

1. Histoire.

1.1. Apollonius de Perge a vécu à Alexandrie et à Pergame à la fin du III^e siècle avant J.-C. et au début du II^e. C'est à Pergame qu'il a rencontré le mathématicien Eudème auquel il adressera plus tard son *Traité des Coniques*. Il est postérieur à Conon et à Euclide, et la tradition veut qu'il ait étudié à Alexandrie sous les successeurs de ce dernier. Il doit être plus jeune qu'Archimède d'une ou de deux générations.

En astronomie on lui doit, très vraisemblablement, la théorie des excentriques et des épicycles, adoptée par Hipparque, et qui a remplacé celle des sphères homocentriques d'Eudoxe. Il a ainsi, dans l'étude du système du Monde, régné en maître jusqu'à Kepler. En effet si Copernic mit au centre de l'Univers le Soleil au lieu de la Terre, il n'en conserva pas moins les excentriques et les épicycles.

D'ailleurs la révolution astronomique de Kepler s'appuie encore sur l'œuvre principale d'Apollonius, son *Traité des Coniques*, en huit livres. Les quatre premiers, les seuls connus au début du XVII^e siècle, nous sont parvenus dans le texte grec, les trois suivants en traduction arabe. Quant au huitième, il est perdu.

1.2. *Le Traité des Coniques*. — Les quatre premiers livres reconstituent la théorie des sections coniques à partir des résultats déjà établis soit au IV^e siècle par Ménechme, soit au III^e par Aristée, Euclide et Conon entre autres. On peut d'ailleurs reconstituer l'état de cette théorie avant Apollonius en examinant les nombreux passages d'Archimède où elle intervient.

C'est Apollonius qui donne aux coniques les noms, qui ont prévalu, de parabole, d'ellipse et d'hyperbole [4]. La technique

mathématique avec laquelle il étudie ces courbes est l'algèbre géométrique — expression de l'historien Zeuthen (1839-1920) — telle qu'elle figure dans les *Éléments* d'Euclide aux livres II et IV.

Les coniques sont pour lui les sections planes d'un cône, droit ou oblique, à base circulaire. Il est le premier à traiter, comme étant une seule et même courbe, les deux branches de l'hyperbole. Il réserve cependant ce nom à une seule branche, désignant l'ensemble sous le nom de « sections opposées ».

A partir du V^e livre, il expose des théorie toutes nouvelles et qui lui appartiennent en propre. Au livre V — qui ne fut connu en Occident qu'après 1650 — il étudie les normales aux coniques. Les pieds des normales issues d'un point donné se trouvent à l'intersection de la courbe et d'une hyperbole équilatère, très légitimement appelée de nos jours *hyperbole d'Apollonius*. La discussion de ce problème d'intersection lui fait trouver les développées des trois coniques. Il les construit par points au moyen d'un procédé qui revient au fond à écrire leur équation cartésienne.

Le livre VI est réservé aux coniques égales ou semblables. On trouve dans le livre VII nos *théorèmes d'Apollonius* sur les diamètres conjugués des coniques à centre. (La somme de leurs carrés pour l'ellipse, la différence de leurs carrés pour l'hyperbole sont constantes ainsi que l'aire du parallélogramme dont ils sont les côtés).

1.3. *Autres traités.* — Le « Grand Géomètre » a, d'autre part, publié de nombreux ouvrages assez brefs, pour la plupart des Mémoires d'analyse géométrique écrits dans des buts nettement didactiques. Ils ne nous sont guère connus que par des allusions d'auteurs postérieurs ou des extraits chez Héron, Pappus, ou dans le *Commentaire* de Proclus (v^e siècle) au premier livre des *Éléments*.

Nous savons aussi que, comme Archimède, Apollonius s'est intéressé à l'écriture des grands nombres (III^e livre de la *Collection* de Pappus), et qu'il s'est livré à une critique profonde des fondements de la géométrie.

Dans son traité des *Lieux plans*, il étudie le transformé d'une droite ou d'un cercle par similitude ou inversion (langage actuel), ainsi que les lieux des points dont la somme des distances à plu-

sieurs droites est constante, ou dont la somme des carrés des distances à plusieurs points est donnée, et diverses généralisations de cette dernière proposition. Le lieu des points dont le rapport des distances à deux points fixes est donné, qu'il étudie en particulier, figure déjà dans Aristote.

Ses traités de la *section de rapport*, de la *section d'aire*, de la *section déterminée* relèveraient de nos jours de l'algèbre élémentaire : fonction homographique, trinôme du second degré, rapport de deux trinômes du second degré. Ils sont le prétexte de délicats problèmes d'extremums, analogues par certains égards à ceux que rencontre Archimède au livre II de la *Sphère et du Cylindre*. Ce genre de questions était fort en honneur à Alexandrie et c'est pour en faciliter l'étude que Conon avait écrit une première ébauche du livre IV des Coniques.

