

questions qui touchent à notre activité quotidienne, le fameux dialogue se réduise à un rarissime courrier.

C'est pourquoi je me propose de demander au Comité de l'A.P.M. d'incorporer dans le questionnaire traditionnel diffusé lors de l'assemblée générale une consultation sur ces mots élémentaires (*positif* signifie-t-il ≥ 0 ou bien > 0 ? Une droite est-elle parallèle à elle-même? etc.). Et, pour faire bonne mesure, je pense qu'il conviendrait aussi d'éclairer le mot *angle*. Deux de ses acceptions sont devenues inutilisables, semble-t-il, à savoir : *a*) l'intersection (ou la réunion) de deux demi-plans, pour lesquelles « secteur angulaire saillant » (ou « rentrant ») ou tout simplement « saillant » (ou « rentrant ») ont toutes chances d'être adoptés; *b*) la variable réelle x dans $\sin x$, $\cos x$, etc., qui est celle de la cinématique et pour laquelle j'ai proposé « phase ». Restent donc en présence : d'une part la mesure des saillants ou rentrants (angle? ouverture? amplitude?...), d'autre part l'opérateur de rotation (angle? trope?...)

Sur ces points je reste naturellement tout disposé à recueillir et à publier, au moins sommairement, les suggestions, argumentations « explications de vote » que les collègues jugeront à propos de m'envoyer. Mais, par [Thalès, qu'on en sorte!

J.-M. C.

Quelle est la dérivée de l'application logarithme lorsque la variable est exprimée en degrés?

Tout le monde trouve cette question stupide (ou du moins sans intérêt). Et pourtant plusieurs manuels posent une question analogue à propos de l'application sinus. Qui n'a lu (et parfois enseigné) que la dérivée de sinus est cosinus si la variable est en radians et qu'il faut faire intervenir le facteur $\frac{\pi}{180}$ si la variable est en degrés. Je pense que lorsque les élèves « comprennent » cela, ils font preuve de plus de docilité que d'esprit critique. De quoi s'agit-il en fait?

Le programme du second cycle concernant les dérivées ne comporte que des applications dont la source est une partie de $\mathbb{R}$, dont le but est une partie de $\mathbb{R}$. Premier point : la source est une partie de $\mathbb{R}$ et non un ensemble de radians (?) ou de degrés (?). Quelle est donc cette application sinus que l'on veut dériver?

Traditionnellement, on présente aux élèves :

1° le sinus d'un angle;

2° la mesure des angles en radians, degrés, grades à partir de cela on peut définir trois applications de source $\mathbb{R}$, but $\mathbb{R}$.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \text{sinus de l'angle dont la mesure en radian est } x.$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto g(x) = \text{sinus de l'angle dont la mesure en degré est } x.$$

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto h(x) = \text{sinus de l'angle dont la mesure en grade est } x.$$

et l'on a les relations :

$$\begin{aligned} g &= f \circ c & \text{avec} & & c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ & & & & x \mapsto \frac{\pi}{180} x. \\ h &= f \circ \gamma & & & \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ & & & & x \mapsto \frac{\pi}{200} x. \end{aligned}$$

c'est-à-dire quel que soit le réel x , $g(x) = f\left(\frac{180}{\pi} \times x\right)$;

$$h(x) = f\left(\frac{\pi}{200} \times x\right).$$

D'une façon analogue on introduit :

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \text{cosinus de l'angle dont la mesure en radian est } x; \\ g_1 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \text{cosinus de l'angle dont la mesure en degré est } x; \\ h_1 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \text{cosinus de l'angle dont la mesure en grade est } x; \end{aligned}$$

et l'on démontre : $f_1 = f'$ (dérivée de f).

Par ailleurs l'on a les relations :

$$\begin{aligned} g_1 &= f_1 \circ c \\ h_1 &= f_1 \circ \gamma \end{aligned}$$

D'où l'on tire, en utilisant les théorèmes de dérivation des applications composées :

$$\text{quel que soit le réel } x, g'(x) = f'\left(\frac{\pi}{180} x\right) \times \frac{\pi}{180},$$

$$h'(x) = f'\left(\frac{\pi}{200} x\right) \times \frac{\pi}{200};$$

$$\text{soit, quel que soit } x, g'(x) = g_1(x) \times \frac{\pi}{180}$$

$$h'(x) = h_1(x) \times \frac{\pi}{200}.$$

Il paraît indispensable de distinguer f, g, h qui sont trois applications **différentes** (quoique liées intimement) par des notations **différentes**.

Je propose de garder pour f la notation $\sin$.

Je propose de prendre pour g la notation $\sin_{360}$.

Je propose de prendre pour h la notation $\sin_{400}$.

L'indice rappelle la plus petite période positive. Ces notations sont utilisées notamment dans le (très bon) livre d'exercices d'algèbre et d'analyse de M. G. Lefort.

Je pense qu'il faut mettre les élèves en garde contre la notation $\sin 31^\circ$ (mis pour $\sin_{360} 31$). Ces élèves par ailleurs doivent savoir que $\sin x$ (où x est un réel) n'a pas à être systématiquement interprété comme le sinus d'un angle.

A la fin de cet article, j'ai l'impression de n'avoir énoncé que des évidences, notamment « pour dériver, il faut savoir ce qu'on dérive donc bien préciser l'application en question ». Ne s'agit-il que de difficultés soulevées artificiellement?

Quelques remarques.

1. Il n'échappe pas au rédacteur que les « définitions » précédentes de f , g , h , souffrent de ne pas être suffisamment dégagées de l'arpentage, de la physique, du découpage. Je rappelle pour mémoire des introductions du sinus « propres », aux origines immaculées.

1° par les séries entières

2° par l'inversion de l'application : $] -1, +1[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

3° par les nombres complexes.

Le sinus ainsi introduit est le « modèle mathématique » du sinus des géomètres. Dans les introductions 1° et 2°, il apparaît nettement que l'application sinus n'a rien à voir, *a priori*, avec les angles.

2. Ces questions de « variables en degrés » rappellent curieusement les « nombres-de-mètres-carrés », ces êtres introduits dans certains ouvrages à propos des mesures.

3. Il est intéressant de demander aux élèves de relever sur leurs manuels (et dans le cours) les définitions, démonstrations qui paraissent louches (ou exigent beaucoup de bonne volonté de la part du lecteur) et de les passer au crible de leur critique. Ils peuvent réaliser un beau tableau (de chasse) sur les chapitres consacrés aux limites.

4. J'ai soumis cet article à un membre (éminent) de la commission du dictionnaire. Il préférerait, pour des raisons pratiques, à « $\sin_{360}$ » la notation « $\sin_d$ » ou « sin_d », à « $\sin_{400}$ » la notation « $\sin_g$ » ou « sin_g ».

Alain GOURET (*Lycée La Martinière, Lyon*).

Vecteurs à peu de frais (suite)

L'article de notre collègue Gouret, « des vecteurs à peu de frais » (Bulletin 262, p. 254) a inspiré à notre collègue M. Rivière, maître-assistant au C.S.U. du Mans la note suivante :

Dans son très intéressant article, l'auteur avait pour souci de trouver des exemples de structures avec un matériel aussi réduit que possible, en l'occurrence $\mathcal{I}(E)$ et $F = \{0, i\}$ pour construire un exemple d'espace vectoriel. Si l'on suppose que l'étude du corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ n'a pas été faite, l'introduction de F risque de paraître très artificielle aux élèves, si, par contre, elle a été faite, c'est le caractère non numérique de F qui devient... douteuse!