

bulletin de l'association des
professeurs de mathématiques
de l'enseignement public

“ de la Maternelle aux Facultés ”

Mathématiques pures et mathématiques appliquées • Formation permanente des maîtres • Symboles • Catégories et géométrie élémentaire • L'internationale de la mathématique

bimestriel - 48^e année - Mai-Juin 1969

n° 268

**Association des Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement Public.**
29, rue d'Ulm - Paris (5^e)

Président d'Honneur :

M. A. HENNEQUIN.

Bureau national de l'A.P.M.E.P.

Présidente :

M^{me} TOUYAROT, 30, avenue du 6-Juin, 14-Caen (tél. 31-81-70-40).

Vice-Présidents :

Adresser aux vice-présidents les questions relatives à l'ordre d'enseignement dans lequel ils exercent.

Enseignement élémentaire : M. CRÉPIN, I.D.E.N., 87-Limoges.

Second degré, premier cycle : M. DUMONT, 6, place Porearo, 78-Saint-Germain-en-Laye (tél. 963-46-01).

Second degré, second cycle : M. COLOMB, 44, rue Paul-Huvelin, 69-Sainte-Foy-lès-Lyon.

Second degré technique : M. ZANDSTEIN.

Écoles Normales : M^{me} AUDIN, 3, avenue Pierre-Grenier, 92-Boulogne-Billancourt.

Classes préparatoires aux Grandes Écoles : M. DEHAME, 22, avenue de la Libération, 86-Poitiers.

Enseignement supérieur : M. REVUZ, 16, rue de Rome, 78-Les Essarts-le-Roi (tél. 483-60-55). I.R.E.M. : DUVERT, 10, avenue du Point-du-Jour, 69-Lyon (5^e).

Secrétaires généraux :

M. VISSIO, 15, rue Jean-Giraudoux, 92-Sceaux (tél. 350-18-98).

M. BLANZIN, 150, avenue Félix-Faure, Paris (15^e) (tél. 250-16-41).

Secrétaires :

Animation des Régionales : M. GAUTHIER, 11, dd des Brotteaux, 69-Lyon, 6^e (tél. 78-24-00-93).

Relations internationales : M. GLAYMANN, 14, rue de Chavril, 69-Sainte-Foy-lès-Lyon (tél. 78-51-93-76).

Relations avec les autres associations : M. BLANZIN, 150, avenue Félix-Faure, Paris, 15^e (tél. 250-16-51). M. VISSIO, M^{lle} BOLON, 99, rue de la Tombe-Issoire, Paris 14^e.

Trésorier :

M. CLOPEAU, 12, boulevard Desgrandes, 92-Sceaux (tél. 702-60-72).

Trésorier administratif :

M. FERRACCI, 151 avenue Foch 92-Saint-Cloud.

Secrétaire administratif (expédition des brochures, réclamations relatives au service du *Bulletin*, etc.) :

M. A. BLONDEL, 154, avenue Marcel-Cachin, 92-Chaitillon-sous-Bagneux.

Commissions.

Commission « Recherche et Réforme » : secrétaire : M. DUCEUX, 44, rue Gustave-Chapentier, 80-Amiens.

Formation des maîtres : MM. DEHAME, DUVERT.

1^{er} degré : MM. CRÉPIN, TARALLE.

2^e degré : MM. COLOMB, DUMONT.

Technique : M. ZANDSTEIN.

Moyens audio-visuels : M^{lle} BOLON.

Informatique : M. POLY, 16, rue Germain-Pilon, Paris-18^e (tél. 255-31-30).

Commission du Dictionnaire : M. CHASTENET DE GÉRY, 4, rue des Capucins, 92-Meudon-Bellevue (tél. 027-48-48). M. CHEVALLIER, 37, avenue Anatole-France, 94-Saint-Maur (tél. 472-64-68).

Comité de rédaction du Bulletin.

Président : M^{me} TOUYAROT.

Directeur du Bulletin : M. VISSIO.

Membres : MM. CHEVALLIER DUCEUX, DUMONT, FRASNAY, GILBERT, GLAYMANN, ITARD, JACQUEMIER, ROUMANET, WALUSINSKI.

Sommaire

ACTUELLE.

- 197 Le pire des mots.

SCIENCE ET MÉTHODE.

- 199 R. BOIREL et F. SALLES : Un hiatus épistémologique, mathématiques pures et mathématiques appliquées.

SAVOIR SON SAVOIR.

- 209 *Sur la formation permanente.*
H. FREUDENTHAL : AUX Pays-Bas.
I. R. VESSELO : Une expérience britannique locale.
A. REVUZ : Quelques réflexions.

ÉCHANGES.

- 227 J.-M. CHEVALLIER : La (petite) tour de Babel.
M. PAULY : A propos des symboles.
B. LEVENT : Catégories et géométrie élémentaire.
A. ADLER : Des triangles.
Le DILY : Le coin du bricoleur.
Parmi nos lettres.

LES LIVRES.

- 241 BOUTELLER : Trois ouvrages.
W. MOUNTEBANK : Notes de non-lecture.

LA VIE DE L'ASSOCIATION.

- 243 J. FORT : Colloque de Bucarest de septembre 1968.
Le bloc-notes de l'A.P.M.

Le *Bulletin* 268 contient de plus deux fiches de

« *La mathématique parlée par ceux qui l'enseignent* » : Boole, booléen.

Les annonces : Aristo (253), Belin (259), Bordas (251), A. Colin (264), Curta (249), Delagrave (couv. 3), Desvigne (263), Dunod (248), l'École (250), Eyrolles (255) Foucher (258), Gauthier-Villars (260), Graphoplex (254), Istra (252), Nathan, (256, 257), Vuibert (261), Wesmaël (262).

Le coin du Trésorier

Adresse de l'A.P.M.E.P.
29, rue d'Ulm, Paris, 5^e
C.C.P. Paris 5708-21

Les cotisations et les abonnements sont valables pour l'année civile, du 1^{er} janvier au 31 décembre. Tarifs pour l'année civile 1969 :

Cotisation. — Elle comprend l'abonnement au *Bulletin* et le service des fascicules d'énoncés.

Cotisation normale 22 F

Cotisation réduite (stagiaire C.P.R., élèves des E.N.S. et des I.P.E.S., jeunes gens effectuant leur service militaire, retraités) 12 F

Abonnement. — Pour les personnes n'appartenant pas à l'Enseignement Public, pour les collectivités, les bibliothèques, ..., en France et à l'étranger 30 F

Prix de vente au numéro 5 F

Modes de paiement.

L'importance du nombre des adhérents, qui approche de dix mille, nous oblige à utiliser un fichier automatique. La bonne tenue de ce fichier exige que chacun de nous se conforme strictement aux règles suivantes :

1^o ADHÉSIONS NOUVELLES, ABONNEMENTS NOUVEAUX : adresser au siège de l'A.P.M.E.P., sous enveloppe timbrée, une fiche rose dûment remplie, et un chèque à l'ordre de l'A.P.M.E.P. Paris 5 708-21.

Note du Secrétariat : utilisez de préférence un chèque de virement à notre C.C.P. ou, à la rigueur, un chèque bancaire. Nous renverrons à son expéditeur tout autre mode de paiement.

2^o RENOUVELLEMENT DES COTISATIONS ET ABONNEMENTS : vous avez reçu un appel pour ce renouvellement dans le courant de janvier; cet appel porte un *coupon détachable* qu'il faut joindre au titre de paiement (voir ci-dessus la note du Secrétariat).

L'appel lui-même doit être conservé. Vous y trouverez, chaque fois que vous en aurez besoin, le numéro de votre fiche dans notre répertoire. Vous y joindrez le talon de votre chèque et ce couple constituera votre carte d'adhérent.

Note du Secrétariat : si vous aviez renouvelé votre cotisation avant d'avoir reçu l'appel, veuillez nous adresser le coupon détachable qui nous est indispensable, en rappelant la date et la nature de votre premier envoi. Ceci pour nous éviter toute erreur dans la tenue de votre compte.

3^o CHANGEMENT D'ADRESSE (OU D'ÉTAT CIVIL) : porter sur une feuille l'ancienne adresse (ou l'ancien état civil), rappeler le numéro de votre carte A.P.M.E.P., puis donner les renseignements nouveaux; envoyer cette feuille sous enveloppe timbrée au siège de l'A.P.M.E.P.

Note du Secrétariat : impossible de retrouver rapidement et sans erreur votre fiche si vous n'indiquez pas votre numéro A.P.M. (lequel est rappelé sur la bande ou l'étiquette-adresse du Bulletin).

Le Trésorier vous demande instamment de vous conformer à ces règles, faute de quoi les tâches du Secrétariat et de la Trésorerie sont embouteillées, au risque de perturber une bonne expédition du *Bulletin*.

Les Régionales de l'A.P.M.E.P.

Dans chaque académie, il existe une section régionale de l'A.P.M.E.P. qui organise diverses activités pédagogiques et qui s'organise elle-même librement. En particulier, dans certains départements, des sections départementales se réunissent et sont rattachées à la Régionale de l'académie.

Pour chaque Régionale ou section, nous donnons le nom et l'adresse d'un responsable, président ou secrétaire, qui fournira des renseignements complémentaires sur les activités de l'association dans la région ou le département.

- *Aix-Marseille* : M^{lle} MABILLY, 136, bd National, 13-Marseille 3^e.
- *Amiens* : M. DUCEUX, 44, rue Gustave-Charpentier, 80-Amiens.
- *Besançon* : M. ROBBE, Les Prés-Cottreaux, 39-Salins-les-Bains, (Tél. 167).
- *Section de Belfort* : M. DAUTREVAUX.
- *Bordeaux* : M. SIGNORET, lycée Montaigne, 33-Bordeaux.
- *Caen* : M. LETERRIER, 34, avenue du 6-Juin, 14-Caen.
- *Clermont-Ferrand* : M. ALMERAS, 74, bd de l'Eclache, 63-Royat.
- *Dijon* : M. VOGT, lycée Carnot, bd Thiers, 21-Dijon.
- *Section de Mâcon* : M^{me} CHAUSSE, 32, rue de la Liberté, 71-Mâcon.
- *Section de Nevers* : M. J. DE JUNTIER.
- *Section de Chalon* : M. GANTHIER.
- *Grenoble* : M. KUNTZMANN, B.P. 7, 38-Saint-Martin-d'Hères.
- *Section de Chambéry* : M. COMPAIN, lycée technique, 1, rue du Coloubrier, 73-Chambéry.
- *Lille* : M. LEGRAND, professeur, lycée Faidherbe, 59-Lille.
- *Limoges* : M. CRUZ, 11, rue Lamartine, 87-Bellac.
- *Lyon* : M. ANGUENOT, 103, rue Pasteur, 69-Caluire.
- *Section de Saint-Etienne* : M. VERSET, villa Epilog, rue H. Dunant, 42-Saint-Chamond.
- *Montpellier* : M. CALCINE, rue des Eglantiers, 34-Montpellier.
- *Nantes* : M. DES COGNETS, 11, rue Gl-de-Sonis, 44-Nantes.
- *Nancy* : M. B. MERCIER, 48, rue Jacques-Gruber, 54-Nancy.
- *Nice* :
- *Section de La Seyne-sur-Mer* : M^{me} PAPAZIAN, Colle d'Artaud, 83-La Seyne-sur-Mer.
- *Orléans* : M. HEUZÉ, dépt de mathématiques, faculté des sciences, 45-Orléans-la-Source.
- *Section de Montargis* : M. KISTER, C.E.G. Pontonnière, 45-Chalette-sur-Loing.
- *Section de Tours* : DELACHET, BASTIEN.
- *Paris* : M. HAMEAU, 38, avenue du Général-de-Gaulle, 94-Vincennes, (Tél. 808 43 79).
- *Poitiers* : M. DEHAME, 22, avenue de la Libération, 86-Poitiers.
- *Reims* : M. THIERUS, 57, rue David, 51-Reims.
- *Rennes* : M. LE DILY, lycée technique Joliot-Curie, 35-Rennes.
- *Section de Brest* : M. STEPHAN, collège naval, 29 N-Brest.
- *Rouen* : M^{me} METENIER, Faculté des sciences, 76-Rouen.
- *Strasbourg* : M. DE COINTET, 62, rue Diedriez, 67-Sélestat.
- *Section d'Allemagne Fédérale* : Président, M. ALEXANDRE, proviseur, lycée de Fribourg; secrétaire, M. DEBU, lycée Charles-de-Gaulle, S.P. 69037.
- *Section Mosellane* : M. SCHNEIDER, 54 bis, rue de Theuleu, 57-Metz.
- *Toulouse* : M. FRAISSE, 8, rue des Glycines, 31-Toulouse.
- *Côte-d'Ivoire* : M. MATHURIN, B.P. 20 694, Abidjan.
- *Sénégal* : M. SEYNI NIANG, lycée Van-Valenhoven, Dakar.

Le Comité national de l'A.P.M.E.P.

Sortants en 1969 : M. AMIOT (C.E.G., Paris); M^{me} AMAR (Paul-Valéry, Paris); MM. BARBUT (Ecole Pratique des Hautes Etudes); CHOQUET (Faculté des Sciences, Paris); CONDAMINE (Lakanal, Sceaux); M^{lle} FELIX (La Fontaine, Paris); MM. GÉNÉSTINE (Lycée Technique, Clichy); GILBERT (Lycée Technique, Versailles); M^{me} LAULANET (Ecole Normale d'Institutrices, Paris).

Sortants en 1970 : MM. D. BERNARD (Faculté des Sciences, Strasbourg), BLANZIN (C.E.G., Paris); CHEVALLIER (Marcellin-Berthelot, St-Maur); CLOPEAU (Lakanal, Sceaux); M^{lle} DEROO (Racine, Paris); MM. DUCEUX (Lycée mixte, Amiens); GAUTHIER (Ampère, Lyon); JACQUEMIER (Inspecteur départemental, Grenoble); M^{me} TOUYAROT (Ecole Normale, Caen).

Sortants en 1971 : M^{lle} BIARD (E.N.S., Fontenay), MM. BROUSSEAU (Instituteur, Bordeaux); CROZES (Henri-IV, Paris); DUMONT (Lycée international, Saint-Germain-en-Laye); DUVERT (La Martinière, Lyon); P.-L. HENNEQUIN (Faculté des Sciences, Clermont); M^{lle} LICHAU (Institutrice, Calvados); M. RAMIS, (Spéciales, Louis-le-Grand, Paris); M. VISSIO (Lakanal, Sceaux).

Sortants en 1972 : M^{me} AUDIN (Ecole Normale d'Instituteurs, Paris); M. J. COLOMB (Lycée A.-Charial, Lyon); M. CRÉPIN (I.D.E.N., Limoges); M. DEHAME (Math. Sup. Lycée, Poitiers); M. FAUQUETTE (C.E.G., Lens); M. GOURET (Math. Sup. Lycée La Martinière, Lyon); M. KLEIN (Faculté des Sciences, Grenoble); M. ROUMANET (Lycée Rodin et I.P.N., Paris); M. REVUZ (Faculté des Sciences, Paris).

Membres de droit : M^{lle} BRÉNEOL (Claude-Monet, Paris); MM. CAMY-PEYRET (Lycée Technique, Creil); REICHEN (Lavoisier, Paris).

LES PUBLICATIONS DE L'A.P.M.E.P.

En plus de son *Bulletin* servi à tous les adhérents de l'A.P.M.E.P. et à ses abonnés, l'A.P.M.E.P. a décidé, en 1960, de publier des livres ou des brochures écrits par un ou plusieurs de ses membres et pouvant servir au progrès de l'enseignement des mathématiques.

Les tirages des premiers titres de sa collection « les brochures de l'A.P.M. » ayant été limités ont été rapidement épuisés. Restent disponibles, parmi les derniers ouvrages parus :

7. *Lecture commentée d'une méta-démonstration de Gödel*, par J. Balibar, Maître-Assistant à la Faculté des Sciences de Poitiers (mai 1962) 32 p., prix 3 F.

10. *Le Cours de l'A.P.M. — 3. Éléments de topologie*, par A. et G. Revuz, 1966, 250 p., prix 27 F.

Bibliothèque d'Enseignement Mathématique, nouvelle collection d'ouvrages pour la formation permanente des maîtres :

1. *Pour apprendre à conjecturer : initiation à la statistique* par MM. L. Guerber et P.-L. Hennequin (Université de Clermont), 1967, 240 p., prix 25 F (cartonné 30 F).

2. *Pour apprendre à conjecturer : initiation au Calcul des Probabilités*, par MM. Guerber et Hennequin, 1968, 232 p., prix 25 F (cartonné 30 F).

3. *La mathématique parlée par ceux qui l'enseignent* par la Commission du Dictionnaire de l'A.P.M.E.P. (voir p. 240).

Bibliothèque d'Information sur l'enseignement mathématique, brochures qui ne sont ni des manuels, ni encore moins des traités et qui devraient avoir le caractère incisif des libelles...

1. *Charte de Chambéry*, 1969, 1971, 1973, 1976, 1980, ... étapes et perspectives d'une réforme de l'enseignement des mathématiques, octobre 1968, 32 p., prix 2 F.

2. *Matériaux pour l'histoire des nombres complexes*, par Jean Itard, janvier 1969, 32 p. illustrées, prix 3 F.

Conditions de vente et d'expédition.

Les ouvrages précédents ne sont pas en vente en librairie. Pour se les procurer, opérer de la façon suivante :

1° Rédiger une formule de virement postal au compte de l'A.P.M.E.P. : Paris 5708-21, du montant des livres demandés (les prix sont compris franco de port).

2° Bien préciser au dos du virement les titres des ouvrages commandés.

3° Envoyer les trois volets du virement, sous enveloppe timbrée à 0,30 F, au Secrétaire administratif de l'A.P.M.E.P., M. Blondel, 154, avenue Marcel-Cachin, 92-Châtillon-sous-Bagneux.

Vous recevrez les ouvrages commandés en paquet-poste dans le plus court délai.

Les ouvrages cités ci-dessus sont édités au prix coûtant. Aucune remise ne peut donc être consentie à quelque titre que ce soit. Aucun des ouvrages précédents n'est vendu en librairie.

* * *

Le secrétariat de l'A.P.M.E.P. participe également à la diffusion des œuvres complètes d'Evariste Dupont dont le seul ouvrage paru est : *Apprentissage mathématique. I*, un volume de 248 p., (Sudel éditeur) (Prix : 15 F franco pour les membres de l'A.P.M.E.P.).

Le pire des mots

Alors que « la mathématique parlée par ceux qui l'enseignent » sort des presses, alors que la commission du dictionnaire a été unanimement félicitée et encouragée par l'assemblée générale de Besançon, vous pensez bien que je ne veux pas ici déprécier son ouvrage. Ce n'est pas de langue mathématique proprement dite que je dissèterai, mais d'expressions très répandues qui nous concernent : « mathématiques modernes », « recyclage ». Quelle est la pire, quelle est celle qui nous fait ou nous fera le plus de mal ? Il n'y a pas si longtemps, j'hésitais pour en décider.

Lorsque Van der Waerden publia la première édition de Modern Algebra (Berlin, 1931), son excellente intention était de diffuser les idées nouvelles présentées par E. Artin et E. Nøther dans leurs cours de l'Université de Hambourg. Il ne se doutait pas que, trente ans plus tard, on mettrait « moderne » à toutes les sauces, si j'ose dire. Pour qu'un livre de mathématique se vende mieux, certains éditeurs le veulent « moderne » à la façon dont certains dentifrices sont qualifiés « irradiés »...

Ce n'est qu'une mode, cette appellation, ce slogan commercial. Mais cela ne va pas sans ravages dans l'esprit du public. Principal inconvénient, celui de laisser croire qu'il y avait des mathématiques classiques désormais dépassées, inutilisables et des mathématiques modernes corrigeant toutes les erreurs des classiques, merveilleusement adaptées à nos besoins actuels et cependant définitivement achevées. Autre inconvénient, aussi grave peut-être : faire penser que la réforme de l'enseignement mathématique que nous préconisons concerne exclusivement le contenu, voire même seulement le vocabulaire ou le symbolisme.

« Moderne » était donc bien le pire des mots puisque l'opposition du classique au moderne n'a jamais eu de signification pour un mathématicien dont le travail est par nature actuel et par nécessité fondé sur l'acquis antérieur (même quand ce mathématicien juge criticable la manière dont cet acquis a été obtenu). Pire des mots aussi puisque la réforme permanente de l'enseignement mathématique que nous voulons promouvoir ne peut être conçue que globalement, dans son contenu, dans son vocabulaire, dans ses méthodes, dans ses implications psychologiques et sociologiques, dans ses perspectives,... Nous voulons créer un enseignement mathématique qui soit en mouvement comme la science elle-même, en mouvement comme l'humanité elle-même, fut-elle celle des enfants...