Le livre des *Intercalations* est relatif à une technique grecque tombée en désuétude. On donne deux lieux plans, droites ou cercles, et un point. On demande de mener par le point une droite telle que la distance entre ses points d'intersection avec les deux lieux soit une longueur donnée. Apollonius étudie les cas où le problème est du second ordre.

Le Mémoire sur les *Contacts* inaugure une étude qui passionnera les géomètres jusqu'au XIX^e siècle inclusivement. Étant donnés trois éléments choisis parmi les points, les droites et les cercles du plan, on demande un cercle tangent à ces trois éléments, un point étant tangent à un cercle s'il est sur le cercle.

1.4. Influence d'Apollonius. — Sa très grande influence sur notre Renaissance mathématique est due davantage à ses traités mineurs qu'à son grand ouvrage sur les Coniques, plus difficile à lire et

peut-être trop parfait. La valeur didactique de ces traités est encore accrue du fait qu'ils ne nous sont guère connus que par les analyses qu'en a données Pappus. Ils sont ainsi apparus sous un jour assez mystérieux, bien fait pour piquer la curiosité des chercheurs. Ils présentaient par ailleurs le degré de difficulté juste suffisant pour les faire réfléchir et travailler en leur laissant la joie de la réussite.

Aussi, alors que l'on ne trouve aucun « Archimède » moderne, voit-on apparaître :

- un *Apollonius Gallus*, François VIÈTE, sur les Contacts, 1600;
- un *Apollonius Batavus*, Willebrord SNELL, 1608;
- un *Apollonius redivivus*, Marino GHETALDI, de Raguse, 1607;
- un *Apollonius Cattus*, Benjamin BRAMER, 1646-1647.

Fermat lui-même tentera une reconstitution des *Lieux plans*. Mais il se révélera disciple d'Apollonius surtout lorsque, en même temps que Descartes, il trouvera chez l'Alexandrin la méthode des coordonnées. Tous deux n'auront alors qu'à traduire les véritables calculs géométriques de leur modèle dans le calcul littéral, la « logistique spécieuse » de Viète, pour déboucher directement sur la géométrie analytique.

2. Bibliographie.

- *Mathématiques et Mathématiciens*, P. DEDRON et J. ITARD, Magnard, Paris, 1959.
- *A History of Greek Mathematics*, Th. HEATH, 2 vol., Oxford, 1921.
- *A Manual of Greek Mathematics*, Th. HEATH, Oxford, 1931.
- *Histoire générale des Sciences*, t. I, 2^e éd., P.U.F., Paris, 1966.
- *Les Coniques d'Apollonius de Perge*, trad. fr. par Paul VER EECKE, Blanchard, Paris, 1959.
- *Pappus d'Alexandrie, La Collection Mathématique*, trad. fr. par Paul VER EECKE, 2 vol., nouveaux tirages, Blanchard, Paris, 1933. (Sur Apollonius consulter surtout le livre VII de cette *Collection Mathématique*.)
- *Les Œuvres d'Euclide*, trad. fr. par PEYRARD, Blanchard, Paris, 1966.

3. Géométrie.

Hyperbole d'Apollonius, théorèmes d'Apollonius. V. la partie historique [1. 3.].

4. Note sur l'origine des noms des coniques.

La filiation des sens est intéressante. Étymologiquement *paraballein* signifie « disposer le long de », d'où, dans le langage technique de la géométrie grecque, « appliquer (une aire) à (un segment) », c'est-à-dire construire sur une base donnée a un parallélogramme dont on connaît les angles et l'aire S . De ce point de vue la *parabole* revient donc à la résolution de l'équation $ax = \lambda S$.

Une généralisation consistait à construire le parallélogramme d'aire S de façon qu'il ne recouvre pas totalement la base, le « défaut » étant un parallélogramme de mêmes angles, semblable à un parallélogramme donné, et de base x (soit, algébriquement : $ax - x^2 = \mu S$), ou bien au contraire de façon qu'il dépasse la base, l'« excès » étant encore défini de manière analogue (algébriquement : $ax + x^2 = \mu S$). Comme « défaut » et « excès » se disaient respectivement « elleipsis » et « hyperbole », ces généralisations de la *parabole* s'appelaient *parabole en ellipse* et *parabole en hyperbole* ou, en abrégé, *ellipse* et *hyperbole*.

De là on passe aisément au sens d'Apollonius, qui est resté le sens moderne. En effet il suffit de remplacer S par y^2 dans les équations ci-dessus pour obtenir les courbes telles que le carré de l'ordonnée soit « appliqué » (au sens de *paraballein*)

sur le segment donné α , soit exactement, soit « en ellipse », soit « en hyperbole ».

On notera encore à cet égard que les mots *abscisse* et *ordonnée* eux-mêmes nous viennent de la tradition apollonienne par une évolution sémantique et des traductions assez compliquées.