

A la fin de cet article, j'ai l'impression de n'avoir énoncé que des évidences, notamment « pour dériver, il faut savoir ce qu'on dérive donc bien préciser l'application en question ». Ne s'agit-il que de difficultés soulevées artificiellement?

Quelques remarques.

1. Il n'échappe pas au rédacteur que les « définitions » précédentes de f , g , h , souffrent de ne pas être suffisamment dégagées de l'arpentage, de la physique, du découpage. Je rappelle pour mémoire des introductions du sinus « propres », aux origines immaculées.

1° par les séries entières

2° par l'inversion de l'application : $] -1, +1[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

3° par les nombres complexes.

Le sinus ainsi introduit est le « modèle mathématique » du sinus des géomètres. Dans les introductions 1° et 2°, il apparaît nettement que l'application sinus n'a rien à voir, *a priori*, avec les angles.

2. Ces questions de « variables en degrés » rappellent curieusement les « nombres-de-mètres-carrés », ces êtres introduits dans certains ouvrages à propos des mesures.

3. Il est intéressant de demander aux élèves de relever sur leurs manuels (et dans le cours) les définitions, démonstrations qui paraissent louches (ou exigent beaucoup de bonne volonté de la part du lecteur) et de les passer au crible de leur critique. Ils peuvent réaliser un beau tableau (de chasse) sur les chapitres consacrés aux limites.

4. J'ai soumis cet article à un membre (éminent) de la commission du dictionnaire. Il préférerait, pour des raisons pratiques, à « $\sin_{360}$ » la notation « $\sin_d$ » ou « sin_d », à « $\sin_{400}$ » la notation « $\sin_g$ » ou « sin_g ».

Alain GOURET (*Lycée La Martinière, Lyon*).

Vecteurs à peu de frais (suite)

L'article de notre collègue Gouret, « des vecteurs à peu de frais » (Bulletin 262, p. 254) a inspiré à notre collègue M. Rivière, maître-assistant au C.S.U. du Mans la note suivante :

Dans son très intéressant article, l'auteur avait pour souci de trouver des exemples de structures avec un matériel aussi réduit que possible, en l'occurrence $\mathcal{I}(E)$ et $F = \{0, i\}$ pour construire un exemple d'espace vectoriel. Si l'on suppose que l'étude du corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ n'a pas été faite, l'introduction de F risque de paraître très artificielle aux élèves, si, par contre, elle a été faite, c'est le caractère non numérique de F qui devient... douteuse!

Mon propos est de faire remarquer que l'on peut se passer de F et trouver dans $\mathcal{T}(E)$ tout le matériel nécessaire tant du point de vue des objets que des opérations.

$\mathcal{T}(E)$ est un groupe abélien pour l'opération Δ , et, si l'on considère l'opération $\cap$ comme multiplicative, $A = \{\mathcal{T}(E), \Delta, \cap\}$ est un anneau commutatif, unitaire et idempotent. Il se trouve que $A' = \{\{\emptyset, E\}, \Delta, \cap\}$ est un sous-anneau de A et que A' est un corps isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (il peut donc jouer avantageusement le rôle de F :

Δ	$\emptyset$	E	$\cap$	$\emptyset$	E
$\emptyset$	$\emptyset$	E	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
E	E	$\emptyset$	E	$\emptyset$	E

Le théorème : « Tout anneau commutatif est (canoniquement) un module sur l'un quelconque de ses sous anneaux », permet d'affirmer que des exemples de modules peuvent être trouvés naturellement dans $\mathcal{T}(E)$, ainsi qu'un exemple d'espace vectoriel car, A étant un corps, le module devient espace vectoriel.

$\mathcal{T}(E)$ est un espace vectoriel sur le corps $\{\emptyset, E\}$ pour les lois suivantes :

$$(X, Y) \in [\mathcal{T}(E)]^2$$

Loi interne : $(X, Y) \mapsto X \Delta Y$

Loi externe : $\begin{cases} (\emptyset, X) \mapsto \emptyset \cap X = \emptyset \\ (E, X) \mapsto E \cap X = X \end{cases}$

Si E possède n éléments alors $\mathcal{T}(E)$ est un espace vectoriel isomorphe à $(\emptyset, E)^n$. $\mathcal{T}(E)$ est toujours un espace vectoriel isomorphe à $(\emptyset, E)^E$.

Ainsi on peut trouver dans $\mathcal{T}(E)$ des exemples de toutes les structures algébriques courantes : groupe, anneau, corps, module, espace vectoriel, et bien entendu algèbre de Boole.

On peut d'ailleurs y trouver un exemple d'un groupe célèbre : le groupe de Klein.

Δ	$\emptyset$	X	$\complement X$	E	$\cap$	$\emptyset$	X	$\complement X$	E
$\emptyset$	$\emptyset$	X	$\complement X$	E	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
X	X	$\emptyset$	E	$\complement X$	X	$\emptyset$	X	$\emptyset$	X
$\complement X$	$\complement X$	E	$\emptyset$	X	$\complement X$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\complement X$	$\complement X$
E	E	$\complement X$	X	$\emptyset$	E	$\emptyset$	X	$\complement X$	E

où X est un sous-ensemble de E distinct de E et de $\emptyset$. Notons qu'avec l'opération $\cap$, on obtient un anneau et avec la réunion une algèbre de Boole.

Michel RIVIÈRE (C.S.U., Le Mans).

Si vous savez tout, alors vous ne souscrirez pas au dictionnaire
« la mathématique parlée par ceux qui l'enseignent. »