Cependant j'avais tort. Il y a un mot pire encore, celui de « recyclage ». Il est né dans l'industrie et concernait alors les ingénieurs. Je n'ai pas compétence pour traiter de ces questions et c'est seulement du recyclage des professeurs que je veux parler.

Après beaucoup d'autres, et qui ont fait à ce sujet de si beaux discours qu'ils n'étaient suivis d'aucune réalisation. Mais il faut reconnaître qu'un premier pas

a été fait avec la création des trois premiers I.R.E.M. qu'un second pas est promis avec la création des I.R.E.M. de Besançon, Bordeaux, Marseille et Rennes : ce n'est pas le galop, mais ce sont des premiers pas et ceux-là coûtent!

Il n'en est que plus urgent de clarifier notre vocabulaire, Nous réclamons une formation permanente, non un recyclage.

Recyclage est une opération exceptionnelle qui permet de faire passer les professeurs d'un niveau n_1 préalable à un niveau n_2 en principe supérieur. Lorsque les professeurs sont au niveau n_2 (et y être signifie avoir suivi tel recyclage), le recyclage est terminé. Dans la mesure où le recyclage requiert des efforts de la part des recyclés et des crédits supplémentaires de la part des Finances on pourrait dire : le recyclage, c'est un mauvais moment à passer. Après, la vie normale (?) reprend.

Ce que nous pratiquons au sein de l'A.P.M.E.P., ce que nous avons demandé et partiellement obtenu avec la création de plusieurs I.R.E.M., c'est l'organisation de la formation permanente des maîtres. Pas « un mauvais moment à passer », une véritable mutation de la fonction enseignante : obtenir que soit réalisée cette vérité que tout éducateur est un chercheur en pédagogie, et cette autre vérité première que tout enseignement mathématique est une re-crédation mathématique. Ce que nous demandons, c'est la re-crédation perpétuelle.

Entre « recyclage » et « formation permanente », il n'y a donc pas divergence mais contradiction. Selon que vous laisserez employer une expression ou l'autre, l'I.R.E.M. sera un lieu de passage d'autant moins attrayant que le compte-gouttes financier ne permettra même pas de refaire les peintures tous les dix ans ou bien la maison commune de tous ceux qui enseignent des mathématiques, un foyer de pensée libre et de progrès pédagogique. Recyclage signifie réforme en apparence seulement. Formation permanente des maîtres signifie réforme permanente de notre enseignement. c'est-à-dire quelque chose de vivant qui pourra grandir si nous le voulons. Alors, le pire des mots ? Ce serait sans doute d'en inventer un nouveau, de s'en gargariser, et d'oublier de réaliser la réforme permanente, de la vivre... On se plaît à médire du verbalisme ; méfions nous plus encore de la léthargie.

Gilbert WALUSINSKI.

Un hiatus épistémologique : mathématiques pures et mathématiques appliquées

René BOIREL et Francisque SALLES

Institut National des Sciences Appliquées, Lyon.

1. Avant-propos.

On conçoit habituellement les « mathématiques appliquées » comme l'application des mathématiques pures à des situations concrètes dont on veut donner une représentation rationnelle, représentation qui reste toujours approchée.

Mais il faut bien convenir que, le plus souvent, cette application n'est ni immédiate, ni directe. Elle exige de l'ingéniosité non seulement pour adapter des méthodes générales aux cas particuliers, mais aussi pour inventer les méthodes d'application proprement dites. Ce sont ces dernières qui constituent, en effet, l'essentiel des « mathématiques appliquées ». Le mathématicien appliqué doit se rendre compte de l'influence des hypothèses simplificatrices, nécessaires pour établir le modèle, sur le résultat final.

Notamment le physicien, comme l'ingénieur, doit choisir entre plusieurs manières d'effectuer un calcul numérique, la plus précise, voire la plus rapide, et surtout celle qui permet d'obtenir des résultats significatifs. S'il s'agit, par exemple, de calculer une intégrale, on ne peut dans la majorité des cas concrets, utiliser les méthodes classiques : la notion d'intégrale implique, en effet, l'accroissement infiniment petit de la variable. En particulier, avec un ordinateur électronique où ces accroissements ne peuvent être que finis et, par conséquent discontinus, ce sont des méthodes de calcul numérique par différences finies qui permettent de calculer la valeur de l'intégrale : méthodes des rectangles, des trapèzes, de Simpson, de Gauss, de Radon, de Tchebycheff... Des considérations de précision et de rapidité des calculs guideront le choix de celle qui est la plus adaptée.

Dans beaucoup de cas, l'expression mathématique qui permet de représenter un phénomène concret n'est pas connue. A quoi sert de donner une traduction symbolique d'une expérience ou du fonctionnement d'un moteur si l'on ne peut l'utiliser, précisément parce qu'on ne sait pas effectuer les calculs correspondants? C'est pourquoi la tâche des mathématiques appliquées est d'élaborer non seulement des méthodes de calcul, mais aussi et surtout des méthodes de traitement mathématique des phénomènes permettant d'aboutir à des expressions calculables.

Notamment, quand pour exprimer l'évolution d'un phénomène, le physicien ou l'ingénieur doit utiliser une équation aux dérivées partielles, il est souvent embarrassé, car l'on ne sait pas résoudre la plupart du temps une telle équation. Il est alors bien obligé d'avoir recours à des procédés lui permettant de passer d'une expression comprenant des dérivées partielles à un système linéaire ou à un système d'équations différentielles.

Pour cela, il tente de concevoir une modification de la structure théorique du phénomène considéré qui laisse intactes ses caractéristiques principales et rende possible cette nouvelle transcription. Une telle représentation, tout en n'étant qu'approchée, exprime alors les propriétés essentielles qu'il s'agit de calculer.

On se rend compte qu'une modification dans la manière de concevoir le phénomène envisagé est aussi indispensable pour passer des dérivées partielles aux équations différentielles, dès qu'on prend conscience que le premier type d'équation exprime souvent un mélange de deux propriétés de la matière. Par exemple, si dans l'étude de l'écoulement de la chaleur on aboutit à l'équation de Fourier, n'est-ce pas parce que l'on tient compte de deux propriétés simultanées : la matière emmagasine de la chaleur, mais aussi elle la laisse écouler. De même, en résistance des matériaux, pour les plaques, la coexistence d'efforts normaux et de cisaillement aboutit à la nullité du double Laplacien (fonction d'Airy).

Dès lors, si l'on veut obtenir un modèle de ces phénomènes utilisable numériquement, il faut séparer leurs propriétés simultanées. Déjà Aristote n'affirmait-il pas que, sur le plan de la représentation mathématique du monde physique « on peut arriver à d'excellents résultats en posant comme séparé ce qui n'est pas séparé » (1)?

Pour la chaleur, si l'on modifie la structure théorique des phénomènes en séparant leurs propriétés simultanées, on substitue à un conducteur continu, pourvu de la double qualité de récepteur de chaleur et de conducteur, un ensemble discontinu de récepteurs seuls et de conducteurs de chaleur régulièrement espacés (2). On fait apparaître ainsi des expressions mathématiques calculables numériquement.

(1) ARISTOTE, *Métaphysique M*, chap. 3, 1078a.

(2) Cf. F. SALLES « Impossibilité d'appliquer à certains problèmes techniques les résultats des mathématiques pures », in Actes du Colloque « Calcul numérique, calcul physique », Paris 1960, p. 29.

De même on exprime habituellement dans les traités de mécanique les vibrations d'une poutre à l'aide d'une équation aux dérivées partielles, dont on ne connaît la solution que dans des cas très rares. Pour les cadres, il n'y a même pas de systèmes aux dérivées partielles. Ces difficultés proviennent de ce qu'on envisage alors le mélange d'une propriété relative à la masse, l'énergie cinétique, et d'une propriété relative à l'élasticité, l'énergie élastique. On devrait donc aboutir à des expressions mathématiques plus simples si l'on pouvait transformer la structure théorique de la « poutre » de manière à séparer ces deux propriétés. Pour cela, on considère la poutre comme dénuée de masse, mais conservant toutes ses propriétés élastiques. Ainsi, elle devient un « ressort » qui emmagasine à certains moments de l'énergie sous forme élastique et à d'autres moments la rejette. Si l'on répartit ensuite judicieusement les masses de la poutre en des points bien choisis — pratiquement au milieu de segments en lesquels on divise la poutre —, on tient compte de l'énergie cinétique.

Bien entendu, c'est la confrontation des nombres obtenus par les nouvelles formules mathématiques avec les résultats théoriques connus et les résultats expérimentaux qui permettra de savoir si le nombre et l'emplacement des masses choisis conviennent et, éventuellement, de les préciser par approximations successives (1).

Ces exemples montrent que le traitement mathématique des problèmes de physique et de technique, loin de se réduire à l'application consciencieuse des connaissances théoriques, exige de l'ingéniosité, autant que les mathématiques pures. Et cela d'autant plus que souvent ingénieurs et physiciens doivent forger leurs propres instruments mathématiques. N'est-ce pas la preuve que les « mathématiques appliquées » ne sont pas l'application directe des mathématiques pures aux situations concrètes? On ne fait des mathématiques appliquées qu'en cherchant un modèle symbolique adapté aux résultats expérimentaux.

Même lorsqu'on est amené ainsi à reconnaître une relative autonomie aux mathématiques appliquées, on a tendance à réserver aux mathématiques pures le privilège de la pleine intelligibilité : elles seules éclaireraient, en définitive, les opérations symboliques effectuées par le praticien, voire inventées par lui.

Or le calcul opérationnel, qui est un exemple remarquable de l'autonomie des mathématiques « appliquées », révèle que dans certains cas ces dernières peuvent avoir une toute autre interprétation physique que leur interprétation théorique élaborée par les mathématiciens.

La plupart du temps la recherche mathématique appliquée du physicien précède la théorie du mathématicien et conduit finalement ce dernier à des théories nouvelles. A la fin du siècle dernier le physicien et ingénieur Heaviside inventa le calcul symbolique en posant $\frac{d}{dt} = p$. Il aboutit à un calcul très

(1) Cf. F. SALLES « Étude des vibrations mécaniques par la méthode de concentration des masses », Communication faite au Congrès de l'Association française pour l'avancement des Sciences, Tours 1965.

ingénieurs des circuits électriques. Critiqué avec violence par les théoriciens il répondit que son ignorance de la digestion ne l'empêchait point de manger! Wiener, Carson, Nyquist, Bloch, vers 1930, identifièrent son calcul avec la transformation de Laplace et l'appliquèrent aux servo-mécanismes. Ce fut l'école française de mathématiques avec Leroy, Poly, Humbert, Schwartz, qui élucida complètement le calcul symbolique. Il faut toutefois remarquer que les physiciens l'employaient déjà depuis plus de cinquante ans!

2. Exemple concret.

Beaucoup de phénomènes physiques consistent en le passage brusque d'un état A constant à un autre état B constant; on peut citer le passage d'un courant dans un circuit, la charge d'un condensateur, la mise sous charge d'une éprouvette de traction. On idéalise mathématiquement ce passage par la « fonction échelon unité » (unit step de Heaviside) $u(t)$.

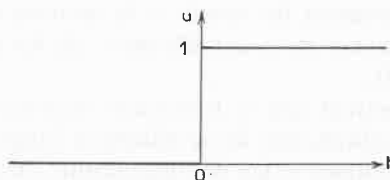


FIG. 1.

Curieuse fonction que cette fonction « échelon unité »! Elle est nulle pour $t \leq 0$, et atteint brusquement la valeur 1 dès que $t > 0$. Comment interpréter cette discontinuité caractéristique ou, plus exactement, puisque la fonction ne peut avoir deux valeurs différentes au même instant, comment rendre compte du passage brusque de la valeur 0 à la valeur + 1?

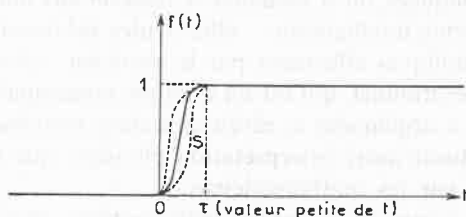


FIG. 2.

L'interprétation proposée par les physiciens est simple. Le déclenchement d'un phénomène f débute par une période « transitoire », où la grandeur caractéristique de ce phénomène s'élève d'une manière continue, selon une courbe en « S », de la valeur 0 à la valeur correspondant à la production effective du phénomène (pour $t = 0_+$, comme disent les mécaniciens) (Fig. 2).

Cette courbe en « S » n'est jamais la même, car la période transitoire du phénomène se modifie à chaque nouveau déclenchement. En effet, ce dernier transforme les éléments constitutants de l'appareillage permettant de produire le phénomène. Par exemple, s'il s'agit du passage d'un courant électrique dans un conducteur les étincelles de contact ou de rupture modifient les plots du commutateur.

La dérivée de la fonction $f(t)$ représentée par la figure 2, soit $f'(t)$ est représentée figure 3, elle est telle que son aire

$$\int_0^{\tau} f'(t) dt = f(\tau) - f(0) = 1$$

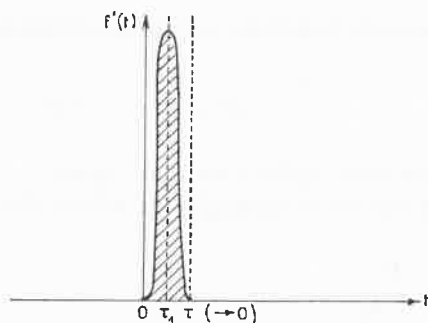


FIG. 3.

Le Mécanicien peut donner une interprétation physique intéressante comme une pression s'exerçant sur une petite surface ABCD rectangulaire de dimensions x et e (fig. 4).

Interprétation que nous pouvons styliser en introduisant une pression par unité de longueur (fig. 5).

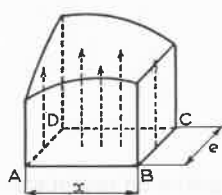


FIG. 4.

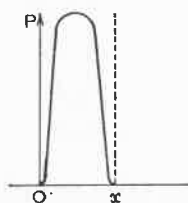


FIG. 5.

Nous pouvons encore poursuivre la stylisation en remplaçant la courbe 5 par un rectangle de même aire (fig. 6). On peut toujours supposer que l'aire de ce rectangle est égale à l'unité.

Le Mécanicien stylise encore la courbe 6 pour pouvoir utiliser la théorie des vecteurs; il suppose que x tend vers zéro, l'aire étant sans cesse égale

à un, et il obtient le vecteur force unitaire (qui est un non sens physique) (fig. 7), mais ce modèle mathématique est singulièrement efficace en utilisant les théories des vecteurs!

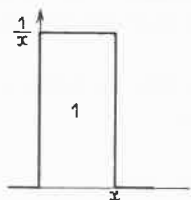


FIG. 6.

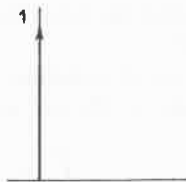


FIG. 7.

La dérivée seconde de la fonction $f(t)$ est représentée (à l'aide de la figure 3) par la figure 8

$$\int_0^{\tau} f''(t) dt = f'(\tau) - f'(0) = 0$$

Les deux aires de cette figure sont donc égales.

On stylisera par deux rectangles de même aire.

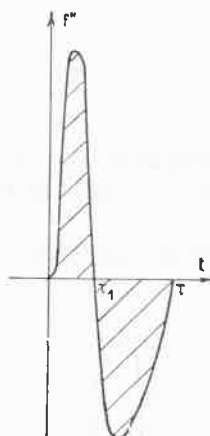


FIG. 8.

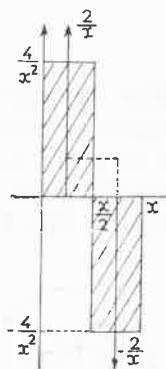


FIG. 9.

Le Mécanicien poussera plus loin la stylisation en remplaçant les rectangles par des vecteurs opposés de grandeur $\frac{2}{x}$ (fig. 9). Si x tend vers zéro nous aurons un couple unitaire : $\frac{2}{x} \times \frac{x}{2} = 1$.

Le Physicien considérera la fonction échelon comme limite de la fonction $f(t)$ (fig. 2), quand τ tend vers zéro; nous aurons une idéalisation commode en mathématiques de $f(t)$, c'est la fonction échelon unité. $f'(t)$ tendra vers la première fonction de Dirac. $f''(t)$ tendra vers la deuxième fonction de Dirac

dont les « images » sont p et p^2 dans le calcul de Heaviside équivalent à la transformation de Laplace-Carson

$$F(p) = p \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

Nous remarquons que les notions de force et couple sont connues depuis des siècles! Aussi la fonction échelon unité et ses dérivées (les fonctions de Dirac) sont des notions extrêmement claires pour le Physicien.

Pour interpréter la discontinuité caractéristique de la fonction « échelon unité », les mathématiciens procèdent d'une tout autre manière. Ils cherchent à construire une fonction continue qui tende vers une limite, de façon que cette limite soit précisément la fonction « échelon unité ».

Ils définissent d'abord la première fonction de Dirac comme la limite pour λ tendant vers l'infini de la fonction $y = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda^2 t^2}$ représentée figure 10 (courbe en cloche de Gauss) dont l'aire est égale à l'unité (1) (fig. 10).

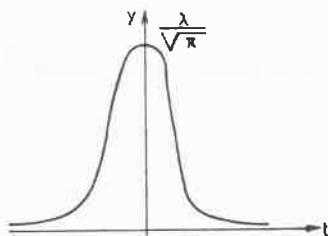


FIG. 10.

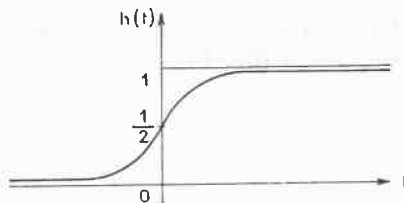


FIG. 11.

Si l'on intègre cette fonction de $-\infty$ à t , on obtient la fonction $h(t)$ représentée figure 11, l'ordonnée à l'origine étant égale à $\frac{1}{2}$.

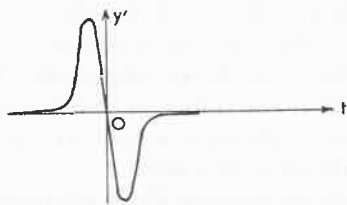


FIG. 12.

Pour $\lambda \rightarrow \infty$, $h(t)$ tend vers la fonction « échelon unité », en passant par la valeur $\frac{1}{2}$ pour $t = 0$.

La dérivée de $y = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda^2 t^2}$ est $y' = -\frac{2\lambda^3 t}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda^2 t^2}$ représentée figure 12. Elle tend vers la deuxième fonction de Dirac si λ tend vers l'infini.

(1) Cf. POTIER et LAPLUME : « Le calcul symbolique » (Hermann) — appendice : fonction d'erreur de Gauss, p. 126 et suiv.

Telles sont les courbes qui pour le Mathématicien pur tendent vers la fonction « échelon unité » et les deux premières fonctions de Dirac (dérivées première et seconde de la fonction « échelon unité »). Ces fonctions de Dirac encore appelées « fonctions précurseur », ce sont elles qui changent les conditions initiales d'un phénomène physique.

Or ces modes de représentation élaborés par les mathématiciens pour rendre compte des particularités de la fonction « échelon unité » sont inutilisables par le physicien. En effet l'interprétation physique de la fonction « échelon unité » étant, comme nous l'avons indiqué antérieurement, la courbe suivante (fig. 13) :

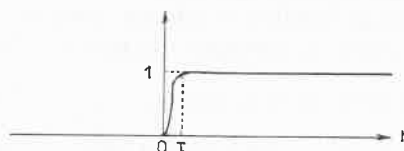


FIG. 13.

et non la courbe conçue par les mathématiciens, qui passe par la valeur $\frac{1}{2}$ pour $t = 0$ (fig. 14) :

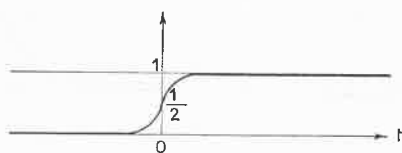


FIG. 14.

Mêmes remarques pour les courbes du physicien et du mathématicien dont les limites donnent la première et la deuxième fonctions de Dirac.

Ainsi une fonction (fig. 13) a été imaginée par les physiciens pour représenter des phénomènes observés au laboratoire. Pour le besoin du calcul, le physicien a dû l'idéaliser par la fonction « échelon unité ». Le mathématicien oubliant la représentation physique ne raisonne que sur la fonction idéalisée et la vide de sa signification première.

