

Encore la base moins deux !

Il est bien connu que l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers (relatifs) peut être introduit de plusieurs façons : étude des classes d'équivalence dans l'ensemble des couples de naturels, prolongement de l'ensemble $\mathbb{N}$ des naturels de l'autre côté de zéro, institution d'un ordre nouveau dans un ensemble formé de mots anciens (idée de Dumont sur la base moins deux).

Ce qui suit a pour but d'essayer de montrer comment on peut raccrocher l'étude des classes d'équivalence de couples d'entiers à l'introduction de la base moins deux. De plus, et ce n'est pas négligeable, il s'agit d'un jeu que l'on peut proposer aux élèves : ça ne doit donc pas être ennuyeux.

On trouve dans Papy, *Mathématique Moderne 1*, pages 296 et suivantes un procédé pour représenter un nombre de jetons dans le système binaire. Pour cela, on utilise une table, partagée en cases, et dénommée « abaque » par l'auteur. On retrouvera ici des idées semblables.

1. Le matériel.

Chaque élève dispose d'une table divisée en cases alternativement rouges et vertes (ou jaunes et bleues, ou noires et blanches, ...) comme l'indique la figure ci-dessous

	r	v	r	v	r	vert	rouge

On distribue à chacun une poignée de pions rouges et une poignée de pions verts : par exemple, Évariste a reçu dix-huit pions rouges et onze pions verts.

2. La règle du jeu.

On devrait plutôt dire *les* règles du jeu : en effet, il y en a trois.

Les pions reçus sont placés sur la case la plus à droite de la table (dans notre exemple, c'est une case rouge). On va pouvoir les déplacer en suivant les règles n° 1 ou n° 2, dans l'ordre qu'il plaît.

Règle n° 1 : toute paire de pions rouges peut être remplacée par un pion rouge unique situé dans la case immédiatement à gauche. Tout pion rouge peut être remplacé par une paire de pions rouges que l'on placera dans la case immédiatement à droite.

Même règle pour les pions verts : remplacer mot pour mot « rouge » par « vert ».

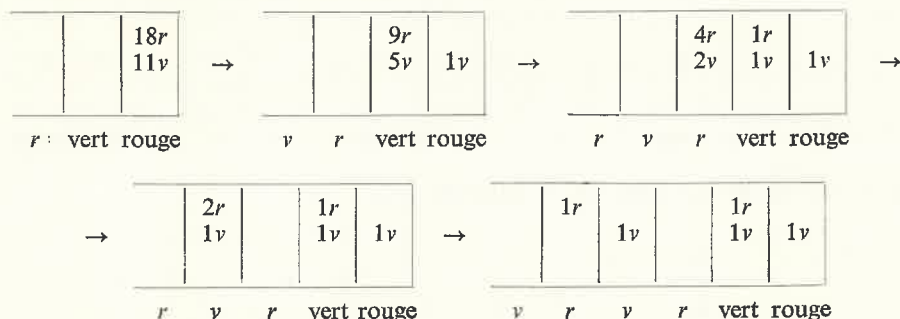
Règle n° 2 : un pion rouge et un pion vert placés dans la même case se neutralisent : on peut les enlever du jeu. Inversement, on peut introduire sur une case quelconque un pion vert et un pion rouge à la fois.

Règle n° 3 : le jeu s'arrête lorsque chaque case rouge contient au plus un pion rouge et lorsque chaque case verte contient au plus un pion vert. Il ne doit plus rester de pion vert dans une case rouge, ni de pion rouge dans une case verte.

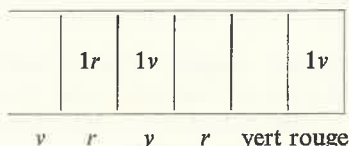
3. Comment Évariste jouera-t-il ?

Il a plusieurs possibilités :

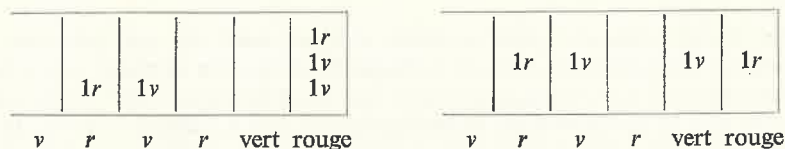
a) 1° Il applique systématiquement la règle n° 1



2° Il applique alors la règle n° 2 en enlevant les deux pions de couleurs différentes de la 2° case

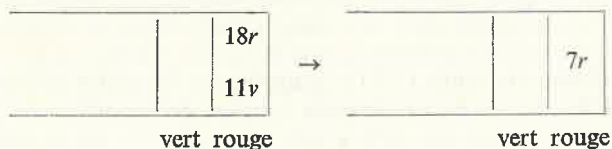


3° La première case rouge est occupée par un pion vert. Évariste place sur cette case un pion rouge et un pion vert, puis applique une dernière fois la règle n° 1 :

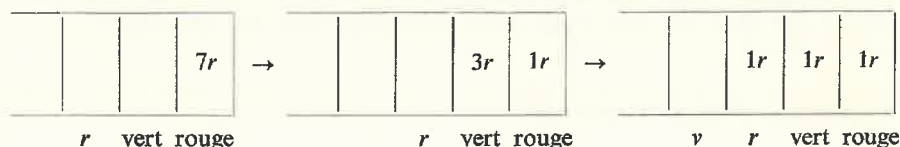


Évariste a satisfait à la règle n° 3.

