et (2). En effet, les dessins (1) et (2) nous obligent à placer l'étiquette des parties à l'intérieur de celle-ci, d'où une confusion et gêne lorsqu'on placera les étiquettes des éléments de ces parties. Sur le dessin (1) on ne peut symboliser une ficelle attachant l'étiquette R à la partie car le contour de R et de U′ se confondent tandis que sur le dessin (4) le point d'attache des ficelles est nettement distingué puisque les contours sont séparés. En outre, les élèves ont naturellement tendance à faire un dessin du type (4). Celui-ci est bon mais a un grave inconvénient : il suggère mal la complémentarité. L'espace entre les deux parties nous invite à y placer des objets. Au prix d'une légère convention, on adopte le dessin (3). L'importance de ces dessins décroît d'ailleurs au fur et à mesure que la compréhension est meilleure (*).

Parallèlement au dessin, les élèves dressent à chaque fois la liste des noms propres des éléments de chacune des deux parties (exemple $R = \{al, am, an, \ldots, etc.\}$).

L'écriture de ces listes devenant très vite fastidieuse, on adopte la disposition en tableau. La liste des éléments de $\mathcal{U}$ est copiée une seule fois. Pour chaque partie il suffit de répondre par oui ou par non en face de chaque élément : oui si l'élément appartient à cette partie, non dans le cas contraire.

$\mathcal{U}$	R	$\overline{R}$	G	$\overline{G}$	etc.
aa	0	1	1	0	
ab	0	1	1	0	
ac	0	1	0	1	
ad	0	1	0	1	
ae	1	0	1	0	

Très vite d'ailleurs les élèves adoptent les conventions des 1 et 0. Pourtant beaucoup par paresse ou par des habitudes malheureusement répandues négligent d'écrire les 0, c'est-à-dire adoptent la convention supplémentaire : « absence de réponse équivaut à réponse négative », ce qui est évidemment commode mais absurde lors des échanges d'information, car on ne saura jamais s'il s'agit d'un oubli, volontaire ou non, ou d'une réponse négative.

Deuxième étape. — Ceci nous amène alors à définir de nouvelles parties en extension. On donne la liste des éléments de A, l'élève sépare alors son univers en deux classes A et $\overline{A}$, dessine la partition et établit la liste des éléments de $\overline{A}$. On propose ainsi de nouvelles partitions B et $\overline{B}$, C et $\overline{C}$, etc., mais en prévoyant les cas particuliers : par exemple $A \cap B$ est non vide, C est inclus dans $\overline{A}$, etc., que l'on utilisera par la suite.

Remarques. — *a*) Il importe de bien s'assurer que lorsque l'élève dessine, il comprend ce qu'il dessine car les techniques de dessin comme les techniques de calcul finissent par devenir inconscientes. C'est la raison pour laquelle : 1° les élèves disposent

(*) *N.D.L.R.* — On peut aussi utiliser un diagramme de CARROLL (1) avec la convention : les éléments de R à l'ouest, ceux de $\overline{R}$ à l'est.

les objets sur une feuille blanche et dessinent directement sur cette feuille; 2° dressent les listes; 3° complètent le tableau des 1 et 0.

b) Dans toutes ces activités l'élève prend conscience de ce que signifie partie complémentaire « partie qui complète », mais il est extrêmement important de lui donner le plus tôt possible le sentiment que ce fait dépend de l'univers choisi. On peut alors choisir un autre sous-univers U″ contenant U′ et faire constater que la partie $\overline{A}$ qui complète A dans U′ n'est par là même que la partie $\overline{A}''$ qui complète A dans U″. La notation $\overline{\overline{A}}$ paraît alors illogique et on peut à ce moment lui préférer la notation $\complement_{U'}A$, mais celle-ci est trop lourde à manier et les enfants préfèrent la première notation.