Nous sommes donc en présence d'une interprétation mathématique d'une fonction imaginée initialement pour représenter un phénomène physique, qui est un pur non sens pour le physicien. Ce dernier ne peut pas, par conséquent, l'utiliser.

Ce qui est plus important, c'est que l'emploi de cette fonction par le théoricien non averti de son sens physique aboutit dans certains cas, comme dans l'étude des équations différentielles des servo-mécanismes, à des erreurs très graves touchant les conditions initiales pour la fonction dite « entrée », cette fonction et toutes ses dérivées étant nulles au temps zéro.

La Science française est entièrement redevable au P^r Laurent Schwartz

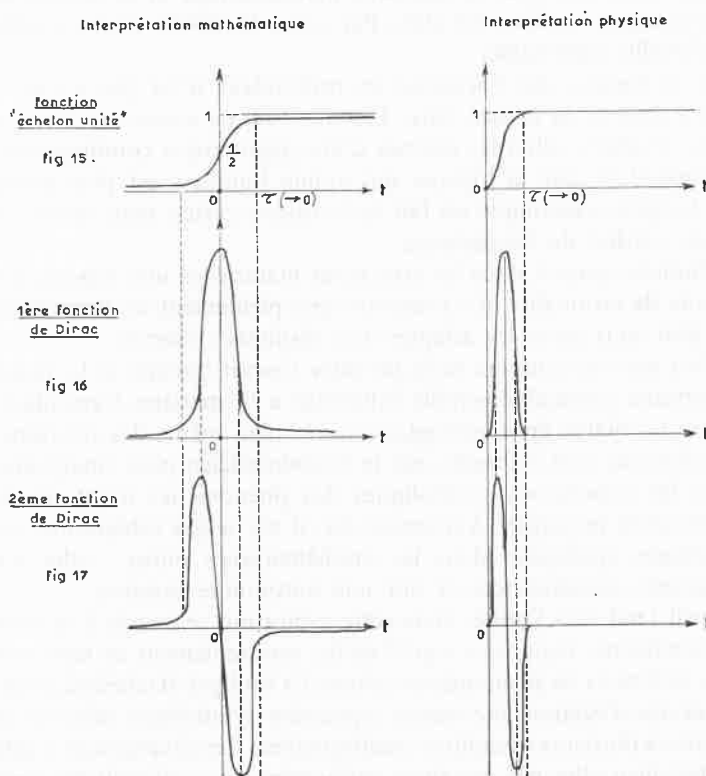
d'avoir, par ses travaux sur les distributions, complètement élucidé le problème des fonctions de Dirac du point de vue théorique, ce qui permit de bâtir le calcul opérationnel sur de solides bases.

Ainsi les représentations de la fonction « échelon unité » et de ses dérivées (ou « fonctions de Dirac ») conçues par le mathématicien ne correspondent pas à celles élaborées par le physicien.

C'est ce que montre nettement le tableau récapitulatif suivant (fig. 15, 16, 17).

TABLEAU RÉCAPITULATIF

DES INTERPRÉTATIONS DE LA FONCTION « ÉCHELON UNITÉ » ET DES « FONCTIONS DE DIRAC »
DONNÉES RESPECTIVEMENT PAR LE MATHÉMATICIEN ET PAR LE PHYSICIEN



3. Conclusion.

Ainsi une expression symbolique forgée spécialement en vue d'applications pratiques peut perdre toute signification physique à la suite du traitement que lui font subir les mathématiciens pour rendre compte de ses particularités.

Dans un tel cas, ce ne sont pas les mathématiques pures qui ont le plus grand pouvoir éclairant pour le physicien, mais bien les mathématiques appliquées.

Ces exemples nous mettent en présence d'un hiatus épistémologique : quand on peut représenter un phénomène par une expression mathématique, ce ne sont pas nécessairement les constructions théoriques élaborées par le mathématicien pour interpréter cette dernière qui traduisent le mieux les propriétés du phénomène.

Dans cette perspective, la question posée par Heaviside prend tout son relief : « Comment se fait-il qu'un être physique représenté par un vecteur n'ait pas toutes les propriétés des vecteurs ? »

La matière se prête à des représentations rationnelles, comme le prouve le développement même de la physique mathématique et la réussite des opérations techniques fondées sur elles. Par suite, le monde est la manifestation d'une rationalité indéniable.

Mais la logique qui l'organise en profondeur n'est pas en tous points identique à celle de la pensée pure. Leibniz, tout en concevant Dieu créant le monde en calculant, selon les normes d'une gigantesque combinatoire, reconnaissait cependant que la logique qui anime l'univers est plus parfaite que la nôtre. L'esprit scientifique est fait de hardiesse certes, mais aussi d'humilité en face du verdict de l'expérience.

Si l'homme perçoit dans les structures matérielles une réponse favorable à son besoin de rationalité, il n'y retrouve pas pleinement ses propres constructions. Il doit sans cesse les adapter aux résultats observés.

Il n'y a pas une coupure radicale entre l'esprit humain et le monde, puisqu'une certaine rationalité semble inhérente à la matière. Cependant il faut reconnaître un hiatus épistémologique sur le plan même des relations rationnelles : celles qui sont élaborées par le mathématicien pour interpréter rigoureusement les expressions symboliques des phénomènes n'ont pas toujours une signification physique. Autrement dit, il n'y a pas intégration totale des mathématiques appliquées dans les mathématiques pures : elles n'en sont pas de simples conséquences et ont une autonomie certaine.

L'esprit tend vers l'unité, mais cette aspiration se heurte à la multiplicité des « rationalismes régionaux » qu'il édifie, non seulement en rencontrant des domaines différents de phénomènes comme l'a souligné Bachelard, mais encore lorsqu'il essaye d'éclairer une même expression symbolique selon les perspectives propres à plusieurs disciplines intellectuelles. Ces divergences d'interprétation ne dévoilent-elles pas certaines antinomies du « rationalisme appliqué » ?

Ainsi le dialogue de l'esprit et de la matière ne s'exprime pas uniquement par la reconstruction progressive des phénomènes à l'aide de relations rationnelles devant être rectifiées pour s'ajuster à des mesures plus précises. *Il est illustré aussi par les tensions, existant au sein même de la rationalité, entre le souci de rigueur, qui anime les mathématiques pures, et la fidélité à l'expérience, qui oriente les mathématiques appliquées.*

R. B. et F. S.

Sur la formation permanente des professeurs de mathématiques

N.D.L.R. — Un colloque sur ce thème, organisé par l'Unesco, s'est tenu à Hambourg, dans le cadre de l'Institut de l'Unesco pour l'éducation, du 21 au 26 octobre 1968. L'A.P.M.E.P. a toujours attaché une importance primordiale à cette question. La Rédaction remercie donc les organisateurs de l'avoir autorisée à publier ici trois des rapports présentés lors de ce colloque.

Aux Pays-Bas

Hans FREUDENTHAL

*Professeur à l'Université d'Utrecht,
Président de la C.I.E.M.*

1. Par résolution du 12 juin 1961 du Secrétaire d'État pour l'Enseignement, les Arts et les Sciences (*) fut installée une Commission pour la Modernisation du Programme de l'Enseignement Mathématique (**) (appelée désormais la Commission), composée de dix professeurs d'Université, un chargé de travaux scientifiques, deux chargés de travaux didactiques, deux inspecteurs et trois professeurs de lycées.

La tâche de la Commission était d'étudier la modernisation de l'enseignement mathématique et, en particulier, de donner son avis sur :

1° les sujets qui seraient mis à l'épreuve dans des classes-pilotes sous la direction de certains instituts, et les modifications impliquées par ces expériences dans les programmes et les examens de ces classes;

(*) Staatssecretaris van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen.

(**) Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde.

2° les mesures qui mettraient les professeurs des lycées en état d'être mieux informés sur le développement récent des mathématiques;

3° le problème du programme pour les élèves particulièrement doués pour les mathématiques.

Dans la réunion du 19 juillet 1961 où la Commission fut effectivement installée, le Secrétaire d'État soulignait la nécessité

1° de rechercher quelles parties des mathématiques modernes devraient être introduites dans l'enseignement secondaire pour réduire la divergence existant alors entre la mathématique universitaire et la mathématique scolaire,

2° de rechercher par des expériences pilotes quels sujets pourraient être réalisés à l'école et quels seraient les moyens didactiques d'y parvenir,

3° d'étudier la possibilité de programmes spéciaux pour les élèves doués pour les mathématiques,

4° d'étudier les mesures qu'on devrait prendre pour favoriser l'orientation des maîtres sur le développement moderne des mathématiques.

2. Pour l'intelligence de ce qui suit il faut esquisser le système d'éducation néerlandais :

a) enseignement primaire, 6-12 ans,

b1) enseignement secondaire qui donne accès à l'université (appelé désormais enseignement secondaire académique en imitant un usage linguistique américain); cours de 5 ou de 6 années,

b2) enseignement secondaire « non académique » (écoles professionnelles ou d'éducation générale); cours de 3-4 années,

c) enseignement supérieur.

3. Comme étrange conséquence d'un développement historique singulier, aux Pays-Bas, les universités sont moins engagées dans la formation des maîtres que dans la plupart des autres pays. Avant la création des écoles modernes (*) en 1868, l'enseignement secondaire était donné dans les écoles latines (gymnases) par des « candidats » des études classiques. A cette époque les universités n'enseignaient pas les langues modernes et elles ne formaient qu'un nombre très faible de mathématiciens. Pour combler cette lacune, on créa des examens de maître d'enseignement secondaire. Assez curieusement on ne créa pas d'institutions qui préparaient à ces examens. La formation des futurs maîtres fut abandonnée à l'initiative privée. Jusqu'à la dernière guerre mondiale c'étaient en général des instituteurs, formés par les écoles normales primaires, qui subissaient ces examens extra-universitaires pour obtenir le diplôme de maître d'enseignement secondaire. Pour se préparer aux examens ils suivaient des cours privés donnés par des diplômés plus expérimentés mais totalement dépourvus de formation universitaire. Le programme officiel de ces examens en mathématiques est resté constant depuis 1871 jusqu'en 1958. Peu à peu on parvint à mieux organiser les cours pour la préparation à ces examens, mais sans qu'ils deviennent jamais officiels. Le rendement de ces examens était très bas. On s'efforce actuellement de donner cette formation dans les

(*) Hogere Burgerschool.

universités. En tout cas la grande majorité des professeurs de mathématique dans notre enseignement secondaire académique n'a pas reçu une formation universitaire. Il va sans dire que la formation des maîtres dans l'enseignement primaire et dans l'enseignement secondaire non-académique est non universitaire. Même la plupart des maîtres enseignant dans les écoles normales de préparation des maîtres de l'enseignement primaire n'ont pas subi une formation universitaire.

4. Au début, le mandat ministériel donné à la commission (voir 1) fut interprété comme ne concernant que la modernisation de l'enseignement secondaire *académique*. Plus tard, avec l'accord du ministère, on a étendu l'interprétation à l'enseignement secondaire total et récemment, on est même arrivé à faire attention aux relations avec l'enseignement primaire. Dans ce but, la Commission a été élargie.

Dès le début elle a déployé une activité efficace. Elle s'est divisée en un grand nombre de sous-commissions qui ont organisé et surveillé l'élaboration de nouveaux manuels d'enseignement mathématique et qui ont guidé la mise à l'épreuve de ces nouveaux textes dans des classes-pilotes. Les nouveaux programmes officiels établis conformément aux projets de la Commission sont devenus effectifs au début de l'année scolaire 1968-1969.

La Commission eut conscience du fait que les programmes et les manuels ne sont pas tout, et que le programme modernisé sera enseigné non par des livres ou des machines, mais par des maîtres. La plupart de nos maîtres ignorent les mathématiques modernes, ou dans le cas contraire, ont souvent perdu le contact avec elles, en enseignant quotidiennement de vieilles mathématiques. Si l'on change les programmes, les maîtres doivent donc se mettre résolument à l'étude des nouvelles idées. On a déjà connu des modifications de programme dans le passé, mais qui n'ont jamais pris l'aspect de la rupture qu'est le passage à ce qu'on appelle les mathématiques modernes.

La Commission eut conscience du danger de proposer des programmes nouveaux à des maîtres insuffisamment préparés. En effet, le but principal est l'amélioration de l'enseignement mathématique. La mathématique moderne n'est pas une panacée; pour servir l'amélioration de l'enseignement, elle doit être enseignée par des maîtres pleins de l'esprit de la mathématique moderne. Si cette condition n'est pas remplie, l'introduction des mathématiques modernes peut être difficile ou dangereuse.

Il est certain que l'on peut dénaturer aussi facilement la mathématique moderne que l'ancienne et inventer sur les ensembles, les groupes, les corps ou la logique d'aussi sots problèmes qu'on le fit sur les triangles, les fonctions trigonométriques, les progressions, les logarithmes, les faisceaux de coniques, etc. Les premiers symptômes de cette dégradation sont déjà visibles dans certains manuels.

Il est certain que les maîtres doivent bien connaître ce qu'ils doivent enseigner. Chacun admet que ce n'est pas assez. Les connaissances du maître doivent déborder les connaissances qu'il enseigne. Il doit être capable de les dominer d'un point de vue plus élevé. Un maître qui ne sait rien de plus des mathématiques modernes que ce qu'il en enseigne lui-même les enseignera comme si elles étaient leur propre fin, et s'engagera dans des impasses. Il ne saura pas où il doit insister et où il doit ouvrir des portes et en vieillissant,

il s'enfermera et il enfermera ses élèves avec lui, dans le monde étroit des manuels et des sujets d'examen.

La Commission décida de tirer parti des quelques années où subsisteraient les anciens programmes, pour mieux préparer les maîtres à enseigner le nouveau qu'on ne l'avait fait pour les anciens.

Pour ces raisons pendant ses premières années l'activité de la Commission gravita autour des problèmes de recyclage des professeurs de lycée. On avait formé une sous-commission pour l'adaptation des maîtres (*), appelée désormais la Sous-Commission. Elle a déployé une grande activité, en préparant et organisant des cours d'adaptation, d'abord pour des maîtres des écoles secondaires académiques et plus tard aussi pour ceux des écoles secondaires non-académiques.

5. La première réunion de la Sous-Commission eut lieu le 6 décembre 1961. Dans sa troisième réunion, le 22 février 1962, on fixa les détails d'un rapport que la Commission soumettrait au ministère. Ce rapport, signé le 19 juin 1962, recommandait l'organisation de cours d'adaptation pour les maîtres des écoles secondaires académiques et proposait des détails de réalisation, à savoir l'organisation de deux stages de cinq jours qui auraient lieu en août ou septembre 1963 et en janvier 1964 dans une ou plusieurs universités, et l'organisation de soirées locales d'études dans l'intervalle entre ces deux stages. Le rapport était accompagné d'un programme scientifique de ces stages et d'un budget qui s'élevait à 41 750 florins.

6. Voici l'organisation effective de ces stages qui furent les premiers d'une série de six stages organisés jusqu'en janvier 1968.

Les stages furent annoncés aux chefs des établissements d'enseignement secondaire académique par le Secrétaire d'État. Il fut communiqué que la participation serait gratuite et que les frais de voyage et de séjour seraient payés par le gouvernement. Il fut demandé aux chefs d'établissements de donner la permission nécessaire aux professeurs qui voudraient participer aux cours.

Au mois de mars, on convoqua des réunions d'information à Utrecht, Groningue et Eindhoven, pour renseigner les futurs participants sur le caractère des cours.

Les cours eurent lieu aux universités d'Utrecht, de Groningue et d'Eindhoven (École Polytechnique) les 23-28 septembre 1963 (Eindhoven 16-21 septembre) et les 6-10 janvier 1964. C'est-à-dire *après* les vacances d'été et d'hiver; les permissions nécessaires furent accordées sans difficulté.

Furent admis aux cours les enseignants diplômés des écoles secondaires académiques et des écoles où sont formés les instituteurs de l'enseignement primaire (noter que, à cause de la pénurie de maîtres il y en a pas mal de non-diplômés). La participation était de 550, c'est-à-dire à peu près la moitié de tous les professeurs de lycée qualifiés. (Ce nombre est resté à peu près constant dans toute la suite de ces cours et même l'ensemble des participants n'a pas beaucoup changé).

L'horaire du premier cours comprenait deux heures et demie de conférences

(*) « Subcommissie herscholing », plus tard appelée « Subcommissie herorientering ».

le matin et deux à trois heures de travaux écrits l'après-midi. Plus tard on a préféré placer les conférences l'après-midi et les travaux le matin.

Les conférences furent données en général par des professeurs d'université, exceptionnellement par des maîtres de conférences (*); y ont participé neuf conférenciers dans les trois centres. Pour les travaux écrits on avait adopté une méthode qui avait été développée dans certains établissements d'enseignement supérieur après la dernière guerre. Les participants sont partagés en petits groupes, disons en dizaines, qui sous la direction et avec l'aide d'instructeurs traitent des problèmes pas trop difficiles, mais quand même de caractère fondamental (non de routine). Le nombre des instructeurs était de 57. Ils étaient recrutés parmi les assistants avancés des établissements d'enseignement supérieur, où l'on appliquait ce système d'enseignement.

Les programmes des cours dans les trois centres étaient uniformes. Les participants reçurent des notes polycopiées qui avaient été préparées par quatre personnes. Ces notes contenaient aussi les problèmes des travaux écrits.

Dans les intervalles entre les cours, le travail fut continué dans des groupes d'études régionaux, — 25 environ avaient été constitués —, conduits par des participants plus intéressés. Ces groupes étudiaient des notes préparées et de la littérature recommandée par les organisateurs. Ces groupes pouvaient faire appel à l'aide de collaborateurs scientifiques des universités qui avaient assisté aux travaux écrits des cours. (Ce système de groupes d'étude a été continué pendant les intervalles entre quelques autres stages ultérieurs).

7. Originellement la Sous-Commission n'avait envisagé que deux cours de cinq journées, mais la poursuite de cette entreprise fut demandée par les participants avec une telle énergie (et cela s'est répété chaque fois) que la Sous-Commission ajoutait toujours un nouveau stage qui, chaque fois, devait être le dernier. Voici la liste de tous les cours donnés jusqu'alors :

1^o Septembre 1963, 5 journées : Théorie des ensembles, logique, algèbre linéaire.

2^o Janvier 1964, 5 journées : Analyse linéaire.

3. Septembre 1964, 5 journées : Topologie.

4^o Septembre 1965, 5 journées : Aspects groupaux de la géométrie élémentaire.

5^o Septembre 1966, 2 journées ; janvier 1967, 5 journées (à Eindhoven : septembre 1966, 5 journées); Probabilité et statistique.

6^o Janvier 1968 (à Eindhoven, septembre 1967), 5 journées : Mathématiques des machines à calculer.

Les cours 1^o-4^o furent organisés à Utrecht, Groningue, Eindhoven; les mêmes universités plus Amsterdam collaborèrent au 5^o, et pour le 6^o Delft fut ajouté à cette liste. Les cours 1^o-5^o avaient 550 participants, au 6^o il y en avait 650. Le nombre de conférenciers variait de 9 à 11, le nombre des instructeurs de 57 à 67. Le nombre de pages de notes était entre 34 et 180.

8. On avait annoncé aux participants qu'on ne traiterait aucune mathématique qui soit immédiatement applicable dans l'enseignement scolaire, même

(*) Lectoren.

après la réforme des programmes, Les matières et méthodes enseignées dans ces cours seraient plutôt considérées comme le fond (background) de ce qu'on enseignerait à l'école. Nonobstant des remarques accidentelles de l'un ou l'autre conférencier sur des relations avec quelque sujet de l'enseignement scolaire, on s'est consciemment abstenu de conclusions didactiques. On jugeait que dans cette matière les professeurs de lycée étaient plus compétents que ceux des universités et qu'il valait mieux engager les participants à tirer eux-mêmes les conséquences didactiques que de les leur imposer. Plusieurs fois on envisagea une approche plus systématique de cette étude didactique et, cette année, tout en hésitant, on a résolu de terminer les cours *scientifiques* d'adaptation et d'essayer une autre espèce. Ce seraient à partir de septembre 1968 des cours brefs (jeudi après-midi jusqu'à samedi matin), tenus à Utrecht, Groningue et Eindhoven, où l'on traiterait du point de vue didactique les sujets suivants : les nombres réels, machines à calculer, probabilité et statistique, géométrie, algèbre, logique et ensembles. Après une conférence faite par un professeur d'université on se divisera en groupes de discussions où l'on traitera des problèmes bien concrets de l'enseignement scolaire.