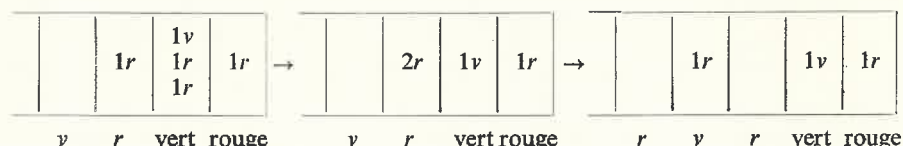
b) 1° Évariste applique d'abord la règle n° 2 : il enlève autant de couples formés par un pion rouge et un pion vert qu'il peut, sur la première case :



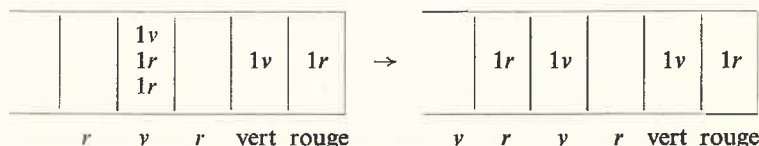
2° Il applique ensuite la règle n° 1, autant qu'il peut :



3° Il ajoute un pion rouge et un pion vert sur la case n° 2 (règle n° 2) et termine ainsi :



il lui faut ajouter un pion vert et un rouge à la 4^e case :



Évariste arrive au même résultat que précédemment.

c) Évariste peut évidemment imaginer d'autres tactiques, par exemple celle qui consiste à éliminer tout pion vert sur case rouge ou tout pion rouge sur case verte avant de passer à la suite des opérations, en introduisant, au besoin un nombre approprié de couples de pions rouges et verts.

4. Que dire des résultats?

Évariste n'est pas seul, dans sa classe, et il ne jouera pas une seule fois. Son professeur lui aura demandé de noter à chaque jeu le nombre de pions rouges reçus, le nombre de pions verts reçus, ce qu'il fera tout naturellement en écrivant un couple (ici : (18; 11)), et de noter aussi la configuration finale à laquelle il arrive. Il sera naturel (si Évariste n'y pense pas, l'un de ses copains en aura l'idée) de noter 1 une case qui contient un pion et 0 une case qui n'en contient pas : ainsi Évariste notera 11 0 11 son résultat précédent.

Parions qu'un copain d'Évariste a obtenu le même résultat! Et pourtant, on lui avait donné seulement 10 jetons rouges et 3 jetons verts. Alors?...

Et voici les couples équivalents qui interviennent! Un même résultat servira à noter, non pas un couple mais une classe d'équivalence de couples.

Si Évariste n'en est pas convaincu, son professeur l'invitera à jouer à l'envers : partant de la disposition notée 11 0 11, et appliquant les règles du jeu, il faut tout rassembler sur la case de droite. A quels couples arrive-t-on?

Voici qu'un élève annonce qu'il a reçu le couple (11; 18) et que pourtant il

n'arrive pas au résultat d'Évariste : il obtient 1001. Et en voici un troisième qui proteste : lui aussi a bien eu le couple (11; 18) et il arrive, comme Évariste, à 11 0 11. Renseignement pris, ce dernier a une case verte à droite de sa table. Qu'en conclure? (ou : de la démystification du négatif).

5. *Paragraphe laissé à l'imagination du lecteur, mon collègue,*

dans lequel il s'apercevra que 11 0 11 n'est que l'écriture de sept en base moins deux, sept étant le premier terme du couple (7, 0), considéré comme privilégié et équivalent à (18; 11). De même 1001 est l'écriture de moins sept en base moins deux.

6. *Addition en base moins deux.*

On a placé deux tables côte à côte et on rassemble les pions sur une troisième. On applique ensuite les trois règles du jeu, et on obtient le résultat 111 00. Dans cette opération, il apparaît la propriété fondamentale de la base moins deux :

$$11 + 1 = 0$$

1 ^{re} table		1 _r	1 _v	0 _r	1 _v	1 _r
2 ^e table				1 _r	0 _v	1 _r
3 ^e table		1 _r	1 _v	1 _r	1 _v	2 _r
3 ^e table		1 _r	1 _v	1 _r	1 _r 1 _v	0 _r
3 ^e table		1 _r	1 _v	1 _r	0 _v	0 _r

Que pouvons-nous tirer de tout ceci dans nos classes?

P. GAGNAIRE (C.E.S. Éd. Herriot, Bron).