Mais avant d'aborder des changements de sous-univers on peut préférer l'étude de l'intersection, réunion, etc., d'où les activités suivantes :

Intersection; réunion; différence symétrique.

a) L'élève est invité à disposer sur une feuille le sous-univers U′ et à séparer les sous-ensembles A et B par exemple précédemment définis en extension. Il découvre que ceci est impossible puisque A et B ont des éléments communs d'où l'idée de « mélanger le moins possible » les objets de A et ceux de B (c'est-à-dire en fait de constituer une partition plus fine que la partition A, $\overline{A}$, et plus fine que la partition B, $\overline{B}$). L'élève est naturellement porté à constituer un tas spécial ne contenant que les objets communs A et B. Il dispose alors 4 piles d'objets sur la feuille et dessine les contours de A, $\overline{A}$, B, $\overline{B}$ avec leurs étiquettes attachées aux contours par exemple en rouge A, rouge pointillé $\overline{A}$, vert B, vert pointillé $\overline{B}$. C'est l'instant d'introduire les étiquettes $(A \cap B)$, $(A \cap \overline{B})$, $(\overline{A} \cap B)$, $(\overline{A} \cap \overline{B})$ que les élèves écrivent sur des papiers et disposent sur les 4 tas.

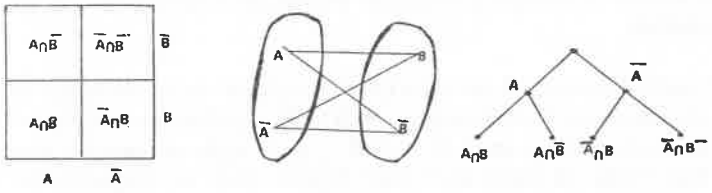


FIG. 8.

Remarques. — 1° L'idée essentielle ici est de montrer comment deux partitions en deux classes « engendrent » une partition en quatre classes.

2° A ce stade on peut avoir l'idée de répéter les mêmes exercices avec 2 sous-ensembles définis cette fois en compréhension (par exemple G, $\overline{G}$, R, $\overline{R}$; grands, non grands, rouges, non rouges) ou bien l'un défini en extension, l'autre en compréhension. Mais il semble préférable de présenter d'emblée et simultanément l'intersection, réunion, différence symétrique, afin de mieux les opposer et ainsi faciliter la distinction des concepts.

b) C'est pourquoi lorsque chacune des quatre piles ($A \cap B$), ($A \cap \overline{B}$), etc., a été constituée, étiquetée, lorsque le dessin a été fait, il est assez naturel de revenir au problème des partitions en 2 classes. Quel est le complémentaire de ($\overline{A} \cap \overline{B}$), ($A \cap \overline{B}$), etc.? D'où l'idée de réunir A et B, A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et B, $\overline{A}$ et $\overline{B}$. A chaque fois les élèves rapprochent 3 piles suffisamment pour donner l'idée d'un seul sous-ensemble, mais sans les mélanger afin de pouvoir distinguer encore les ensembles A, B; puis ils dessinent sur la feuille-support le contour du nouvel ensemble désigné par l'étiquette $A \cup B$, d'où les 4 dessins analogues à celui-ci :

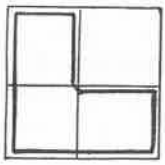


FIG. 9.

Le tableau des 1 et 0 est alors complété par 4 nouvelles colonnes représentant les 4 nouvelles parties $A \cup B$, $A \cup \overline{B}$, $\overline{A} \cup B$, $\overline{A} \cup \overline{B}$.

Remarque. — On pourrait, à ce stade, changer d'univers et s'assurer que les concepts de réunion et intersection ont été compris à l'aide d'exercices analogues permettant des transferts, mais il semble préférable d'introduire dès maintenant un concept un peu dédaigné dans l'enseignement élémentaire : celui de différence symétrique. Ce concept est pourtant très important pour la suite puisqu'il permet d'ériger une structure de groupe et même d'espace vectoriel sur n'importe quel ensemble et par là de permettre d'exprimer en langage algébrique clair certains problèmes d'ordre combinatoire. En outre, pédagogiquement, la juxtaposition de plusieurs concepts (intersection, réunion, différence symétrique) dont les traductions en langue usuelle sont très voisines et souvent confondues permet des comparaisons et facilite ainsi leur distinction.

c) Les élèves constatent sur la partition en 4 classes qu'en réunissant ces 4 classes 3 par 3, on obtient les 4 réunions ($A \cup B$, $A \cup \overline{B}$..., etc.) en les réunissant 2 par 2 on obtient les 4 intersections ($A \cap B$, $A \cap \overline{B}$..., etc.), mais ce faisant 2 paires ont été omises, d'où l'idée de réunir les 2 piles d'objets situés en diagonale sur le dessin. Il est alors difficile de dessiner les contours des nouveaux ensembles car la partition en 2 classes complémentaires n'apparaît plus.