9. Pour arriver à l'appréciation de l'œuvre des cours d'adaptation pour les maîtres de l'enseignement secondaire académique, je pourrais citer quelques passages des procès-verbaux de la Sous-Commission où régnait un scepticisme foncier. Quoiqu'on eût décidé que le niveau du cours serait celui de la première année de l'université, on craignait que ce ne fût une prétention trop ambitieuse. En effet la plupart des participants étaient des gens qui n'avaient jamais étudié les mathématiques modernes ou même qui n'avaient pas été formés à l'université. Le résultat effectif fut une surprise des plus agréables. Il apparut que le niveau d'exposition était plutôt trop bas, ce qui excitait parfois des discussions (bienvenues) sur l'exactitude du langage. La grande majorité des participants était capable de résoudre les problèmes des travaux écrits; les instructeurs furent très heureux du niveau de leurs disciples qui dépassait de beaucoup celui des étudiants de la première année. La réaction des participants eux-mêmes était enthousiaste. Le fait qu'ils continuaient le travail dans des groupes d'études, qu'ils demandaient la continuation des cours et qu'ils y retournaient fidèlement, prouve que cet enthousiasme était fondé. Pour corroborer cette appréciation je pourrais citer des déclarations écrites et imprimées.

10. Pour analyser de plus près les résultats, je dois d'abord dire qu'avant les cours de la Sous-Commission il y a eu des cours d'adaptation pour les professeurs des lycées depuis la fin de la seconde guerre mondiale. Aucun de ces cours, organisés par diverses institutions, n'a attiré autant de participants et n'a excité autant d'enthousiasme que les cours de la Sous-Commission. La grande participation peut être expliquée par le caractère plus officiel de ces cours et par le désir, de plus en plus pressant, des professeurs de se préparer plus profondément aux mathématiques modernes qu'ils devraient enseigner. Mais cela n'explique pas tout. Il va sans dire que les cours étaient bien préparés, mais cela seul n'aurait pas suffi. Ce qui distingue ces cours des cours usuels d'adaptation dans notre pays et dans d'autres est l'accent sur l'activité propre des participants. La moitié du temps disponible fut réservée aux exercices où l'on travaillait individuellement dans un groupe en présence d'un assistant

dont la tâche n'était pas de répéter la matière, mais d'assister les participants dans leurs efforts individuels. Ce système avait été développé dans l'enseignement mathématique de quelques-uns de nos établissements d'enseignement supérieur, où il a bien fonctionné. Ce fut un avantage qu'il soit appliqué aux cours de la Sous-Commission par des assistants bien entraînés. Il faut ajouter que, en général, ils étaient plus jeunes que les participants des cours. Notre crainte que ce soit un obstacle psychologique, ne se justifia pas.

Le principe de l'activité individuelle fut la composante qui a déterminé le succès de ces cours. Avant ces cours on a connu des cours composés de conférences où les participants faisaient une connaissance passive des mathématiques modernes. Après coup, on doit constater que ces cours antérieurs n'ont eu d'autre effet que de nourrir l'idée que la mathématique moderne était une discipline réservée aux professeurs des universités, abstraite, distante de cent lieues de l'école, hors d'atteinte des professeurs de l'enseignement secondaire. On nous a témoigné une grande surprise que la mathématique moderne soit tellement facile, que ce soit une chose que tout le monde pouvait apprendre. Apparemment c'est un sentiment qui ne surgit pas de la connaissance passive des mathématiques modernes, mais qui pour sa genèse présume l'activité individuelle de celui qui l'éprouve. Nous savons bien que la mathématique moderne est facile, mais évidemment c'est un fait qu'on n'apprend qu'en exerçant cette mathématique.

De ces expériences j'ai appris une leçon très précieuse : je crois que des cours où l'on demande aux participants d'écouter des conférences sans leur donner l'occasion d'exercer leur propre activité, sont de très petite valeur, ou plutôt que cette espèce de cours est un crime qu'on commet contre les participants. Cette espèce de cours est le sol où se développent des complexes d'infériorité. Dans ces auditeurs passifs on nourrit et renforce le respect pour une science hors de leur atteinte, mais qui serait désavoué par une approche plus active.

11. J'ai mentionné qu'au début la Commission ne s'est occupée que de l'enseignement secondaire académique. Ce ne fut qu'en 1965 que les autres formes d'enseignement secondaire ont attiré l'attention. Les premiers cours d'adaptation pour les maîtres de cet enseignement furent organisés en 1965-66. Puisqu'en 1968 le nouveau système d'enseignement secondaire et les nouveaux programmes devraient être effectifs, c'était un peu tardif. Mais on ne doit pas regretter ce retard. Le nombre des maîtres de mathématiques de l'enseignement secondaire non-académique est un multiple de ceux occupés dans l'enseignement secondaire académique. Le nombre d'assistants universitaires ne suffirait pas à l'organisation de cours pour les maîtres de l'enseignement secondaire non-académique. En outre, le monde scientifique et didactique où vivent les assistants de l'enseignement supérieur est probablement trop éloigné de l'enseignement secondaire non-académique pour que leur enseignement puisse être effectif. Nous avons jugé que les cours pour les maîtres de l'enseignement secondaire non-académique devraient être donnés plutôt par les professeurs des lycées qui connaîtraient le mieux les idées et les besoins de leurs collègues de l'enseignement secondaire non-académique. Or, au moment où l'on a commencé les cours d'adaptation pour les maîtres de l'enseignement secondaire non-académique, on a eu la chance de pouvoir recruter un grand

nombre de professeurs de lycée suffisamment préparés grâce aux cours d'adaptation précédents pour cette catégorie d'enseignants. Je donne la liste des nouveaux cours :

1° 1965-66 : 20 jeudis de 16 h 30 à 18 h 15, Groningue et Leeuwarden, algèbre moderne, 100 participants.

2° 1966-67 : 12 leçons de quatre heures, un mardi et un jeudi par quinzaine dans neuf centres; théorie des ensembles et géométrie, à Groningue et Leeuwarden suite du cours précédent, 750 participants.

3° 1967-68 : 12 leçons de quatre heures, un mardi et un jeudi par quinzaine seize centres, algèbre moderne (à Groningue et Leeuwarden : le nombre réel), 1 150 participants.

4° 1968 : un cours abrégé avec le programme du cours 2° dans seize centres pour 950 participants.

5° 1968-69 : suite des cours précédents. On attend 2 000 participants.

12. Évidemment avec l'extension de la tâche le montant des frais des cours a beaucoup augmenté. Actuellement, la Commission dispose d'un budget de fl. 666 500 environ par an, dont la plus grande partie (fl. 536 500) est nécessaire pour l'organisation des cours d'adaptation.

Jusqu'alors c'étaient les instituts mathématiques de quelques universités qui se chargeaient de l'organisation des cours d'adaptation — tâche d'un poids croissant de plus en plus. D'une part, on est convaincu que la formation continue des maîtres doit être une institution permanente, d'autre part on doit reconnaître que c'est une charge trop lourde pour les universités. Il y a trois ans la Commission a soumis au gouvernement le projet d'un institut national de formation continue des maîtres de l'enseignement mathématique. Malgré des démarches répétées le ministère n'a pas attribué à ces projets l'attention qu'ils méritent aux yeux de la Commission et de tous ceux qui ont profité des efforts de la Commission.

H. F.

Une expérience britannique locale

par I.-R. VESSELO.

Pendant neuf ans, de 1956 à 1965, j'ai dirigé un enseignement annuel de mathématiques au Cheshire College of Education à Alsager. Le but était de pallier la pénurie de professeurs de mathématiques, ce qui se fit de deux façons :

a) en utilisant des professeurs d'autres disciplines (par exemple des professeurs d'éducation physique à qui l'âge rendait leur métier pénible, ou des professeurs donnant un enseignement technique élémentaire et qui voulaient accéder à une fonction mieux rémunérée),

b) en améliorant la formation de ceux qui enseignaient déjà les mathématiques à un niveau élémentaire, pour qu'ils puissent le faire à un niveau plus élevé. C'est dire que l'éventail des connaissances initiales était largement ouvert : aussi se restreignait-on à de petits effectifs (une quinzaine par an) afin de pouvoir s'occuper individuellement de chacun des participants.

Les établissements dont venaient ces professeurs continuaient à leur verser intégralement leur traitement. L'âge des participants s'échelonnait de 20 à 50 ans. Les meilleurs résultats furent obtenus par ceux qui avaient enseignés une dizaine d'années : c'est semble-t-il le meilleur moment pour un rafraîchissement des connaissances.

Les cours avaient pour sujets :

a) Mathématique pure (4 cours par semaine), essentiellement de l'algèbre et de l'analyse, présentées à deux niveaux différents adaptés aux connaissances préalables des étudiants.

b) Mathématique appliquée (2 cours par semaine).

(1) Traduction d'un rapport présenté au colloque sur la Formation continue des maîtres de l'enseignement secondaire organisé à Hambourg du 21 au 26 octobre 1968 par l'Institut de l'Unesco pour l'Éducation.

c) Enseignement (3 cours par semaine) : discussion des problèmes pratiques et philosophiques, en soulignant la nécessité en ce domaine de la recherche et de l'expérimentation.

d) Mathématique pratique, deux séries de séances au cours desquelles les étudiants s'exerçaient à construire des appareils ou des modèles pouvant aider l'enseignement en éclairant les abstractions mathématiques. (Ils ont été particulièrement brillants dans ce domaine, remportant deux prix de la Fondation Guinness, un de 100 livres pour un travail sur la stéréoscopie, un de 50 livres pour un travail sur le rôle du laboratoire de mathématiques dans l'enseignement).

Eurent également lieu des cours moins longs sur les statistiques, la mathématique moderne, le calcul numérique et les ordinateurs électroniques. Le cas échéant d'autres sujets choisis selon les possibilités des instructeurs, furent également traités brièvement. Des cours particuliers furent également donnés et chaque étudiant devait au moins avoir un tel cours par semaine. En outre, il se trouvait toujours un professeur à la disposition des étudiants qui, vivant et travaillant sur place toute l'année, profitèrent de cet avantage. On consacra trois semaines aux questions pratiques de l'enseignement et on mit l'accent sur l'expérimentation et la découverte. On encourageait les élèves à choisir à cet effet, un type d'école qui leur était inconnu. Les écoles avoisinantes, surtout celles qui avaient quelque chose de nouveau à présenter, ont apporté une aide précieuse.

La mathématique pure constituait la partie principale du cours. Tout d'abord, parce que la plupart des étudiants pensaient aux examens et à leur avancement futur, mais aussi parce qu'on estimait qu'un procédé qui consistait à rompre avec les méthodes traditionnelles d'enseignement devait être compensé dans d'autres domaines par l'élaboration de nouveaux concepts. La meilleure manière d'améliorer les qualités d'enseignant d'un professeur est de le remettre lui-même dans la situation d'un étudiant qui travaille à acquérir de nouvelles connaissances. Il est clair en outre que bien des qualités pédagogiques peuvent s'acquérir par l'exemple : aussi avait-on choisi les meilleurs professeurs pour donner l'enseignement sur les mathématiques afin que nos étudiants aient un modèle de qualité.

Sous le titre assez vague d'Enseignement se groupaient toutes sortes de sujets, sans programme préconçu. Dans un certain sens, les premiers cours furent essentiellement destructeurs. Les professeurs arrivaient avec beaucoup d'idées toutes faites qu'ils avaient acceptées sans esprit critique. Il était nécessaire de les examiner, d'en accepter certaines et de rejeter les autres avant que l'on puisse passer à une reconstruction. Pour certains professeurs, et surtout les plus âgés, ce fut la partie la plus pénible. Ils furent obligés de réévaluer leurs points de vue et de tout remettre en question. Mais, une fois ce cap franchi, des perspectives nouvelles et attrayantes s'offraient à eux, et ils étaient prêts pour expérimenter et s'intéresser à la modernisation.

La plupart des cours prenaient la forme de discussion, dont les sujets étaient empruntés à des rapports de comité d'études, à des articles sur la recherche pédagogique, ou étaient fournis par les professeurs à partir de leur propre expérience. Les discussions ont toujours été passionnantes et se sont parfois prolongées bien tard après la fin du cours. Cet échange d'idées fut

la partie la plus fructueuse du cours, l'accent étant mis sur la recherche et sur l'examen des nouvelles idées. On rendit fréquemment visite aux écoles qui avaient quelque chose de nouveau à présenter; les visiteurs étaient toujours les bienvenus, et on répondait à toutes les questions.

La mathématique appliquée fut essentiellement un cours d'atelier et de laboratoire, en liaison avec la situation qui se présenterait dans une classe. Pour faciliter la compréhension, des appareils ont été fabriqués par les étudiants; la qualité varie selon leur habileté et leurs conceptions de la mathématique. Plusieurs classes ont conservé ces appareils comme objets de décoration.

Parmi les enseignements plus courts, il faut spécialement citer la statistique qui a fait l'objet d'un cours élémentaire sur des données numériques, leur collecte, leur présentation et leur interprétation mathématique. Le premier but était d'éliminer l'idée, donnée par les manuels scolaires, que tout problème peut recevoir une réponse exacte. Le second était de donner au professeur une idée objective sur les méthodes de notation et de contrôle des connaissances. On demandait ensuite à tous les étudiants d'entreprendre une recherche de statistique sur un problème qui les intéressait. D'habitude, ces problèmes avaient un lien avec la classe et l'enseignement, mais ce n'était pas toujours le cas. Si cette brève recherche permettait de montrer à l'étudiant combien ses connaissances ou les techniques qu'il avait apprises étaient limitées, c'était déjà un remarquable résultat en soi.

L'enseignement de la mathématique moderne fut étroitement lié aux expériences dirigées par notre Collège (Shropshire Mathematics Experiment). Nos étudiants purent à la fois approfondir les fondements théoriques et appliquer ce qu'ils avaient appris à un enseignement réel dans une classe. Les écoles engagées dans l'expérimentation faisaient souvent appel à eux, et aussi bien nos étudiants que ces écoles tirèrent grand profit de cette collaboration.

Outre des cours consacrés à des considérations historiques ou pratiques, la plupart des autres enseignements furent axés sur l'emploi des calculateurs électroniques. On organisa des visites pour voir des ordinateurs en fonctionnement, ainsi que deux cours sur la programmation: l'un sur un calculateur de la première génération, le plus vieux que nous pûmes trouver et qui était suffisamment lent pour permettre à l'étudiant d'apprendre à programmer et de suivre les diverses phases de la résolution d'un problème qui exigea deux jours; l'autre sur le calculateur le plus récent que nous pûmes trouver, et dont la programmation exigea deux jours d'étude. Ces cours ont fait une forte impression sur les étudiants et ont contribué à élargir leur vision en leur montrant que la réalité déborde largement ce que contiennent les manuels scolaires. D'autres visites furent organisées dans des musées, des industries, des établissements de recherche, la Bourse, une station météorologique, etc...

Le but de ces visites était de montrer comment la mathématique est appliquée dans le monde extérieur à la classe et de fournir, par leur utilisation en classe, des renseignements exacts sur le monde actuel. Le temps fut, en ces matières, le principal obstacle: les activités se suivirent à un rythme accéléré. Mais l'enthousiasme des étudiants montra que l'effort en valait la peine.

Un important travail, qui n'a pas encore été mentionné, est la rédaction d'un mémoire. On demandait à chaque étudiant de faire une étude individuelle et de produire une mini-thèse sur un sujet de son choix. Ces sujets variaient, depuis les plus « académiques », dans le cas d'un étudiant plus avancé qui

envisageait de poursuivre ses études en vue d'un examen ultérieur, jusqu'à l'étude des méthodes ou des techniques de la classe, ou des applications pratiques dans l'industrie. Beaucoup de temps fut consacré à ces études poursuivies parfois après la fin du stage. Elles contribuèrent surtout à rassembler les diverses parties du cours, à lui donner son unité.

On peut affirmer sans exagérer que ceux qui ont fréquenté ces cours compteront parmi les meilleurs professeurs. Ils ont remporté de fréquents succès, ont obtenu de l'avancement et jouissent partout d'une grande estime. Il faut espérer que ce type de cours fera partie intégrante de la carrière de tout professeur de qualité.

I.-R. V.

Quelques réflexions sur la formation permanente

André REVUZ

Faculté des Sciences, I.R.E.M. de Paris.

Les quelques réflexions qui suivent tiennent compte d'une expérience de plus de dix ans dans ce qu'on a appelé le « recyclage » des professeurs de mathématiques et voudraient dégager quelques unes des conditions de l'efficacité de ce genre de travail.

Citons tout de suite deux erreurs qu'ont commises, je le crains, au moins au début, tous les professeurs d'Université qui ont pris une part active à la « formation continue ».

La première est de considérer que le niveau mathématique moyen des professeurs en exercice et leur disponibilité à l'égard de nouvelles façons de penser est d'emblée au moins celle des bons étudiants des Facultés. L'erreur n'est pas totale, en ce sens que la plupart des professeurs retrouvent en effet, après une période de démarrage, le niveau des bons étudiants; elle est grave cependant dans la mesure où l'on peut décourager un grand nombre d'entre eux dès les premiers contacts si l'on ne tient pas compte du fait que les déplorables conditions de travail qui leur sont généralement faites leur donnent peu d'occasions d'affronter des idées nouvelles dans leur discipline et ne leur facilitent pas une véritable activité créatrice. Il y a donc une difficulté relative à la période de démarrage dont il faut être conscient : il faut certes présenter du nouveau pour persuader les auditeurs qu'un changement véritable est possible et souhaitable, mais il faut le faire avec assez de lenteur et de modération pour qu'ils n'aient pas l'impression d'être immédiatement et irrémédiablement dépassés.

Une seconde erreur est de croire que la transposition d'une question d'un niveau d'enseignement donné à un niveau plus élémentaire est facilement réalisée par la plupart des professeurs. Il arrive que cette transposition n'exige que des précautions de style et une exposition plus détaillée, mais le plus souvent elle requiert un travail beaucoup plus considérable : en sous-estimer l'importance est une erreur grave et fréquente. Au niveau universitaire, on admet

— peut-être à tort, d'ailleurs — que les étudiants ont déjà une idée assez nette de ce qu'est l'activité mathématique et qu'il est possible, sinon même profitable de leur présenter dans leur déroulement strictement logique des théories relativement achevées. Si cette manière de procéder est déjà discutable au niveau universitaire, elle est indéfendable au niveau secondaire, où le travail essentiel est d'abord de faire comprendre aux élèves en quoi consistent les mathématiques (but que l'on n'atteint nullement en les leur montrant toutes faites) et comment elles aident à maîtriser la réalité. Autant que de mathématiques en soi, c'est de mathématisation que doit s'occuper l'enseignement du second degré.

A oublier ou à minimiser l'importance de la réflexion tant scientifique que pédagogique qui doit précéder l'introduction de notions mathématiques au stade élémentaire, on fait naître une erreur complémentaire : celle qui consiste à assigner à chaque notion un niveau bien déterminé, et souvent élevé, au-dessous duquel il serait impossible d'en parler valablement. On a entendu des professeurs d'Université déclarer qu'il était absurde de parler de groupes dans l'enseignement du second degré. Et, assurément, il le serait de le faire comme il est d'usage à l'Université, mais l'expérience a prouvé qu'à des niveaux très élémentaires il est possible de faire dégager la notion à partir d'exemples très variés, et qu'en définitive les jeunes élèves qui l'avaient ainsi élaborée par leurs propres efforts l'avaient plus profondément comprise et savaient mieux la reconnaître et l'utiliser que leurs aînés à qui elle avait été d'emblée présentée dans toute sa pureté.

Les dernières remarques nous amènent à poser le problème central de la formation continue. Dans l'état actuel du développement scientifique et de l'enseignement, quels sont les objectifs essentiels de cette formation ?

Rappelons que le travail de rénovation de l'enseignement mathématique a été commencé par des mathématiciens effrayés par le fossé qui se creusait entre l'enseignement traditionnel, complètement figé, et la Science en marche. Mais deux autres reproches non moins graves peuvent être faits à l'enseignement traditionnel : ses méthodes dogmatiques et son mauvais traitement des applications, si elles n'étaient pas superbement ignorées au profit d'une inutilité en quoi certains voyaient la marque de la culture désintéressée, ne consistaient qu'en exemples dérisoires, depuis longtemps dépassés, à moins qu'elles ne soient reléguées dans certains enseignements marqués par un utilitarisme borné.

La fausse opposition d'une mathématique pure, belle mais orgueilleuse et apparemment stérile, et d'une mathématique appliquée incertaine et inesthétique est un des plus graves défauts de l'enseignement traditionnel. Il est à peine exagéré de dire que ses élèves se répartissaient en une majorité incapable d'utiliser la moindre mathématique et une minorité incapable de sortir du domaine strict des mathématiques. Combien de théories efficaces sont ignorées de ceux à qui elles rendraient le plus service, et qui utilisent à leur place des recettes fondées sur des raisonnements inconsistants.

Le but de la rénovation de l'enseignement, et par suite de la formation continue des professeurs, n'est pas d'introduire dans les enseignements primaire et secondaire des notions « modernes » tandis qu'ils garderaient leurs méthodes dogmatiques et négligeraient tout autant les applications ; le but n'est pas plus de mettre l'accent sur les mathématiques dites appliquées en négligeant les outils particulièrement puissants des mathématiques contemporaines, le but n'est enfin pas non plus de modifier les méthodes d'enseignement sans rien

changer au contenu de cet enseignement. Le but véritable, c'est de progresser dans toutes les directions à la fois, car il ne s'agit pas de réalités différentes, mais des aspects d'une même réalité, aspects qu'il peut être commode de distinguer dans un exposé, mais qu'il ne faut absolument pas séparer dans la pratique de l'enseignement.

Un des meilleurs moyens d'atteindre ces objectifs est de mettre l'accent dans l'enseignement mathématique sur le couple « situation - modèle ». Le départ naturel de toute activité mathématique est la confrontation avec une situation que l'on veut élucider pour pouvoir y agir avec le maximum d'efficacité. La mathématique participe à cette élucidation par la création de modèles qui donnent une représentation schématique précise de certains aspects de la situation. Deux problèmes fondamentaux doivent être alors traités :

a) Celui de l'adéquation du modèle à la situation. Très souvent plusieurs modèles peuvent être proposés, ayant chacun leurs avantages et leurs inconvénients, qu'il importe également de mettre en lumière.

b) Celui de l'étude intrinsèque du modèle, c'est-à-dire d'une théorie mathématique petite ou grande, mais qui doit être menée avec toute l'ingéniosité et toute la rigueur désirables. Les propriétés retenues dans le modèle ne sont autres que les axiomes de la théorie mathématique correspondante. Le contrôle de l'adéquation peut avoir lieu au niveau de ces axiomes, ou au niveau de résultats importants de la théorie dont la comparaison avec la situation réelle est plus facile.

Il est en tous cas capital, pour l'efficacité de l'enseignement que les deux aspects ne soient pas prématurément disjoints et que les élèves prennent une part active au travail d'étude de la situation, d'élaboration du modèle, de développement de la théorie, de confrontation de la théorie avec la situation initiale.

Si les objectifs de la formation continue ne se peuvent déterminer qu'à partir de ceux de l'enseignement des élèves et des étudiants, les méthodes de la formation continue n'ont sans doute pas non plus à être fondamentalement distinctes dans leurs principes de celles de l'enseignement. Il est assez remarquable, et navrant, de constater que tant d'exposés de pédagogie soient souvent si dénués eux-mêmes de qualités pédagogiques, comme si ce que l'on recommande pour s'adresser à des enfants n'avait plus de valeur lorsque l'on s'adresse à des adultes. La vieille opposition de l'adulte qui sait et qui détermine les normes et de l'enfant qui apprend et qui doit accepter les normes subsiste encore inconsciemment dans l'esprit de ceux-là même qui la dénoncent. Quels que soient l'âge et la formation antérieure d'un être humain, il ne progressera que s'il est mu par une *motivation* assez forte et s'il fait un *effort personnel* assez grand.

La motivation la plus immédiate et la plus puissante chez la plupart des professeurs est le désir d'améliorer leur enseignement. Et ceci est une raison supplémentaire pour que la présentation d'une notion soit dans toute la mesure du possible accompagnée des conséquences que l'on peut en tirer aux divers niveaux de l'enseignement.

La motivation prend malheureusement un aspect plus douloureux lorsqu'il faut d'abord persuader des professeurs que des notions qu'ils enseignent de bonne foi depuis de longues années sont en réalité inutiles ou ambiguës, ou présentées sous un éclairage qui n'est pas le bon. Lorsqu'ils en sont persuadés,

ou en voie d'en être persuadés, il ne faut pas oublier qu'ils sont dans un état psychologique très désagréable, de gêne d'avoir donné un enseignement dont ils comprennent maintenant l'imperfection, et de désarroi parfois de ne pas savoir immédiatement comment ils vont le modifier. Aussi faut-il dans toute la mesure du possible, leur donner rapidement la solution de rechange qui mettra fin à leur angoisse; peut-être même serait-il bon d'organiser le travail de telle sorte que la solution de rechange leur soit déjà au moins partiellement connue. Notons que la contrepartie positive de cette angoisse est la libération éprouvée par l'esprit lorsqu'il se débarrasse de cadres de pensée dont l'imperfection ne lui échappait, en réalité, pas complètement mais dont, faute de pouvoir y remédier, il refoulait le sentiment dans l'inconscient.

Il est, en tous cas, indispensable que le « recycleur » se soit purgé lui-même de tout dogmatisme, qu'il n'attaque pas un dogmatisme périmé au nom d'un autre dogmatisme, fut-il temporairement plus éclairé, qu'il n'oublie pas que s'il impose, au nom d'une quelconque autorité, au lieu de persuader, son travail est sans valeur et que s'il ne se place pas dans la perspective du progrès intellectuel collectif de l'humanité — qui est la motivation profonde de tout le travail scientifique et pédagogique — ses efforts risquent de n'avoir qu'un résultat nul, sinon négatif.

L'esprit de collaboration fraternelle, la disposition à la discussion ouverte seront encore plus indispensables aux recycleurs s'adressant à des collègues dont la motivation initiale aurait été une pression administrative ou l'annonce d'un changement de programme. Sans sous-estimer l'effet stimulant que peuvent avoir de telles circonstances sur des collègues nonchalants ou réticents, il faut souligner que toute motivation de cette nature doit être rapidement remplacée par une plus profonde.

Le meilleur moyen d'obtenir que les participants soient très actifs est de constituer de petites équipes (comprenant, par exemple, les professeurs d'un établissement ou de plusieurs établissements voisins) dont le travail collectif concernerait aussi bien l'enseignement qu'ils donnent que celui qu'ils reçoivent. Sans créer de hiérarchie formelle, la présence dans chaque équipe d'un animateur ayant une culture mathématique plus profonde que celle des autres est souhaitable. Il est indispensable également qu'aucune équipe ne travaille en vase clos, mais qu'elle se livre à des confrontations périodiques avec d'autres équipes et participe aussi à des réunions plus générales qui peuvent être l'occasion d'un exposé approfondi, par une personne très qualifiée, d'un thème que les équipes auront rencontré et qui se sera révélé difficile, ou inversement, au contraire d'un thème nouveau sur lequel elles n'ont pas encore travaillé et qui est livré à leurs méditations.

Il est essentiel que les divers ordres d'enseignement participent à ces activités et qu'aucune cloison administrative ou sociale ne les empêche de se réunir fréquemment.

Il est possible d'envisager diverses formes d'organisation, et il ne me paraît pas utile d'entrer dans le détail à ce sujet, car elles dépendent beaucoup des conditions locales : l'essentiel est de garder à l'esprit la nécessité d'une coordination souple, et de ne pas oublier que le travail sera d'autant plus fécond que chacun se sentira plus libre et plus responsable, que les initiatives seront toujours favorisées, quitte à être amicalement et objectivement critiquées après essai.

Signalons l'aide que peut apporter la télévision en permettant de transmettre des informations à des professeurs trop éloignés d'un centre universitaire pour pouvoir s'y rendre fréquemment. Elle est utilisée depuis six ans en France, et là aussi la réception en équipe des émissions, suivie d'une discussion collective, en accroîtrait le rendement.

En ce qui concerne les thèmes à traiter, il faudra les choisir soigneusement en fonction des connaissances et de la mentalité des professeurs concernés.

S'il s'agit de professeurs encore totalement étrangers au mouvement de rénovation, il peut être bon de se placer au début dans le cadre de l'enseignement traditionnel, pour leur montrer, par exemple :

a) que le calcul algébrique classique s'éclaire par la mise en évidence des structures dont sont munis les ensembles de nombres sur lesquels il est effectué. Il arrive trop souvent dans les exposés traditionnels que les arbres empêchent de voir la forêt, et qu'on y attire l'attention sur les êtres mathématiques individuels alors que c'est leur ensemble et sa structure qui importent en fait;

b) que la plupart des exposés traditionnels de la géométrie sont loin d'avoir la perfection qu'on leur attribue parfois, qu'ils contiennent de nombreuses notions où la confusion est la règle (comme celle d'angle), qu'ils utilisent trop souvent de petits moyens sans portée, et que l'exposé fondé sur la notion d'espace vectoriel et de produit scalaire est plus facile à dominer, à utiliser et donne aux élèves des outils indispensables dans tous les domaines, tant purs qu'appliqués.

c) que l'introduction des notions d'analyse peut avoir lieu beaucoup plus tôt que ce n'est l'usage actuellement, par la considération d'exemples concrets de fonctions en escaliers et de fonctions affines par intervalles, sur lesquels de nombreux calculs linéaires peuvent être effectués, et qui conduisent très naturellement à la découverte de la dérivation et de l'intégration. Ce sera aussi l'occasion de montrer que le calcul numérique peut être autre chose qu'un exercice rebutant et désuet. Rappelons, à ce propos, que l'usage de machines à calculer a le double avantage d'initier les élèves à la manipulation d'un matériel qui ne cessera de se vulgariser et de leur faire mieux comprendre les propriétés des opérations qu'ils effectuent;

d) que des notions très simples de logique permettent de prendre une conscience claire de la structure des raisonnements;

e) que ce qui est dit traditionnellement au sujet des « mesures de grandeurs » est inconsistent et gagne à être remplacé par une théorie élémentaire de la mesure, qui a, entre autres mérites, celui d'inclure une théorie élémentaire des probabilités.

S'il s'agit de professeurs déjà partiellement avertis de ces questions, l'objectif pourra être de les approfondir. Mais, à mes yeux cet approfondissement doit être fait de deux matières différentes et simultanées : d'une part, pousser l'étude proprement mathématique assez loin pour que les professeurs arrivent à dominer nettement ce qu'ils doivent enseigner, et pour qu'ils aient une idée suffisante des perspectives générales dans lesquelles s'insère leur enseignement; d'autre part, et en accord avec ces perspectives, procéder à une étude des modes d'enseignement les plus propres à présenter les diverses notions, à faire découvrir par les élèves leur utilité et leur efficacité, c'est-à-dire,

en particulier leur faire connaître le plus grand nombre possible de situations où elles interviennent; les situations étant d'autant meilleures qu'elles sont plus proches de la réalité. Je ne nie pas la nécessité de considérer parfois des situations artificielles plus simples que les situations réelles qui le sont rarement, ni de présenter certaines questions comme des jeux, mais je pense d'une part que l'élucidation d'une situation relativement complexe, si elle demande plus de temps, sera finalement d'une efficacité beaucoup plus grande, et d'autre part, que l'abus de situations artificielles ferait retomber l'enseignement des mathématiques dans la stérilité que je lui reproche.

Un des objectifs majeurs, valable pour de nombreuses années, de la formation continue sera de fournir aux professeurs un très grand nombre d'exemples de situations étudiées par d'autres disciplines et susceptibles de mathématisation.

Pour terminer, je voudrais insister sur le fait que la formation continue est (le nom le suggère assez!) un travail de longue haleine, qui ne sera fécond que s'il est poursuivi, pour chaque professeur, pendant longtemps : les stages courts et intensifs sont de peu de rendement; *la formule minimale pour une efficacité appréciable est la réunion hebdomadaire d'une heure et demie* (exposés, discussions, exercices, ...) *pendant une année*. Il faut en outre que ce travail soit intimement lié au travail de l'enseignant dans sa classe. A ce dernier point de vue, *la constitution d'équipes de professeurs collaborant aussi bien en tant qu'enseignants qu'en tant qu'enseignés*, discutant librement entre eux, et profitant mutuellement de leur expérience paraît pleine de promesses : à l'occasion d'expérimentation dans des classes de Sixième en France en 67-68, de nombreuses équipes ont été formées dont l'efficacité tant sur le plan de la recherche pédagogique que sur celui de l'information des professeurs a été une des leçons les plus nettes de l'expérience.

A. R.

N.D.L.R. — En organisant pour la première fois en collaboration avec la Société Mathématique de France, une série de conférences, en 1956, l'A.P.M.E.P. posait le problème de la formation permanente. En 1969, il y a tout de même quelque chose de changé : l'Unesco organise un colloque, et, dans un autre domaine l'Institut National pour la Formation des Adultes lance une revue *Éducation permanente*. Certes, dans ce dernier cas, il est uniquement question des adultes qui n'enseignent pas; mais où situer la frontière, parmi les adultes, entre éducateurs et éduqués?

En 1969, aux journées A.P.M.E.P. de Besançon, la création de quatre nouveaux I.R.E.M. a été un point particulièrement important de l'assemblée générale.

Les 21 et 22 juin 1969, le colloque sur la formation permanente organisé à Sèvres par la Régionale Parisienne a rappelé que cette formation permanente s'étend à *tous* les ordres d'enseignement.

Une évidence prend corps :
pas de réforme permanente de l'enseignement sans formation permanente des maîtres.

Matériaux pour un dictionnaire

J.-M. CHEVALLIER

Secrétaire de la Commission du Dictionnaire

La (petite) tour de Babel.

Le retard dans la parution du *Bulletin* m'a empêché de mettre à exécution le projet annoncé dans le n° 266 : faire un sondage d'opinion parmi nous, à l'occasion de l'assemblée générale, sur certaines divergences de vocabulaire ou de notation qui, acceptables à un niveau un peu élevé, sont beaucoup plus que « regrettables » dans nos classes élémentaires. Mais j'abandonne d'autant moins l'idée qu'au sein de ma section d'I.R.E.M. j'ai été à même de recueillir les doléances amères ou véhémentes des collègues devant cette « pagaïe large » qui mène à la paralysie; et les nouveaux manuels de 6^e — occasion pourtant unique de repartir d'un bon pied — sans aller jusqu'à aggraver cette inquiétude, sont bien loin de la calmer.

J'ai analysé avec ma section d'I.R.E.M. la floraison du printemps 69 — du moins tout ce qui était disponible en temps opportun — que je désignerai ici par abréviation par BD (Bréard), BF (Brédif), LH (Lebossé et Hémary), MG (Monge et Guinchamp), NF (Nonnotte et Favier), PC (Polle et Clopeau), QR (Queysanne et Revuz). Signalons d'abord les points d'accord. L'unanimité semble faite sur le segment fermé noté $[AB]$, parfois $[A, B]$; dans la mesure où l'on introduit les segments ouvert ou semi-ouvert (qui ne s'imposent probablement pas en 6^e), $]AB[$ et $[AB[$ paraissent également adoptés. Unanimité aussi pour désigner l'inclusion « large » par $\subset$; personnellement j'évoquais depuis quelque temps vers $\subseteq$, mais je suis bien trop heureux qu'on s'entende : donc vive $A \subset A$! Pourtant il m'est impossible de me réjouir de la désastreuse quasi-unanimité (seul PC fait exception) en faveur de la flèche d'implication $\Rightarrow$ ou d'équivalence logique $\Leftrightarrow$; ce sont des symboles extrêmement dangereux que nos élèves manient à contre-sens, nous guère mieux, et les auteurs... pas tellement bien : faute de quantifications appropriées, les « non- » et les « anti- » tournent parfois à la catastrophe. Insister serait cruel, que cela au moins nous incite à la prudence, surtout en 6^e !

Les divergences apparaissent avec la droite et la demi-droite, et parfois à l'intérieur d'une même collection, ce qui, on en conviendra, est doublement irritant. Ainsi BF maintient dans sa nouvelle édition de 3^e des notations différentes de celles de 6^e; dans son manuel de 4^e, QR avait adopté des notations que j'avais ici même signalées comme commodes, or elles disparaissent de QR 6^e, pour ressurgir chez LH. Il s'agissait, je le rappelle, de (AB) pour la droite, $[Ax)$ pour la demi-droite; pour celle-ci $[Ax$

est encore acceptable, mais sûrement pas le $[Ax]$ de BD. Par quoi sont-elles remplacées ? Pratiquement par rien : ce n'est sans doute pas très grave en soi, mais les répercussions risquent d'être gênantes. Car, si l'on appelle AB la droite ou la demi-droite, on tombe inmanquablement dans la confusion avec la notation — très généralement adoptée — pour la longueur du segment $[AB]$ ou alors on alourdit cette dernière notation en « $d(A, B)$ » ou bien « long $[AB]$ », qui, dans l'usage élémentaire, sont proprement *imbuvables*. Si QR ne s'était pas infligé cette « potion », il n'aurait probablement pas commis la triple coquille de la p. 132 : $10 < [ab] < \dots$; quant à BF, s'il souhaite que nous croyions vraiment à sa gageure de désigner la longueur de n'importe quoi par L (ainsi que la « classe angulaire » de n'importe quoi par s), qu'il remanie son livre de 3^e dans ce style : sa réussite — s'il réussit — méritera la plus grande admiration.

Passons aux « secteurs angulaires » et « angles » : comme il était à craindre, il règne ici une confusion qui n'a rien d'aimable. Les instructions ministérielles portent dans l'affaire une bonne part de responsabilité, pour avoir toléré, presque encouragé, une pareille synonymie : l'intention, louable en soi, de « ménager les transitions » aboutit presque toujours à les rendre interminables. Le *secteur* (pourquoi *angulaire* ?) est adopté, mais commence déjà à céder du terrain devant le *saillant* et le *rentrant* (QR), et c'est tant mieux. Mais l'angle, hélas ! Pour MG, LH, NF, fidèles aux instructions, le mot fait un inutile double emploi avec *secteur* ; pour BD et BF, il désigne — sans grand intérêt à mon avis — le bord du secteur, l'un avec une notation de couple (Ox, Oy) , l'autre avec une notation de paire $\{Ox, Oy\}$, également indéfendables ; QR ne prononce absolument pas le mot, pour une raison à longue échéance qu'on devine aisément — le garder pour l'opérateur de rotation — mais qui, je l'ai déjà dit, me paraît peu réaliste ; enfin PC en fait un « secteur angulaire libre », c'est-à-dire une classe d'équivalence de « secteurs angulaires liés isoconstructibles ». Cette terminologie mise à part (elle est affreuse), j'ai déjà indiqué ma préférence personnelle pour cette dernière conception, car c'est elle qui apportera dans nos habitudes le bouleversement minimal, sans sacrifier rien des exigences actuelles.

Naturellement les divergences de notation sont aussi sensibles. Le secteur est assez généralement désigné par $[Ox, Oy]$ sans que la distinction entre saillant et rentrant soit toujours aussi nette qu'on la souhaiterait ; on trouve aussi $[\widehat{Ox, Oy}]$ et $[\overline{Ox, Oy}]$ chez BF, $(\widehat{xOy})$ et $(\overline{xOy})$ chez PC ; la classe d'équivalence est en général notée $\widehat{xOy}$ et $\overline{xOy}$, sauf chez BD qui introduit la notation $\text{amp}[Ox, Oy]$ et chez BF qui se contente d'un simple s ; en dernière minute je trouve aussi un $\widehat{Ox, Oy}$ dans la collection Mauguin. Égale fantaisie pour les « arcs » notés $[A, B]$, $[\widehat{AB}]$, $(\widehat{AB})$, arc AB ; là aussi, plus d'unité en ce qui concerne la classe d'équivalence, notée généralement $\widehat{AB}$.

Ici même j'ai défendu les notations $[Ox, Oy]$ pour le secteur, $\widehat{xOy}$ pour l'angle ; j'avoue d'ailleurs que les « arcs » me gênaient. Après ce travail d'analyse, j'incline à penser qu'il serait nettement préférable d'appeler soit $\widehat{Ox, Oy}$ la classe de $[Ox, Oy]$, soit $\overline{xOy}$ la classe de $[\widehat{xOy}]$, la seconde notation étant moins lourde, donc meilleure. Quant aux « arcs », ils ressortiraient au même système de notation ; là encore on serait sage de garder le mot traditionnel *arc* pour la classe, quitte à introduire un vocable nouveau pour le sous-ensemble du cercle ; n'en voyant nulle part, je prends la liberté de suggérer *arceau*.

Finalement on aurait donc :

(1) droite (AB) ;

- (2) demi-droite $[AB]$ — ou $[Ax]$;
- (3) segment $[AB]$, de longueur AB ;
- (4) (secteur) saillant $\widehat{xOy}$ d'angle $\widehat{xOy}$; (secteur) rentrant $\widehat{xOy}$ d'angle $\widehat{xOy}$;
- (5) arceau $\widehat{AB}$ d'arc $\widehat{AB}$, ou bien arceau $[AB]$ d'arc $\widehat{AB}$. L'extension aux ouverts ou semi-ouverts, si on juge les nécessaires, est immédiate.