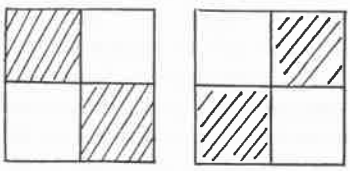


FIG. 10.

C'est à un tel moment qu'apparaît l'utilité d'un autre mode d'expression, comme le tableau des 1 et 0 (c'est-à-dire les fonctions caractéristiques des ensembles). La langue usuelle permet une explication plus aisée que dans le cas de la réunion : « ensemble des objets qui sont dans l'un et ne sont pas dans l'autre », d'où le calcul aisé des 1 et 0. Des étiquettes pour les nouveaux ensembles sont introduites du type $(A \Delta B)$. Effectivement, cette opération semble plus facile aux élèves que la réunion. Malgré le pouvoir suggestif du dessin, un grand nombre d'élèves ont alors tendance à disposer 4 colonnes dans le tableau $(A \Delta B)$, $(A \Delta \overline{B})$, $(\overline{A} \Delta B)$, $(\overline{A} \Delta \overline{B})$. Le calcul des 1 et 0 leur montre que certaines colonnes sont identiques. C'est la première fois qu'ils rencontrent 2 étiquettes différentes pour désigner le même ensemble, d'où l'introduction du signe $=$ avec un sens correct $A \Delta B = \overline{A} \Delta \overline{B}$ et $\overline{A} \Delta B = A \Delta \overline{B}$. Ces remarques évidentes sur le dessin peuvent donner lieu à un jeu logique à l'aide de la langue usuelle : « appartenir à l'ensemble de gauche et ne pas appartenir à l'ensemble de droite » pour la première étiquette équivaut à « ne pas appartenir à l'ensemble de gauche et appartenir à l'ensemble de droite » pour la deuxième étiquette. Mais on peut évidemment réserver pour plus tard ces exercices de logique qui sont des exemples d'activité dans un groupe de KLEIN.

Finalement les élèves remplissent 10 colonnes du tableau : 4 intersections, 2 différences symétriques et 4 réunions, et font 5 dessins : l'un où sont visibles A, $\overline{A}$, B, $\overline{B}$ et les 4 intersections et les 4 autres réservés chacun à une réunion et sa partie complémentaire (le dessin des différences symétriques étant abandonné).

De tels exercices sont répétés sur des sous-ensembles divers toujours définis en extension et choisis de telle sorte qu'aucun qualificatif de la langue usuelle ne puisse leur être attribué afin d'éviter les réminiscences d'expressions ambigües. C'est seulement après s'être assuré que l'élève distingue correctement les concepts que l'on introduira les définitions en compréhension. Celles-ci sont indispensables afin de souligner les insuffisances de la langue usuelle (conjonctions et, ou, soit), mais ceci ne peut se faire que si les notions ont été comprises *indépendamment du langage*. Il est en effet fondamental d'apprendre à distinguer les concepts de réunion, intersection avec autre chose que la langue usuelle, puisque c'est celle-ci qui introduit les confusions. Une fois ces concepts distingués à l'aide du matériel, alors l'ambiguïté des conjonctions apparaîtra clairement.

Au cours de ces exercices les élèves parviennent à se dégager peu à peu de l'activité sur le matériel. Ils finissent par découvrir qu'ils peuvent « calculer » les 12 colonnes du tableau ($\overline{A}$, $\overline{B}$ et les 10 précédentes) en ne connaissant que l'univers, A et B. Le fait d'avoir dessiné directement sur la feuille portant le matériel leur permet par la suite de refaire les dessins suggérant la situation sans avoir à manipuler les objets, tâche vite fastidieuse.