J'ai suffisamment critiqué pour accepter les critiques. A un système de notations on ne demande pas d'être parfait, mais d'être assez cohérent pour être admis et utilisé aussi largement que possible. Si l'on tient à cette qualité-là — et je la crois primordiale dans l'enseignement élémentaire — il faut bien se dire qu'on ne dispose pas dans le domaine qui nous intéresse ici d'une très grande latitude : des variantes sont certainement concevables, elles n'iront pas bien loin sans rompre la cohésion.

Je n'ai pas abordé un autre point : est-ce que AB veut dire 3 ou bien 3 cm ? Cela est une longue histoire, à laquelle une chronique tout entière ne suffira sans doute pas; on en reparlera!

J.-M. C.

A propos des symboles

Leur cause paraissait entendue! Aussi lors d'une réunion de la régionale de l'A.P.M. ai-je été fort étonné d'apprendre que des maîtres éminents de l'Enseignement Supérieur considéraient l'emploi des symboles mathématiques dits modernes comme du « snobisme » et de la « fumisterie ». Modeste mais fervent utilisateur de ces symboles j'ai été très sensible à ces accusations qui, en raison de la compétence de leur auteur, ont réussi à ébranler mes convictions et m'ont amené à faire un sérieux examen de conscience.

Du snobisme! Peut-on parler de snobisme quand les prétendus snobs constituent la grande majorité? Et la cohorte des professeurs de mathématiques qui devrait être un bastion de l'esprit critique serait-elle atteinte d'une banale crise de suivisme?

De la fumisterie! C'est plus grave. En quoi l'emploi des symboles ferait-il des professeurs des fumistes? J'avoue ne pas avoir trouvé d'explication, mais je suppose qu'à un certain niveau de connaissances on doit disposer d'éléments d'appréciation permettant d'étayer d'aussi catégoriques affirmations.

Les symboles mathématiques modernes sont-ils indispensables? Il est certain qu'on a fait des mathématiques avant l'emploi des symboles $\Rightarrow$ ou $\cap$, et même avant l'emploi du signe $=$. Mais les faisait-on mieux du temps de Viète quand on écrivait : $A \text{ in } Xq + B \text{ in } X \text{ } \alpha q C$ pour $AX^2 + BX = C$? Il est naturel qu'au fur et à mesure que s'est affinée la pensée mathématique on ait été amené à créer des symboles nouveaux. Certes il ne s'agit pas de confondre mathématique moderne et symbolisme, mais on conçoit mal la mathématique moderne sans un symbolisme approprié. Pédagogiquement les symboles modernes constituent un auxiliaire précieux pour atteindre le double but que nous poursuivons : développer chez les élèves les qualités intellectuelles et même morales, et rendre les éléments de mathématique accessibles au plus grand nombre tout en donnant à chacun la possibilité d'exploiter au mieux ses aptitudes. Ne serait-ce que parce qu'ils permettent d'expliciter des choses autrefois sous entendues, on peut espérer grâce à eux, récupérer certains de ceux qui étaient

réputés ne pas avoir la « bosse », peut-être parce qu'on leur laissait trop d'étapes à franchir seuls. Ils ont permis aussi de préciser des nuances de sens, d'améliorer la rigueur des raisonnements, de mieux en dégager l'ossature logique et ont contribué de ce fait à accroître la valeur formatrice de notre discipline. Mais ils présentent aussi un intérêt technique non négligeable car, au prix d'une minutieuse préparation, ils rendent possible une meilleure présentation au tableau des notions mathématiques et les élèves peuvent sans précipitation et sans copier de longues phrases, prendre, non des notes éparpillées, mais un cours qui sera un instrument de travail.

Certes on se heurte à quelques obstacles. Il faut en particulier éviter l'excès de formalisme. Mais c'est là une question d'équilibre et de bon sens. D'autre part les élèves, réticents pour certains symboles, se livrent pour d'autres à un emploi abusif et sans doute sommes-nous nombreux à relever dans les copies et à déplorer les mêmes horreurs. N'est-ce pas une des raisons qui ont pu pousser des collègues, écœurés, à proscrire l'emploi des symboles modernes? Mais cette solution, radicale, est-elle la bonne? Si les symboles eux-mêmes ne sont pas en cause, mais seulement le mauvais usage qui en est fait, ne convient-il pas, au lieu de renoncer, de lutter avec patience et ténacité contre la négligence et les incorrections. Il incombe aux professeurs et aux auteurs de manuels chargés de l'apprentissage de donner le bon exemple en ne se permettant aucune liberté et en commençant par donner la signification précise des symboles, car bien des déboires proviennent de leur emploi empirique, générateur d'habitudes néfastes et même d'idées fausses.

Quels sont les symboles dont l'utilisation par les élèves prête le plus à la critique? Il semble qu'il s'agisse, non de ceux qui indiquent des règles opératoires, mais de ceux, modernes ou anciens, qui concernent la logique. Cela tient sans doute à ce que la logique est plus difficile que la technique opératoire. Et cependant ces symboles s'avèrent nécessaires car les relations logiques qu'ils traduisent sont, autant que la théorie des ensembles, à la base des mathématiques et, consciemment ou non, sont utilisées dès les débuts. Ces règles logiques deviendraient-elles plus difficiles pour être précisées et symbolisées? N'est-il pas préférable, au contraire, d'introduire le plus tôt possible, sans craindre de consacrer du temps à leur assimilation pour pouvoir construire ensuite sur des bases solides, les relations fondamentales qui sont : l'égalité, R et S , R ou S , $R \Rightarrow S$, $\forall x \in E, R(x)$, $\exists x \in E, R(x)$ et leurs négations, en insistant plus particulièrement sur l'égalité, l'implication et celles comportant des quantificateurs, qui paraissent les plus délicates.

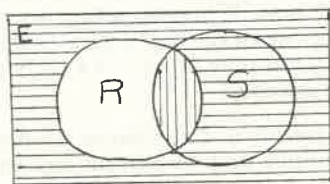
Le symbole $=$. Ce symbole n'est sans doute pas contesté! Et cependant, s'il en est un dont l'emploi, faute de définition précise, a donné lieu jadis à des abus, c'est bien lui! Sans faire de Métamathématique on peut expliquer aux élèves qu'on écrit $a = b$ uniquement pour exprimer que les symboles a et b représentent le même être mathématique (par exemple triangle $ABC = \text{triangle } A'B'C'$ si et seulement si $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$) et que, par suite, dans toute relation, a peut être remplacé par b . Cependant certains auteurs s'évertuent encore à démontrer, parfois par récurrence, que : $a = b \Rightarrow a + x = b + x$!

Le symbole $\Rightarrow$. Il est très controversé et c'est cependant un des plus utilisés. Il est naturel qu'il ait acquis droit de cité car il répond à un besoin de rigueur logique en comblant une lacune de l'expression mathématique qui consistait à écrire les relations les unes au-dessous des autres, sans lien logique. Le symbole $\Rightarrow$, même s'il n'est pour certains qu'une précaution de style, contraint généralement les élèves à réfléchir, ou tout au moins à prendre leurs responsabilités. Qui n'a rencontré la dérobade consistant à interrompre une suite d'implications au moment délicat pour substituer au symbole $\Rightarrow$ une des expressions : « Élevons au carré », « il vient », « on a », « on peut écrire », que nous devons tous bannir pour pouvoir exiger la même chose des élèves. En ce sens le mot implique est déjà bénéfique mais il reste souvent inefficace et même dangereux, comme tous les termes non spécifiquement mathématiques tels que déplacement, rotation, élimination..., s'il est employé sans définition

précise préalable. Une récente polémique révèle le malentendu provenant de ce que nous n'attribuons pas encore tous le même sens au symbole $\Rightarrow$. Et peut-être peut-on résumer ainsi les deux points de vue : Étant donné deux relations R et S définies dans un ensemble E , les uns disent : « Que signifie $R(x) \Rightarrow S(x)$? » ; les autres disent : « quand est-ce que $R(x) \Rightarrow S(x)$ est vraie ? ou fausse ? » A en juger d'après les ouvrages consacrés à l'Enseignement Secondaire et les habitudes des élèves, c'est encore le premier point de vue qui prévaut. On rencontre dans beaucoup de manuels soit une absence totale de définition, soit des explications du genre : le symbole $\Rightarrow$ signifie « a pour conséquence », « implique », « entraîne », la meilleure étant sans doute « si $R(x)$ est vraie, $S(x)$ est vraie ». Est-il facile à partir de là de dire quand est-ce que $R(x)$ n'implique pas $S(x)$? L'usage fait de cette négation indique qu'il faut l'entendre ainsi : $R(x)$ n'implique pas $S(x)$ dès qu'il existe un x de E pour lequel $R(x)$ est vraie et $S(x)$ fausse. Donc $R(x) \Rightarrow S(x)$ concernerait tout x de E et non un x de E comme le suggère la notation. Mais alors, n'est-ce pas un progrès que de pouvoir lever toute ambiguïté en considérant $R \Rightarrow S$ comme une relation dans E , définie au même titre que R ou S par sa table de vérité

	$R(x)$	$S(x)$	$R(x) \Rightarrow S(x)$
1	V	V	V
2	V	F	F
3	F	V	V
4	F	F	V

et dont le graphe est représenté ci-dessous (partie hachurée) ?



On peut alors préciser, lorsque c'est nécessaire : $\forall x \in E, R(x) \Rightarrow S(x)$ qui est la condition nécessaire et suffisante pour que le graphe de R soit inclus dans celui de S . Reste à démontrer (ou à admettre) que l'implication est transitive. Il faut exiger des élèves une connaissance parfaite de cette définition et leur en apprendre l'emploi, c'est-à-dire, connaissant la véracité de deux des relations qui y figurent, quelle conclusion en tirer pour la troisième. En particulier bien distinguer les deux problèmes :

1° *Comment démontrer qu'une implication est vraie ?* Il suffit de prouver que l'on n'est pas dans le cas 2 ; donc, puisque l'implication est vraie dès que $R(x)$ est fausse, de démontrer que : Si $R(x)$ est vraie $S(x)$ est vraie.

On rejoint ainsi « l'ancienne » définition.

2° *Comment utiliser une implication vraie ?*

Si $R(x) \Rightarrow S(x)$ est vraie et $R(x)$ est vraie on est dans le cas 1, donc $S(x)$ est vraie. C'est le syllogisme base du raisonnement déductif.

Si $R(x) \Rightarrow S(x)$ est vraie et $S(x)$ est fausse on est dans le cas 4, donc $R(x)$ est fausse. Dans les deux autres cas on ne peut pas conclure.

Le fait que ce soient les élèves déjà habitués à utiliser le symbole $\Rightarrow$ qui assimilent le moins aisément cette définition de l'implication montre la nécessité de l'enseigner le plus tôt possible et l'avantage qu'il y aurait à l'implanter dans des esprits neufs.

Les relations $\forall x \in E, R(x)$ et $\exists x \in E, R(x)$. Si leur définition, naturelle, ne présente pas de difficulté, sans doute la formation de leur négation est-elle plus délicate puis, qu'elle donne lieu à de nombreuses fautes. On ne saurait trop insister sur le fait que par exemple, $R(x)$ et $\forall x \in E, R(x)$ sont deux relations totalement distinctes; la première seulement est une relation dans E , la véracité de la seconde est indépendante de x mais peut éventuellement faire intervenir d'autres variables. Il faudra malgré tout lutter longtemps contre la tendance qu'ont les élèves à considérer les quantifications comme de simples attributs que l'on consent à écrire épisodiquement pour satisfaire les exigences d'un professeur maniaque. Ils ne seront convaincus de leur importance qu'après s'être rendus coupables, pour ne pas les avoir utilisés, de graves fautes dont quelques-unes des plus classiques sont signalées dans les exemples suivants destinés à illustrer ce qui précède.

Exemple I: Propriétés des opérations internes.

1° *Commutativité et associativité*: C'est un des rares cas où l'oubli des quantificateurs peut ne pas trop porter à conséquence... du moins lorsque l'opération est commutative ou associative! Car l'omission du quantificateur dans la définition de la commutativité par exemple conduit fatalement à traduire la non commutativité par $a * b \neq b * a$ au lieu de $\exists(a, b) \in E^2, a * b \neq b * a$ (Ainsi des élèves affirment que l'opération $a * b = 2a + 3b$ définie dans $\mathbb{R}$ n'est pas commutative car

$$2a + 3b \neq 2b + 3a$$

et ils ne prennent conscience de la faute que l'orsqu'on leur demande si c'est vrai pour $a = b = 1$). On rencontre malheureusement cette incorrection dans quelques ouvrages. D'ailleurs, il est pour le moins pédagogiquement mauvais de donner la définition de la commutativité en écrivant « pour tout x et tout y » dans le corps d'une phrase pour encadrer ensuite $a * b = b * a$. N'est-ce pas : $\forall(a, b) \in E^2, a * b = b * a$ qui doit être encadré?

2° *Élément neutre et symétrique d'un élément*. L'affirmation de l'existence d'un élément neutre et du symétrique de tout élément met en évidence l'importance de la place des quantificateurs.

L'opération admet un élément neutre $\Leftrightarrow \exists e \in E, \forall x \in E, x * e = e * x = x$.

Tout élément à un symétrique $\Leftrightarrow \forall a \in E, \exists a' \in E, a * a' = a' * a = e$. Il faut remarquer que les élèves utilisant ces relations pour la recherche d'un élément neutre éventuel ou du symétrique éventuel de a , sont condamnés à l'échec car elles ne sauraient servir à résoudre ces problèmes, la conclusion de leur étude ne pouvant être que « vrai » ou « faux ». On doit habituer les élèves à procéder ainsi :

Soit e un élément de E : e est élément neutre $\Leftrightarrow \forall x \in E, x * e = e * x = x$.

Soit a et a' deux éléments de E : a' est symétrique de $a \Leftrightarrow a * a' = a' * a = e$. Ceux qui, ayant compris le sens de $\forall x \in E, R(x)$ s'astreignent à écrire le quantificateur et aboutissent par exemple à : $\forall x \in \mathbb{R}, xe = 3$ sont moins enclins que les autres

à conclure « $e = \frac{3}{x}$ si $x \neq 0$ ». De même, aboutissant à : $\forall x \in \mathbb{R}, (e - 2)(x - 3) = 0$,

ils ne sont pas tentés de répondre : « 2 est élément neutre, mais si $x = 3$ tout élément est élément neutre », pour surenchérir parfois par : « donc il n'y a pas d'élément neutre car il doit être unique ». Il est vrai que certains trouvent le résultat correct après avoir commis sur la condition de nullité du produit une faute qui compense l'omission du quantificateur. Ces exemples amènent à parler de l'égalité de deux fonctions polynômes et plus généralement de deux fonctions quelconques.

Exemple II : Égalité de deux fonctions. Soit une fonction f_1 de E_1 vers F_1 , une fonction f_2 de E_2 vers F_2 , $\mathcal{D}_{f_1}$ et $\mathcal{D}_{f_2}$ leurs ensembles de définition respectifs. Le sens attribué au signe $=$ impose la définition : $f_1 = f_2$ si et seulement si $E_1 = E_2$, $F_1 = F_2$, $\mathcal{D}_{f_1} = \mathcal{D}_{f_2}$, $\forall x \in \mathcal{D}_{f_1}$, $f_1(x) = f_2(x)$. Faute de respecter cette définition on s'expose à commettre des fautes, surtout quand on étudie des opérations dans des ensembles de fonctions et que doivent intervenir les quantificateurs relatifs aux fonctions et ceux qui concernent les images de x . Ainsi, dans un exercice sur l'anneau des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, plusieurs élèves ont trouvé qu'il n'avait pas de diviseurs de zéro pour avoir écrit $f(x)g(x) = 0$ et non $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)g(x) = 0$. Dans le cas de deux fonctions polynômes réelles :

$$\begin{array}{c} \text{A} \\ x \mapsto A(x) = a_0 + a_1x + \dots; \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{B} \\ x \mapsto B(x) = b_0 + b_1x + \dots \end{array}$$

l'égalité se réduit à : $A = B \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $A(x) = B(x)$ et on démontre ensuite que : $A = B \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $A(x) = B(x) \Leftrightarrow a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots$. L'emploi du quantificateur marque la distinction entre l'égalité de deux fonctions et l'égalité des images de x mieux que ne le faisait le symbole $=$ que l'on réservait d'ailleurs aux seules fonctions polynômes, et permet de donner une solution nette de nombreux problèmes tels que ceux relatifs aux éléments neutres ou aux courbes passant par des points fixes. Par exemple, si $(\mathcal{D}_\lambda)$ est la droite d'équation $(2 + 3\lambda)x + (4 - 5\lambda)y + 1 + 2\lambda = 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $M_0(x_0, y_0) \in (\mathcal{D}_\lambda) \Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda(3x_0 - 5y_0 + 2) + 2x_0 + 4y_0 + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 3x_0 - 5y_0 + 2 = 0 \text{ et } 2x_0 + 4y_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -\frac{13}{22}, y_0 = \frac{1}{22}$$

Exemple III : Relations Binaires. Pourquoi, dans la plupart des ouvrages, seule la réflexivité a-t-elle droit au quantificateur? N'est-ce pas parce que la symétrie et la transitivité se traduisent par des implications que l'on répugne à considérer comme des relations? La définition correcte de la symétrie n'est-elle pas :

R est symétrique si et seulement si : $\forall (x, y) \in E^2$, $xRy \Rightarrow yRx$, le quantificateur portant bien entendu, non sur xRy , mais sur l'implication avec laquelle on doit être familiarisé. Quand on propose d'étudier dans l'ensemble $E = \{a, b, c\}$ des relations du type aRa, aRb, bRa, bRb, cRc , la relation étant fautive pour les autres couples, certains élèves répondent qu'elle n'est pas transitive car « on n'a pas aRb et bRc », qu'elle n'est pas symétrique car « on n'a pas aRc ». L'interrogatoire révèle que les coupables connaissent de l'implication une définition incomplète passant sous silence les cas 3 et 4 de la table de vérité.

Une autre expérience concluante a été faite avec la relation « d'ordre strict » (il y a un mot à trouver car malgré les guillemets l'expression est mauvaise) définie comme une relation transitive et telle que : $\forall (x, y) \in E^2$, $xRy \Rightarrow \text{non}(yRx)$. Est-elle antisymétrique (à ne pas confondre avec non symétrique) c'est-à-dire est-ce que :

$\forall (x, y) \in E^2$, xRy et $yRx \Rightarrow x = y$? Elle est antisymétrique puisque, d'après la définition, pour tout couple (x, y) xRy et yRx est fautive, donc l'implication est vraie. C'était au début de l'année et seuls les élèves ayant déjà bien assimilé l'implication ont répondu correctement. Certains ont demandé pourquoi il était écrit dans leur livre que la relation d'ordre strict n'est pas antisymétrique.

Exemple IV : Problèmes d'élimination. Le mot éliminer fait image et les élèves l'affectent particulièrement mais s'obstinent à lui attribuer le sens de « faire disparaître ». (C'est d'ailleurs la définition du Larousse). Il importe donc d'en donner une définition rigoureuse ou mieux de s'abstenir de prononcer le vocable, non indispensable. Par contre, puisqu'il s'agit d'exprimer une condition nécessaire et suffisante d'existence, le quantificateur $\exists$ s'impose ici et permet de clarifier la pensée et l'expres-

sion. Par exemple, la traduction analytique de l'appartenance de $M(x, y)$ à la droite (Δ) définie par le point $M_0(1, 4)$ et le vecteur $\vec{V}(2, -3)$ n'est pas $\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 4 - 3k \end{cases}$ mais : $\exists k \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 4 - 3k \end{cases}$. Sinon, comment obtenir correctement l'équation cartésienne puisque dans tout système équivalent à $\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 4 - 3k \end{cases}$ figure le nombre k alors que l'appartenance de $M(x, y)$ à la droite est une propriété de x et y seuls. La rédaction convenable semble :

$$M(x, y) \in (\Delta) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, \overrightarrow{M_0M} = k\vec{V} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 4 - 3k \end{cases} \Leftrightarrow 3(x - 1) + 2(y - 4) = 0$$

Les mêmes difficultés se présentent lorsqu'on veut trouver l'intersection de la droite (Δ) et de la droite (D) d'équation $2x + y - 8 = 0$. Les élèves qui écrivent :

$$M(x, y) \in (\Delta) \cap (D) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 4 - 3k \\ 2x + y - 8 = 0 \end{cases}$$

au lieu de :

$$M(x, y) \in (\Delta) \cap (D) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 4 - 3k \\ 2x + y - 8 = 0 \end{cases}$$

sont embarrassés du nombre k qui subsiste dans leurs calculs et sentent confusément une incorrection. Mais pour résoudre ce problème il est sans doute plus simple de déterminer k pour que le point M de (Δ) tel que $\overrightarrow{M_0M} = k\vec{V}$ appartienne à (D) .