Remarques. — 1° Il est important que l'élève ait à sa disposition plusieurs moyens d'expression, dessins, tableaux, afin de contrôler qu'il ne s'agit pas d'une technique gratuite retenue par cœur sur un seul mode d'expression. C'est ainsi que l'on peut demander de « calculer » les éléments de chacune des colonnes du tableau et après de placer sur le dessin les points et noms représentant les éléments de l'univers. Il est important aussi de désigner les sous-ensembles par des lettres variées C, R ou $\overline{H}$ et $\overline{Q}$, toujours afin de provoquer chez l'élève le besoin de prendre conscience de son activité.

2° Il est aisé de contrôler rapidement la compréhension en donnant par la suite

des univers variés mais commodes (par exemple une liste de 10 verbes, G 1 sous-ensemble des verbes du 3e groupe, $\bar{I}$ l'ensemble des verbes ne contenant pas la lettre *i*). Les élèves doivent remplir les colonnes $G \cap \bar{I}$, $G \cup \bar{I}$, $G \Delta \bar{I}$ et placer correctement les 10 verbes sur un dessin.

3° Il serait catastrophique de faire apprendre par cœur une technique de calcul des 1 et 0. C'est la découverte de ces règles par les enfants eux-mêmes qui provoquera une véritable compréhension des concepts. Des expériences au niveau des adultes confirment cette idée. L'emploi de ces règles risquant de devenir inconscient, le recours au dessin permettra si besoin est, de contrôler s'il n'y a pas eu oubli des concepts, (ou vice-versa).

4° En établissant de tels tableaux les enfants recherchent les parties complémentaires et relient par des flèches rouges les étiquettes des colonnes correspondantes, ce qui permet d'une part de calculer plus rapidement dans certains cas, d'autre part de se familiariser avec la loi de De Morgan sans l'avoir apprise verbalement.

5° Dans tous ces exercices, les enfants ont une tendance à compter les objets, ce qui les conduit naturellement à la loi fondamentale : $|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|$ (en notant cardinal $A = |A|$), mais ceci risque au début de perturber l'attention sur les concepts à étudier. Par la suite, au contraire, elle permet un quasi contrôle rapide des calculs.

6° On reconnaît dans ces exercices une préparation à la construction d'une algèbre d'ensembles sur une partition donnée. C'est ainsi qu'on peut faire établir des tableaux à 16 colonnes en y adjoignant l'univers et la partie vide. Mais tel n'est pas l'objectif immédiat d'autant plus qu'avant d'attaquer un treillis au niveau de l'ensemble des parties d'un ensemble donné, il vaudrait mieux l'attaquer au niveau inférieur, c'est-à-dire l'ensemble des parties d'un ensemble donné. Mais ceci sera un autre exemple d'organisation dans les souvenirs de l'élève sans qu'il soit utile ici d'insister sur cette organisation.

Inclusion.

Les exercices précédents seraient dangereux s'ils se limitaient à ces cas particuliers. Il est indispensable de présenter aux élèves des exemples où 2 partitions en 2 classes conduisent à une partition en 3 classes (et non en 4 comme précédemment). On reprend les mêmes activités en choisissant cette fois A et C tels que $C \subset \bar{A}$ par exemple (dans $\bar{A}$ et non dans A afin que la situation soit moins évidente, la surprise en résultant en favorisera la mémorisation). L'enfant constate qu'il lui suffit de 3 piles d'objets, d'où le dessin obtenu par imitation des dessins précédents.

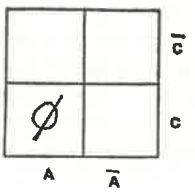


FIG. 11.

L'une des 4 classes (dans ce cas $A \cap C$) est vide. Ce dessin logiquement correct si l'on explique la signification du symbole $\varnothing$ a deux inconvénients :

1° Il risque de suggérer un concept de partition en contradiction avec le concept correct où toutes les classes sont non-vides.

2° Il n'est pas naturel; l'enfant a envie de dessiner 3 parties seulement s'il n'a pas pris l'habitude de se laisser conditionner par les exercices précédents. C'est pourquoi les enfants utilisent un dessin du type suivant :

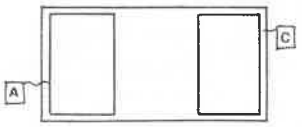


FIG. 12.

Là encore la réflexion pour être efficace ne doit pas s'effectuer seulement sur A et C, mais aussi sur les parties complémentaires $\overline{A}$ et $\overline{C}$. L'élève établit alors le tableau des 14 colonnes et constate que l'une ne contient que des zéros, $(A \cap C)$ une autre ne contient que des 1, $(\overline{A} \cup \overline{C})$ enfin $C = C \cap \overline{A}$, $\overline{C} = A \cup \overline{C}$.

L'essentiel ici est : 1° l'idée d'une partition en 3 classes; 2° les deux idées équivalentes $C \subset \overline{A}$ et $A \subset \overline{C}$ (codées ou non, mais si le signe $\subset$ est introduit il convient de souligner la différence entre une étiquette de type $(A \cap \overline{C})$ représentant un terme et une étiquette de type relationnel $A \subset \overline{C}$.

Il peut paraître préférable d'attendre une prise de contact avec des relations plus familières pour introduire des signes relationnels comme $\in$ et $\subset$ (à opposer d'ailleurs pour mieux les distinguer).

Les exercices se poursuivent alors avec des ensembles définis en compréhension (par exemple G, $\overline{G}$, M, $\overline{M}$ grands, non grands, moyens, non moyens). Ces exemples permettent de souligner l'emploi plus ou moins correct des articles partitifs dans la langue usuelle.

Conclusion.

Des exercices sur des situations réelles sont indispensables à la suite de tous ceux-ci et permettent un contrôle de la bonne compréhension du langage. Il vaut mieux sans doute réserver pour plus tard des exemples où l'on choisira 3 partitions en 2 classes, puis 4, etc. (au lieu de 2 comme ici), ce qui aura l'avantage de préciser à nouveau les concepts précédents.

En résumé, les idées essentielles de cette présentation sont :

1° Activité sur un matériel précédant toute explication ou définition verbale;

2° Création d'un nombre suffisamment grand de sous-ensembles pour motiver l'utilisation d'étiquettes et d'un langage spécial;

3° Passage de l'activité matérielle à l'utilisation d'un mode d'expression de type algébrique, ce qui d'un point de vue purement éducatif déconditionne l'enfant des habitudes de penser par l'intermédiaire d'une langue verbale et l'oblige à concentrer son attention sur la vue;

4° Distinction des éléments d'un ensemble soit par des qualités sensibles (ce qui est naturel mais logiquement mauvais puisqu'une qualité définit une classe d'objets et non 1 objet (même si cette classe n'en contient qu'un, cette classe n'est pas l'objet), soit par des noms propres (codage);

5° Familiarisation avec les concepts de sous-ensemble, complémentarité, partition, intersection, réunion, différence symétrique, fonction caractéristique.

Il est évident qu'une foule d'activités diverses peuvent être poursuivies à l'aide d'un tel matériel, mais il serait malhonnête à ce sujet de ne pas renvoyer le lecteur aux excellents travaux de DIENÈS.

Post-scriptum.

Cet article rédigé en janvier 1968 était destiné aux collègues participant à l'expérience organisée par l'Institut Pédagogique, concernant les classes de Sixième en 67-68. Il met en évidence, par ses carences, la lente évolution des idées chez tout individu normalement constitué, y compris l'auteur. Sa mise en garde contre la prolifération purement commerciale des matériels ne semble pas inutile actuellement, ce qui ne signifie pas qu'il ne faille pas faire agir les élèves sur du matériel.

En effet, la tendance actuelle des manuels est de mettre l'accent sur un symbolisme et des mots accompagnés de définitions. La pauvreté, sinon les erreurs de certains sujets dits « modernes » du B.E.P.C. ou des concours d'entrée aux E.N. souligne le danger de cette tendance. A quoi sert un langage raffiné lorsqu'on n'a pas d'idées à exprimer? A quoi bon dire « l'ensemble des tables de cette pièce » au lieu de « les tables de cette pièce ». Le problème fondamental est de montrer la nécessité de ce langage lorsqu'il y a risque de confusion. Et ce risque de confusion ne peut apparaître que si l'on travaille simultanément sur plusieurs sous-ensembles d'un même ensemble. Ceci, joint au fait que la volonté d'organisation est à la base de toute activité mathématique, explique pourquoi des jeux de « tri » (c'est-à-dire des partitions successives du même ensemble) sont indispensables avant l'introduction du langage et ceci quel que soit l'âge de l'élève. On pourrait peut-être aller jusqu'à dire qu'ils sont d'autant plus indispensables que l'élève est conditionné par sa langue maternelle, donc qu'il est plus âgé.