Bien entendu les considérations qui précèdent ne prétendent à aucune originalité. Convaincu qu'à tous les niveaux beaucoup de fautes sont imputables à la méconnaissance ou à la non observation de règles et relations fondamentales j'ai seulement voulu rassembler quelques exemples et remarques pour souligner la nécessité de les définir correctement et d'utiliser judicieusement les symboles pour les traduire.

Le fait d'avoir relevé quelques négligences ne saurait être interprété comme un réquisitoire contre les manuels dont les auteurs réalisent une tâche difficile qu'ils s'appliquent à parfaire et lors de chaque réédition on a d'ailleurs l'occasion d'apprécier les améliorations apportées. Ce n'est pas parce qu'au début il est fait état d'une boutade qu'on doit chercher à déceler dans ces lignes la moindre intention polémique. Je pense au contraire qu'il faut savoir gré aux maîtres des Facultés qui, au lieu de le décrier, consentent à s'intéresser à l'Enseignement de la Mathématique au niveau inférieur et à sacrifier une part de leur temps à éclairer les professeurs du secondaire qui s'interrogent sur le contenu, la forme et l'orientation de leur enseignement et sont soucieux de donner à leurs élèves une formation moderne solide et de leur éviter ainsi une pénible reconversion.

Maurice PAULY,
(Lycée Fermat, Toulouse).

Un dictionnaire pour les praticiens des mathématiques qui est un dictionnaire par les praticiens des mathématiques.

Si vous n'y croyez pas, lisez p. 240.

Si vous y croyez, lisez p. 240.

Catégories et géométrie élémentaire

Dans le numéro 263-264 de la revue de l'A.P.M., M. Apery exposait la notion de catégorie et en donnait quelques exemples classiques (catégorie des ensembles, catégorie des groupes, ...). Ce concept apparemment compliqué, loin d'être une pure création de l'esprit, se rencontre en Géométrie élémentaire.

Dans les programmes actuels de Mathématiques, il est question de « vecteurs liés » — ou « bipoints » — et de « vecteurs libres » — ou « vecteurs » plus brièvement. Les opérations élémentaires (addition et soustraction) sont définies sur des vecteurs libres et non sur des vecteurs liés. La distinction entre les deux notions n'est pas toujours comprise par les élèves ; elle nécessite, en effet, l'introduction d'une relation d'équivalence et d'un ensemble quotient. Il est cependant possible de munir l'ensemble des vecteurs liés d'une opération « localement définie ». Le plan (ou l'espace), considéré comme ensemble de points, devient une « petite catégorie », c'est-à-dire, une catégorie où les objets forment un ensemble. Dans la définition, on peut théoriquement se passer des objets et ne définir que les morphismes ; en fait, les deux façons de faire sont équivalentes et nous allons décrire ici une catégorie avec objets et morphismes.

Les objets sont les points du plan (ou de l'espace). Les morphismes sont les vecteurs liés $\overrightarrow{AB}$ — ou bipoints (A, B) — d'origine A et d'extrémité B . On dit encore que l'objet A est la source du morphisme $\overrightarrow{AB}$, l'objet B est le but du même morphisme. A tout objet A correspond un vecteur lié nul, noté $\overrightarrow{AA}$, qui est appelé morphisme neutre associé à A .

La composition des morphismes est définie par une « somme de vecteurs liés », cette somme n'étant pas toujours possible. En général le produit de deux morphismes α et β est défini si et seulement si la source de l'un coïncide avec le but de l'autre. Ainsi, le produit $\beta\alpha$ est défini lorsque le but de α et la source de β sont identiques. Dans l'exemple qui nous intéresse, cela veut dire qu'on ne peut additionner deux vecteurs liés que si l'origine de l'un coïncide avec l'extrémité de l'autre ; ainsi on peut écrire :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Par contre la somme $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$ n'est pas définie. Le produit des morphismes est bien associatif, ce qui se traduit par :

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}).$$

Enfin, le morphisme neutre associé à l'objet A vérifie les égalités :

$$\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{CA},$$

quel que soit B et quel que soit C .

Nous avons ainsi défini une catégorie qu'on peut appeler catégorie des vecteurs liés (pour insister sur le rôle des morphismes). Cette catégorie possède plusieurs propriétés. Ainsi, il n'existe qu'un seul morphisme de source A et de but B , ce qu'on traduit par la notation :

$$\text{Hom}(A, B) = \{\overrightarrow{AB}\}$$

De plus, tout morphisme est « inversible », autrement dit, tout vecteur lié $\overrightarrow{AB}$ admet un « symétrique à droite » et un « symétrique à gauche », $\overrightarrow{BA}$, tel que :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} \text{ et } \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB}$$

Une telle catégorie s'appelle un « groupoïde ».

Appelons E l'ensemble des vecteurs liés. On peut définir sur E une relation d'équivalence R de la façon suivante :

« $\overrightarrow{AB} R \overrightarrow{CD}$ si et seulement si le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme ». C'est la relation classique d'équipollence. L'ensemble quotient E/R s'appelle « ensemble des vecteurs libres ».

On démontre en algèbre que si un ensemble est muni d'une loi de composition interne et d'une relation d'équivalence compatible avec cette loi, il est possible de définir sur l'ensemble quotient une loi interne déduite de la première. On serait tenté d'utiliser ici ce résultat. En fait, ce n'est pas possible puisque l'addition n'est pas définie partout dans E . Malgré tout, il est possible de définir la somme de deux vecteurs libres $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Il existe un vecteur lié $\overrightarrow{AB}$, appartenant à la classe $\vec{u}$, que l'on peut choisir arbitrairement. Ce vecteur lié étant fixé, il existe un vecteur lié d'origine B , soit $\overrightarrow{BC}$, dont la classe est $\vec{v}$. Par définition, le vecteur lié $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ est un représentant de la somme $\vec{u} + \vec{v}$. Il est facile de vérifier que cette définition de la somme de vecteurs libres ne dépend pas des représentants choisis.

L'ensemble E/R est ainsi muni d'une addition partout définie (qui en fait un groupe abélien). On peut alors définir la catégorie des vecteurs libres. L'objet unique est un point fixe O . Les morphismes sont les vecteurs libres; ils ont même source et même but : l'objet O . La composition des morphismes est encore définie par l'addition des vecteurs libres. Cette opération est ici toujours possible, elle est associative et il existe un morphisme neutre unique (associé à l'objet O) : c'est le vecteur libre nul. Les axiomes sont bien vérifiés; c'est la conséquence du fait que E/R est un groupe.

La catégorie ainsi obtenue ne constitue pas un exemple aussi intéressant que le précédent mais nous allons pouvoir définir maintenant un « foncteur » F de la catégorie des vecteurs liés dans la catégorie des vecteurs libres.

Un foncteur fait correspondre aux objets d'une catégorie des objets d'une autre catégorie et aux morphismes de la première des morphismes de la seconde, de façon à conserver les propriétés de la composition des morphismes.

A tout objet A , le foncteur F associe l'objet O défini dans la catégorie des vecteurs libres, A tout vecteur lié $\overrightarrow{AB}$, le foncteur F associe la classe de $\overrightarrow{AB}$ modulo R : c'est un vecteur libre. Cette correspondance vérifie les trois axiomes des foncteurs :

- (1) Si $\overrightarrow{AB}$ est un morphisme de source A et de but B dans la première catégorie, $F(\overrightarrow{AB}) =$ classe de $\overrightarrow{AB}$ est un morphisme de source $F(A)$ et de but $F(B)$ dans la seconde catégorie.
On a, en effet, $F(A) = F(B) = O$.
- (2) $F(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = F(\overrightarrow{AB}) + F(\overrightarrow{BC})$. Cette propriété résulte de la définition de l'addition dans E/R .
- (3) Si on applique F au morphisme neutre associé à l'objet A , on obtient le morphisme neutre associé à $F(A)$. En effet : $F(\overrightarrow{AA}) = \vec{o}$: vecteur libre nul ou morphisme neutre associé à $F(A) = O$.

Il existe ainsi un foncteur de la catégorie des vecteurs liés dans la catégorie des vecteurs libres. Cette notion dont nous avons trouvé un exemple simple est fondamentale dans plusieurs chapitres de la Mathématique moderne. Elle permet, par exemple, de « classer » certains êtres mathématiques. Ainsi, les vecteurs liés correspondant au même vecteur libre par le foncteur F appartiennent à une même classe d'équivalence. Cette notion permet aussi de transformer un problème relatif à une catégorie en un problème relatif à une catégorie plus simple. Ainsi, dès qu'une propriété est vraie entre vecteurs liés, on peut en déduire une propriété entre vecteurs libres par l'intermédiaire du foncteur F . Le raisonnement par l'absurde permet de conclure à certains résultats « négatifs ».

Nous venons de montrer, par cet exemple tiré de la Géométrie vectorielle, que les notions de catégorie et de foncteur, loin d'être artificielles, s'introduisent de façon naturelle en Mathématiques Élémentaires. L'exemple choisi ne simplifie sans doute guère la théorie des vecteurs mais il peut aider à comprendre un langage nouveau. Il n'est pas interdit de penser que les catégories seront introduites un jour dans l'enseignement secondaire comme cela s'est produit pour la Théorie des ensembles, l'Algèbre moderne et la Topologie. Il est donc intéressant d'en trouver des illustrations simples.

Bernard LEVENT,
Nantes.

Des triangles

Il m'a paru intéressant de donner le début de l'énoncé d'un premier problème posé en mathématiques spéciales A et de signaler quelques-unes des intéressantes solutions qui ont été fournies dans diverses copies. Nous les avons discutées, comparées et mises au point.

Énoncé. On donne un segment AB dont les deux extrémités sont marquées a et b ; on insère entre les deux points un nombre quelconque de points marqués a ou b , arbitrairement. On décompose de la sorte AB en un certain nombre de segments; montrer que le nombre total de segments ab diffère d'une unité du nombre de segments ba , la somme de ces deux catégories de segments étant impaire.

On donne un triangle ABC dont les trois sommets sont respectivement marqués a , b , c . On décompose ce triangle en triangles partiels dont les sommets sont sur le périmètre du triangle ou à l'intérieur de celui-ci. Ces points sont notés arbitrairement de l'une des trois lettres a , b , c , s'ils sont à l'intérieur du triangle; ils sont notés arbitrairement de l'une des deux lettres qui figurent sur le côté, s'ils sont situés sur un des côtés de ABC . Démontrer que le nombre total des triangles abc est impair, le nombre de ceux qui sont orientés positivement différant de 1 du nombre total de ceux qui sont marqués négativement (1).

Je ne donnerai pas la solution de la première question, absolument sans difficulté, ni celle relative aux orientations des triangles. Par contre je vais résumer ci-dessous trois solutions très différentes de la deuxième question. (Il m'a été fourni d'autres solutions qui m'ont paru moins intéressantes pour les lecteurs du Bulletin).

Première solution. Nous allons compter le nombre de segments ab ; il en existe h qui sont situés sur un côté du triangle initial. Il en existe k non situés sur un côté. Les premiers sont les côtés de h triangles, les seconds de $2k$ triangles. Dans cette manière de compter les triangles abc , au nombre de r ne sont obtenus qu'une seule fois tandis que les triangles aab et abb sont obtenus deux fois; soit s le nombre de ces triangles. De ces deux manières de faire le décompte nous tirons

$$h + 2k = r + 2s$$

d'où il résulte que r et s ont la même parité; d'après la première partie h est impair; il en est donc de même de r .

(1) Certains de ces résultats sont dus à Sperner. Le lecteur curieux de se renseigner de manière plus complète pourra se reporter à C. BERGE : *Espaces topologiques. Fonctions multivoques*, 1959, p. 178; L.-A. LYUSTERNIK : *Convex figures and polyhedra*, 1962, pp. 160-163.

Deuxième solution. Nous supposons qu'il n'existe pas de triangle abc ; sur le côté AB il existe un nombre impair de segments ab (ou ba); nous partons de l'un d'eux nous construisons le triangle auquel il donne naissance; c'est un triangle aab ou abb ; il admet donc un second côté ab ; sur ce côté repose un nouveau triangle aab ou abb qui possède un nouveau segment ab . Nous construisons ainsi une chaîne de segments tous distincts liés à une chaîne de triangles. Cette chaîne s'arrête sur un côté du triangle initial qui ne peut être que AB . On définit de la sorte une bijection entre les segments ab (ou ba) du côté AB ; cette bijection qui n'a pas d'élément double possède certainement un nombre pair d'éléments ce qui est en contradiction avec la première question.

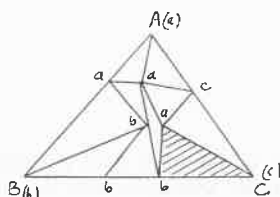


FIG. 1.

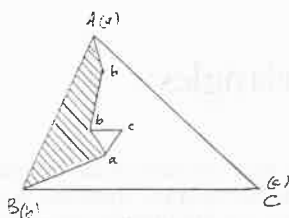


FIG. 2.

Troisième solution. Nous étudions tous les chemins qui partant de A aboutissent en B en ne traversant que des points a ou b et qui ne passent pas deux fois par le même point. De tels chemins existent, AB est l'un d'eux. Un tel chemin et AB enferment un nombre de triangles que nous désignons par p . Nous considérons un chemin pour lequel p atteint son maximum. Ce chemin contient un nombre impair de côtés ab (d'après la première question), nous prenons l'un d'entre eux et nous prenons le triangle ayant ce côté et situé à l'extérieur de l'aire hachurée (fig. 2) ce triangle existe car un côté ab n'est situé ni sur AC ni sur BC ; son troisième sommet ne peut appartenir au chemin envisagé sinon il serait possible de construire un chemin contenant $p + 1$ sommets. Le troisième sommet ne peut pas non plus être un point a ou b , pour la même raison. C'est donc un point c ; il en résulte l'existence d'au moins un triangle abc .

Je passe sur d'autres solutions qui m'ont été fournies mettant en jeu des algorithmes destinés à diminuer le nombre de triangles.

A. ADLER,
(Lycée Condorcet.)

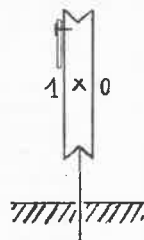
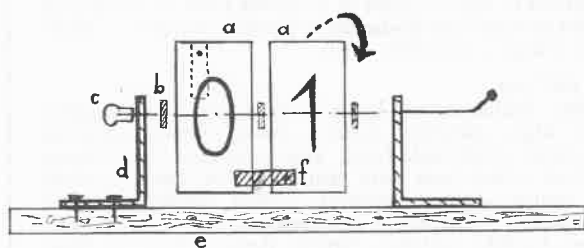
Le coin du bricoleur

Fabriquons un compteur binaire.

A) Matériaux : des bouts de planche, 2 équerres métalliques (côté 4 cm), 1 axe (j'ai utilisé un rayon de bicyclette), des rondelles d'espacement, un bout de fer plat de 1 cm de largeur sur 2 mm d'épaisseur environ.

B) Outillage : étau, scie et lime à métaux, chignole, scie à bois, râpe à bois, etc.

C) Conception : l'engin est constitué de $n, n \in \mathbb{N}, n \geq 4$, plaquettes ($3 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} \times 0,8 \text{ cm}$) découpées dans les bouts de planche dressées et poncées. Ces plaquettes sont enfilées sur un axe horizontal porté par les deux équerres vissées sur une planche. Elles peuvent ainsi montrer alternativement leurs 2 faces marquées 0 et 1. Chaque plaquette, sauf la dernière à gauche porte sur sa face marquée 1 une languette métallique qui vient se placer horizontalement sous l'action de la pesanteur quand la plaquette passe du chiffre 0 au chiffre 1 de telle sorte qu'au demi-tour suivant, quand la plaquette de droite passera du chiffre 1 au chiffre 0 elle entraînera dans sa rotation



la plaquette située à sa gauche. Si cette dernière expose le chiffre 1 elle entraînera la plaquette située à sa gauche, mais si c'est le chiffre 0 qu'elle montre, la languette pendra verticalement sur la face cachée et n'entraînera pas la suivante. Les languettes sont découpées dans le fer plat et finies à la lime. Elles doivent être suffisamment rigides et lourdes. Chaque plaquette est maintenue verticale par une lamelle d'acier (vieux ressort de montre) plantée dans le bois du support ce qui produit à chaque changement de chiffre une musique du plus charmant effet. On agit à la main sur la seule plaquette de droite.

LE DILY,
Lycée Joliot-Curie, Rennes.

Parmi nos lettres

Sur les groupes d'ordre quatre. De B. Sinot, à Paris :

Dans le *Bulletin* 260 (p. 49), je lis « il y a quatre groupes possibles pour un ensemble à quatre éléments ». Or ceci est un peu inexact. En fait il n'y en a que deux : le produit direct de deux groupes d'ordre deux et le groupe monogène d'ordre quatre.

Soit $(E, \cdot)$ un groupe d'ordre quatre et e son élément neutre. Pour tout élément x de E , $x^4 = (x^2)^2 = e$.

En effet, deux cas sont à envisager :

ou bien $x^2 = e$ pour tout élément de E ;
ou bien $a^2 = c \neq e \quad a^4 = c^2 = e$.

Il n'y a alors plus de choix pour compléter les deux tables :

$$(1) \begin{array}{cccc} c & . & . & e \\ b & . & e & . \\ a & e & . & . \\ e & a & b & c \end{array}$$

$$(2) \begin{array}{cccc} c & . & . & e \\ b & . & . & . \\ a & c & . & . \\ e & a & b & c \end{array}$$

N.D.L.R. — Renvoyons également au corrigé de l'exercice 19 dans A. et G. REVUZ, *Le cours de l'A.P.M.* (I), p. 111.

**la mathématique
parlée par ceux qui l'enseignent**

par la Commission du Dictionnaire de l'A.P.M.E.P.

- *L'édition 1967 (A)*, comprenant 91 fiches (parues dans le Bulletin avant 1968), une brochure de 32 pages avec notice lexicographique et index, est **disponible**.
Prix de souscription : 20 F, sous étui cartonné.

Utiliser le bulletin de souscription inséré dans le Bulletin 266.

- *Aux nouveaux adhérents APMEP*, inscrits avant le 1^{er} juillet 1969, et souscrivant au dictionnaire, il sera offert le recueil des douze fiches publiées en 1968 : « *Millésime 1968 (B)* » (parution prévue : décembre 1969).

- *Ce que comprend l'édition 1967 (A)*

Abrégé, abscisse, affinité, anallagmatie (-ique), anneau, anti (-commutatif, -déplacement, -logarithme, -logie, -parallèle, -podaire, -pode, -réflexif, -symétrie, -té), application (-quer, -cable), Archimède (-ien), auto (-matique, -morphisme, -polaire, -symétrie), axe (-ial, -oïde), base (-al), central, centre, classe, complémentaire (-ment, -menté), contra (-dictoire, -grédien), -pollent, -posée), cote (-er), décimal (-e), déduction (déduire), déférent (-e), déplacement, dextrorsum, diagonal (-e, -iser), Eratosthène, Euclide, euclidien, famille, flottant, fonction, fonctionnel (-le), groupe, hélice (oïde), hélicoïdal, homologue, homothétie (-ique), inverse (-ible), inversion, isométrie (-ique), module (-o), normal (-e), nul, numération, opérateur (-er), opposé, ordonnée, perspective, podaire, polaire pôle, primitif (-ive), projection (-teur, -eter), Pythagore, répétition, retournement, rompu, sinistrorsum, stéréographique, supplémentaire (-ment), symétrie, symétrique (-isable, -iser), système, taille, translation, trivial.

- *Ce que comprend le « Millésime 68 » (B)*

arrondi, cofacteur, correction, diviseur (-dende), division (-er), erreur, incertitude, mantisse, rapport.

- **Après clôture de la souscription, seront en vente :**

<i>Édition 1967 (A)</i>	25 F
<i>Millésime 1968 (B)</i>	4 F
<i>Édition 1969 (A ∪ B)</i>	27 F

- D'année en année, les recueils « *Millésime* » permettront de compléter l'édition initiale pour les *nouveaux* lecteurs.

Car il est évident que pour les lecteurs du *Bulletin*, les fiches continueront à être insérées régulièrement.

Souscrire aujourd'hui, être membre de l'APMEP ou abonné à son *Bulletin*, c'est la meilleure façon de tenir à jour son fichier-dictionnaire.

Non, il y a mieux encore : lire attentivement la brochure et utiliser les pages prévues pour écrire à la Commission du Dictionnaire, de VOTRE dictionnaire.