Le matériel décrit plus haut avait été choisi avec un manque parfait d'imagination. Il serait désastreux qu'un maître utilise uniquement un matériel de ce genre. C'est pourquoi des petites fiches sur carton représentant par exemple des pantins de formes, couleurs, coiffures, positions variées, des chats, des bateaux, des autos, etc., constituent autant de matériels efficaces. Malheureusement, certains ont cru pouvoir être utiles en vendant de tels matériels. Indépendamment du caractère commercial, cette politique me paraît pédagogiquement nocive. Car : 1° le fait de demander aux enfants de construire eux-mêmes un jeu de fiches est un excellent stimulant, et les prépare implicitement à mieux comprendre les notions présentées plus tard; 2° enfin, si des gens veulent rendre service à l'enseignement, ils feraient mieux de construire des matériels qui ne peuvent l'être par les élèves et seraient cependant d'une grande utilité (je pense à des jeux de type algébrique ou des modèles spatiaux).

Des matériels de type algébrique pourraient aussi être envisagés. Par exemple mes élèves de Sixième ont construit un jeu de fiches. Chaque fiche est constituée par 1 hexagone dont les 6 secteurs sont colorés de 6 couleurs différentes. Indépendam-

ment des exercices analogues à ceux décrits précédemment, on retrouve derrière cette activité combinatoire une préparation aux jeux algébriques ou simplement des jeux de différences (par exemple jouer aux dominos : 2 hexagones ne sont voisins que s'ils ne diffèrent que par l'interversion de 2 couleurs consécutives, etc.). On remarquera, qu'avec un tel matériel, les sous-ensembles seront difficilement définis en compréhension, ce qui constitue un avantage pour obliger à travailler en extension.

Enfin, la représentation des ensembles par des dessins semble présenter, après quelques années de recul, autant de dangers que d'avantages. C'est pourquoi l'utilisation de cartes perforées (décrites par nos collègues lyonnais en particulier) où chaque carte représente un élément de l'ensemble, paraît être avec la manipulation directe du matériel, une excellente préparation d'une part aux dessins, d'autre part au symbolisme.

Mais là encore, c'est le maître et lui seul qui peut décider dans quelle mesure il peut brûler les étapes, si tant est qu'il faille en brûler!

Un travail analogue peut être fait avec des ensembles de couples d'objets, c'est-à-dire matériellement parlant, avec des dominos à deux cases distinctes. L'opération « composition » peut alors être introduite sous forme de jeu. On a ainsi un moyen agréable et clair de préparer l'introduction des notions concernant les relations. Cela est une autre histoire trop longue à développer ici mais à laquelle il faudra bien s'attaquer un jour ou l'autre.

S'il fallait en tirer une morale, on rappellerait volontiers ceci : « Les mathématiques ne s'apprennent pas, elles se font ». L'oublier, c'est dénaturer complètement l'esprit même de cette discipline qui est à base de recherches. L'enseignement se heurte alors au paradoxe suivant : il faut aussi donner aux élèves les moyens de faire ces recherches, c'est-à-dire très souvent leur fournir les langages que d'autres ont élaborés, d'où ce conflit entre l'acquisition des langages exigeant un effort de mémoire et l'exercice de l'intelligence, de la curiosité et de l'imagination sans lequel il n'y a plus de mathématique. Plus les enfants sont jeunes, plus ce dernier aspect est important puisque c'est l'éducation et non la culture qui est en cause.

M. D. (Juin 1969).

La réforme de l'enseignement mathématique
ou... le printemps de cet enseignement.

Le printemps, par exemple les 7, 8, 9 et 10 mai 1970, pour les journées de l'A.P.M.E.P. à Clermont.

Mathématisez l'Auvergne,
l'Auvergne vous mathématisera !

L'A.P.M.E.P. dans un Puy; sous quel aspect en sortira-t-elle?
Vous le saurez en venant à Clermont le 7 mai 1970.