Initiation à la mathématique de base

Sous ce titre, la Régionale Parisienne de l'APMEP publie sa première brochure : un volume de 224 pages qui est la réunion des six cahiers de formation permanente « *Chantiers de Pédagogie Mathématique* » parus de novembre à juin 1969. Texte remanié; corrigés d'exercices réunis en fin de volume; index alphabétique.

Pour se procurer ce volume (qui sera disponible à partir d'octobre 1969), utilisez le virement postal au nom de la Régionale Parisienne de l'APMEP, Paris 2510863. Prix de souscription : 10 F.

Feuilles sèches

« ...un livre n'est rien qu'un petit tas de feuilles sèches, ou alors une grande forme en mouvement : la lecture. »

J.-P. Sartre.

Trois ouvrages

Cours de Mathématiques du premier cycle. — J. DIXMIER, Tome 1 : 472 pages; Tome 2 : 361 pages — Gasthiers Villars.

Ce cours d'Algèbre - Analyse - Géométrie, séduira par sa clarté, sa concision, ses remarques en débuts de chapitres (Ch. LI par exemple sur la formule de Stokes). Les notions affines sont considérées comme peu importantes. L'étude du groupe G_{p+q} faite à la page 67 du Tome 2 aurait pu cependant figurer au chapitre X, une présentation simplifiée de la règle de Laplace aurait alors permis de raccourcir des calculs de déterminants. L'Analyse du Tome 2 offre au futur professeur du second degré une étude moderne des Variétés.

A first course in calculus — A second course in calculus, par S. LANG. Tome 1 : 260 pages; Tome 2 : 242 pages, Addison-Wesley.

L'auteur, plus connu par : *Algebraic numbers*, *Algebra*, etc... a expérimenté ces cours sur des élèves de quinze ans; c'est dire leur intérêt pour les auteurs de programme.

Pour le simple lecteur, c'est une source de plaisirs et d'exercices agréables au long des 30 chapitres. Ces exercices sont résolus en fins d'ouvrages.

Petits livres à conseiller aux futurs étudiants de 1^{er} cycle, ils les aideront à comprendre les notions d'analyse vectorielle utilisées au début des cours de physique.

La 3^e édition du classique : *Algèbre linéaire et Géométrie élémentaire* de J. DIEUDONNÉ, est la bienvenue pour ses solutions d'exercices les plus difficiles.

BOUTELLER
(Lycée de Brive).

Carnet de lecture

Pourrai-je, à ce titre, ajouter : « notes de non-lecture » ? Quand arrive le printemps, les prairies du Staffordshire sont tellement engageantes que je ne résiste pas à l'envie de m'y allonger pour lire les nouveautés mathématiques. Alors quelque dame-oiseau, — comme nous disons ici « pour bête-à-bon-dieu » —, a tôt fait de m'arracher à la lecture, aussi passionnante qu'elle pût être. Je me mets à discuter avec cette dame-oiseau sur le nombre des points de sa robe et j'oublie le livre savant que j'avais dans les mains.

Voici donc quelques titres sur lesquels je reviendrai quand la saison des foins sera passée : *Les mathématiques modernes*, par André Warusfel, un petit livre de 188 pages qui vaut beaucoup mieux que son mauvais titre; *Le premier enseignement de l'analyse* par Papy et *Papy-minicomputer* par le même auteur dont il faudrait bien qu'un jour, un rédacteur du *Bulletin* dresse le bilan de la production; *Fonctions spéciales et théorie de la représentation des groupes* par N. Ya. Vilenkin (traduit du russe); *Éléments de programmation sur ordinateurs* par Gnedenko (dont on connaît la remarquable monographie sur les probabilités), Koroliouk et Ioutchenko (également traduit du russe) et que je rapprocherai de *Fortran IV* par M. Dreyfus si, comme je l'espère, les loisirs estivaux me permettent de m'instruire dans ce domaine.

Sur les méthodes actives. De l'excellent texte de Guy Palmade reproduit dans le *Bulletin* 265 (p. 525), je rapproche ce texte d'un romancier allemand un peu oublié, Berthold Auerbach, cité par Henri Troyat dans son livre sur Tolstoï. Lors de son voyage en Allemagne, en 1860, Tolstoï était en effet fort curieux de toutes les informations qui pouvaient servir à la genèse de sa pédagogie; lui convenait particulièrement cette remarque de Auerbach dans son livre *La Nouvelle Vie*:

« Toutes les méthodes sont stériles. Chacun peut être le meilleur des pédagogues. Ce sont les élèves qui créent, avec le maître, la méthode d'enseignement la meilleure. »

Sur les méthodes « Actives » (suite). G. Th. Guilbaud a parlé, à propos d'un programme d'agrégation de mathématiques fossiles (*Bulletin* 265, p. 537). Dans le même *Bulletin* vous pouviez lire un témoignage de la fossilisation de l'enseignement. Dans les programmes de Seconde C ou T (p. 532 et 534), il est précisé que les identités concernant $(x + y)^2$, $(x - y)^2$ et $x^2 - y^2$ font partie du programme alors que les identités analogues pour l'exposant 3 « feront l'objet d'exercices ».

On voit que depuis les errements de mai 68, l'autorité centrale a repris les choses en main. Il ne s'agit pas d'abandonner à la fantaisie des professeurs peu sérieux dont parlait le collègue Bouteloup dans une lettre la liste complète et officielle des formules « à savoir par cœur ».

Sur les nombres premiers. Je ne veux pas terminer sur cette note pessimiste alors que je reçois, de l'ami Itard, son nouveau « Que sais-je ? » intitulé « *Les nombres premiers* ». L'éditeur reprend le titre et le numéro de collection de l'ancien ouvrage de Borel. Mais Itard a tout refait dans la perspective des problèmes actuels ou récents, de la théorie des nombres, les grands problèmes classiques ayant été traités par lui dans « *Arithmétique et théorie des nombres* » de la même collection.

Ce qui me ravit le plus, c'est la charmante probité de l'ami Itard qui, en m'adressant le livre me fait remarquer qu'à la page 111, il s'est pris les pieds dans la démonstration du théorème de MacLagan — Wedderburn « tout corps fini est commutatif ». J'ai connu un jongleur qui lui ne ratait jamais une balle; il est vrai qu'il était mime et n'avait donc jamais de balle pour mimer ses jongleries.

William MOUNTBANK.

De la vertu d'impatience. De plusieurs collègues d'ici et d'ailleurs : « Je vous rappelle ma nouvelle adresse qui semble ignorée des responsables du *Bulletin*. Je règle régulièrement mes cotisations mais je ne reçois aucun bulletin. Suis-je encore considéré comme membre de l'A.P.M. ? »

N.D.L.R. — Nous n'avons pas répondu à plusieurs lettres de ce type et prions nos correspondants de nous en excuser. Le retard de nos publications est la seule cause de l'inquiétude des collègues.

Dans l'internationale

N.D.L.R. — Il s'agit de l'internationale des professeurs de mathématiques, bien entendu. Comme le remarquait notre Présidente dans son rapport, nos collègues ont pu établir plusieurs contacts intéressants dans des colloques ou réunions tenus dans divers pays. Nous espérons publier prochainement des échos du voyage de plusieurs collègues à Moscou; d'autres sont allés à Exeter (Angleterre). Pour aujourd'hui, voici après les échos de Hambourg publiés plus haut, un écho de Bucarest.

Colloque de Bucarest de septembre 1968

La Société des Sciences Mathématiques de la République Socialiste Roumaine, et la Commission Nationale Roumaine pour l'UNESCO, ont organisé, du 23 septembre au 2 octobre 1968 à Bucarest, un Colloque consacré aux problèmes actuels de l'enseignement des mathématiques dans les écoles secondaires et supérieures des Pays Européens. Sur 39 participants, la France en comptait cinq : M^{me} Touyarot, MM. Revuz, Roumanet, Donio, et l'auteur du présent article.

Les conclusions et recommandations élaborées à l'issue de ce colloque, viennent d'être publiées par les soins de l'UNESCO (Buletin al comisiei nationale a Republicii Socialiste România pentru UNESCO, 4, 1968); il est donc inutile que les lignes qui suivent en rendent compte fidèlement. Par contre, il n'est peut-être pas sans intérêt de proposer librement quelques informations et réflexions moins organisées.

Tous les Pays européens ont désormais pris conscience de la nécessité et de l'urgence d'une rénovation de l'enseignement des mathématiques de « la Maternelle à la Faculté ». Certains n'ont guère dépassé cette phase de sensibilisation et de prise de conscience; par prudence, nous ne les citerons pas, mais il en existe! Par contre, d'autres pays européens sont fortement engagés dans les phases d'expérimentations et de réalisations; c'est le cas notamment des pays Scandinaves, de la Belgique, des Pays-Bas, de la Pologne.

La France ne peut prétendre figurer en tête de ce peloton, en raison de l'insuffisance des moyens (en hommes et en crédits) mis à la disposition de son Éducation Nationale. Elle occupe néanmoins une place très honorable, voire relativement enviable, grâce à son action d'animation et de conception (A.P.M.E.P., Commission Lichnerowicz, émissions télévisées), et à son action d'expérimentation (classes expérimentales implantées par l'I.P.N., initiatives A.P.M.E.P. et initiatives privées). La mise en application des nouveaux programmes des classes de Sixième et de Seconde, au 1^{er} octobre 1969, pourrait constituer un élément déterminant de progrès, si elle

était assortie d'une formation solide de tous les professeurs concernés. Ajoutons que la France va trouver une excellente occasion de s'affirmer dans la rénovation de l'enseignement des Mathématiques, par l'organisation à Lyon du 1^{er} Congrès International de l'Enseignement Mathématique, du 24 au 30 août 1969.

Beaucoup d'actions de rénovation de l'enseignement des mathématiques ont commencé par l'introduction d'une axiomatique complète et précise, suivie de développements déductifs abstraits et généraux, sans aucun souci d'adaptation aux possibilités intellectuelles et affectives des élèves, et aux exigences de la civilisation scientifique moderne. Ce danger a été nettement dénoncé et a suscité cette recommandation du P^r H. Freudenthal : « La mathématique doit être enseignée de telle manière qu'on puisse l'appliquer ». Il s'agit en somme, de proposer à nos élèves un outil remarquable, la mathématique, et d'en dégager toutes les possibilités.

L'importance sans cesse croissante de la mathématique dans le monde moderne, « a amené des mathématiciens, des psychologues et des pédagogues, à se consacrer à l'étude et à la résolution des problèmes que pose son enseignement », et il est souhaitable, pour ne pas dire indispensable, que la pédagogie des mathématiques soit enfin reconnue comme une science majeure à part entière, et qu'elle obtienne la place qui lui revient dans la recherche scientifique et dans les structures de l'enseignement — la composante « pédagogique » du réveil de mai 1968 a violemment dénoncé cette urgence pour toutes les disciplines universitaires, ne l'oublions pas.

Un caractère très particulier à la mathématique mérite d'être relevé : c'est la discipline qui semble se prêter le mieux aux entreprises de démocratisation de l'enseignement. Plus précisément, c'est face à la mathématique moderne que les élèves ont, au départ, des chances égales de succès (ou d'échec!); les inégalités dues au milieu familial sont en effet pratiquement éliminées : le bon sens est la chose du monde la mieux partagée, nous le savons; et nous savons aussi que le père de famille licencié de mathématiques (ancien régime) a au moins autant de difficultés que le travailleur manuel à résoudre les problèmes que son fils lui soumet le soir en rentrant du Lycée.

Deux questions fondamentales n'ont pas été abordées au Colloque de Bucarest, faute de temps (j'ajouterais... de conviction). La première est celle de l'enseignement de la Géométrie; une timide allusion au niveau des conclusions : « L'enseignement de la Géométrie, dont l'importance pour la culture et en de nombreux secteurs de l'activité humaine subsiste, doit cependant être repensé, aussi bien dans son esprit que dans son contenu ». Aucun des 44 rapports et communications n'a vraiment traité de ce problème (problème qui ne figurait pas explicitement, il faut l'avouer, à l'ordre du jour); nous ne pourrions plus bientôt repousser l'échéance, il faudra se décider vite à choisir quel enseignement de la Géométrie nous devons proposer à nos élèves.

La deuxième question essentielle qui n'a pas été étudiée au Colloque est celle de l'Enseignement Supérieur des Mathématiques; son importance et son urgence n'ont cependant pas échappé au souci des participants. Deux des ultimes phrases des conclusions en témoignent : « Les problèmes de l'Enseignement Mathématique Supérieur n'ont été qu'effleurés lors de ce colloque; leur complexité et leur importance exigent des examens spéciaux, profonds et suivis. Il est indispensable que soit constituée une association internationale qui s'occupe des problèmes de l'Enseignement Mathématique Supérieur ». C'est tout un programme à réaliser; en France, dans un premier temps, ne pourrait-il pas être pris en charge conjointement par les I.R.E.M., par notre A.P.M.E.P., et par les Unités d'Enseignement et de Recherche à dominante Enseignement de nos futures Universités?

J. FORT,
Faculté des Sciences de Poitiers.

L'internationale mathématique en 1969

Du 3 au 9 septembre 1969, la Société Mathématique de Pologne fêtera son cinquantième anniversaire au cours de son Congrès-Jubilé, à Cracovie.

Du 24 au 30 août 1969, rappelons que se tient le premier congrès international de l'enseignement mathématique à Lyon (voir *Bulletin* 266, p. 84). Voici les conférences qui y sont annoncées :

V. Armitage, Londres, The relation between abstract and concrete Mathematics at school.

E. Begle, Stanford, The role of research in the improvement of Mathematics education.

Emma Castelnuovo, Rome, Différentes représentations utilisant la notion de barycentre.

B. Christiansen, Copenhague, Induction and deduction in the learning of Mathematics and in mathematical instruction (early secondary level).

A. Delessert, Lausanne, De quelques problèmes touchant à la formation des maîtres de mathématique.

A. Engel, Stuttgart, The relevance of modern fields of applied Mathematics for mathematical education.

E. Fischbein, Bucarest, Enseignement mathématique et développement intellectuel.

R. Gauthier, Lyon, Essai d'individualisation de l'enseignement avec des enfants du premier cycle secondaire (11-13 ans).

Anna Z. Krygovska, Cracovie, Le sujet n'est pas encore connu.

A. I. Markusevic, Moscou, Development of the fundamental mathematical education at school level.

Galinea Maslova, Moscou, Concepts and ideas in Mathematics teaching to 7-13 years old.

Frédérique Papy, Bruxelles, Minicomputer (apprentissage du calcul numérique et stratégie).

H. O. Pollak, Murray Hill, How can we teach applications of Mathematics?

A. Revuz, Paris, Les premiers pas en analyse.

A. Roumanet, Paris, Une classe de mathématique : motivation et méthode.

P. C. Roosenbloom, New York, Vectors and symmetry.

W. Servais, Morlanwelz, Logique et enseignement mathématique.

H. G. Steiner, Karlsruhe, Magnitudes and rational numbers—a deductival analysis.

B. Thwaites, Londres, The role of the computer in school Mathematics.

Le bloc-notes de l'A.P.M.

Le calendrier des publications.

N'oubliez pas que le Bulletin 269, à paraître en septembre, sera consacré à l'enseignement en Sixième.

Viendront ensuite : 270 (octobre) avec le compte rendu des journées de Besançon; 271 (novembre).

La Mathématique parlée par ceux qui l'enseignent est parue; les souscriptions arrivent à un rythme régulier; si vous n'avez pas encore souscrit, faites-le sans tarder sinon vous risquez de ne pouvoir être servi.

Chantiers de Pédagogie Mathématique. La publication de la Régionale Parisienne a été épuisée en juin (le tirage avait été de 15 000 exemplaires). Un volume est en préparation par la réunion des six fascicules parus, revus et corrigés (voir p. 240).

Par ailleurs la Régionale Parisienne entreprend la publication d'un Bulletin régulier selon une nouvelle formule en cours de gestation.

Une école d'été. Une école d'été avancée, subventionnée par la Division des Affaires Scientifiques de l'O.T.A.N. (ainsi que le Commissariat à l'Énergie atomique français et l'Université de Grenoble), se tiendra en France du 26 août au 6 septembre 1969.

I. Sujet : Conception des calculatrices digitales.

II. Programme :

L'enseignement présente les choix qui s'offrent pour mener à bien un projet de calculatrice : choix de structure, de technologie et de méthodes de conception :

1. — Langages pour la conception aidée par l'ordinateur;
2. — Structures de calculatrices;
3. — Relation entre structure, langages superviseurs et langage de programmation;
4. — Microprogrammation;
5. — Technologie pour circuits de calculatrices;
6. — Technologies et organisation des mémoires;
7. — Dispositifs divers.

III. Principaux conférenciers contactés :

G. GRUNBERG et J. LACOUR (C.E.A. France);
L. ZADEH et M. PIRTLE (University of Berkeley, U.S.A.);
M. LEHMAN, H. FREITAG, J. RUTLEDGE et G. AMDAHL (I.B.M.-U.S.A.);
J. MERMET et L. BOLLIET (Université de Grenoble);
W. KAUTZ (Stanford Research Institute, U.S.A.);
M. PACELLI et G. OLIVER (General Electric, U.S.A.);
Y. CHU (University of Maryland, U.S.A.);
J. ILIFFE (I.C.L., England);
R. R. JONSHON (Burroughs, U.S.A.);
B. GERACE et A. GRASSELLI (Università di Pisa, Italie).

IV. Comité scientifique :

Jean KUNTZMANN, Université de Grenoble, France;
Michel CORDELLE, C.E.A. (L.E.T.I.), France.

V. Direction de l'école :

Guy BOULAYE
Institut de Mathématiques Appliquées
CÉDEX 53
38-GRENOBLE-GARE, FRANCE

VI. Style de l'école :

L'école aura lieu dans un hôtel confortable et calme où seront logés la plupart des conférenciers et auditeurs (et leurs familles, éventuellement).
Des bourses pour les étudiants sont offertes par l'O.T.A.N. et B.U.L.L.-G.E.
Pour tout renseignement, écrire au directeur de l'école.

DERNIÈRE HEURE

● **Journées de Besançon.** Elles ont connu un indéniable succès dont le mérite ne peut être imputé qu'aux organisateurs et aux participants, non au soleil qui a boudé. Par contre, quelle belle pluie, quel bon froid ! Surtout, quelles bonnes journées mathématiques ! Merci aux Amis de la Régionale de Besançon.

Un compte rendu des journées et de l'assemblée générale paraîtra dans le *Bulletin* 270.
Nous espérons publier bientôt plusieurs des conférences qui ont contribué au succès de ces journées.

● **Comité national du 22 juin.** Il s'est réuni à Sèvres, pendant le colloque sur la formation permanente organisé par la Régionale Parisienne. Compte rendu dans le *Bulletin* 270.

Cependant, dès aujourd'hui, en page 2 de couverture du *Bulletin* 268, nous donnons la nouvelle composition du Bureau national et des commissions.

● **Horaires de Sixième et de Cinquième.** Le nouveau ministre de l'Éducation Nationale a enfin signé l'arrêté précisant les horaires dans ces classes :

Sixième, avec application des nouveaux programmes (ne pas oublier la circulaire du 20 mai 1969 relative à la formation d'équipes de professeurs), horaire hebdomadaire : 3 heures + 1 heure de travail dirigé avec effectif de demi-classe pour les effectifs supérieurs à 24.

Cinquième : 2 heures + 1 heure de travail dirigé. Mais, attention à la mention : *une quatrième heure de mathématiques sera donnée lorsque les établissements en auront la possibilité*. Dans une large mesure, cela dépend de nous. Pour amorcer dès la Cinquième 69-70 la réforme qui y sera mise en place en 70-71, profitez de cette possibilité.

Numéro spécial sur la Sixième (*Bulletin* 269) en préparation, pour contribuer à la réalisation de la réforme qui commence.

A paraître en septembre, octobre 1969.

Un tirage supplémentaire est prévu : faites connaître vos commandes. Prix du n° spécial : 7 F.

a sélectionné
parmi ses nouveautés

P. KRÉE

Introduction aux mathématiques
et à leurs applications fondamentales

MP2 - Maîtrise de M.A.F. — 56 F

G. LEFORT

Exercices d'algèbre et analyse

Tome 1 — 1^{er} cycle MP, 1^{re} année. Broché : 36 F - Relié : 44 F

Tome 2 — 1^{er} cycle MP, 2^e année. Broché : 48 F - Relié : 56 F

L. CHAMBADAL

Calcul des probabilités

1^{er} cycle — 15 F

E. BERREBI

Mathématique

Exercices corrigés - Licence ès sciences économiques

Tome 1 : 22 F — Tome 2 : 29 F — Tome 3 : 26 F

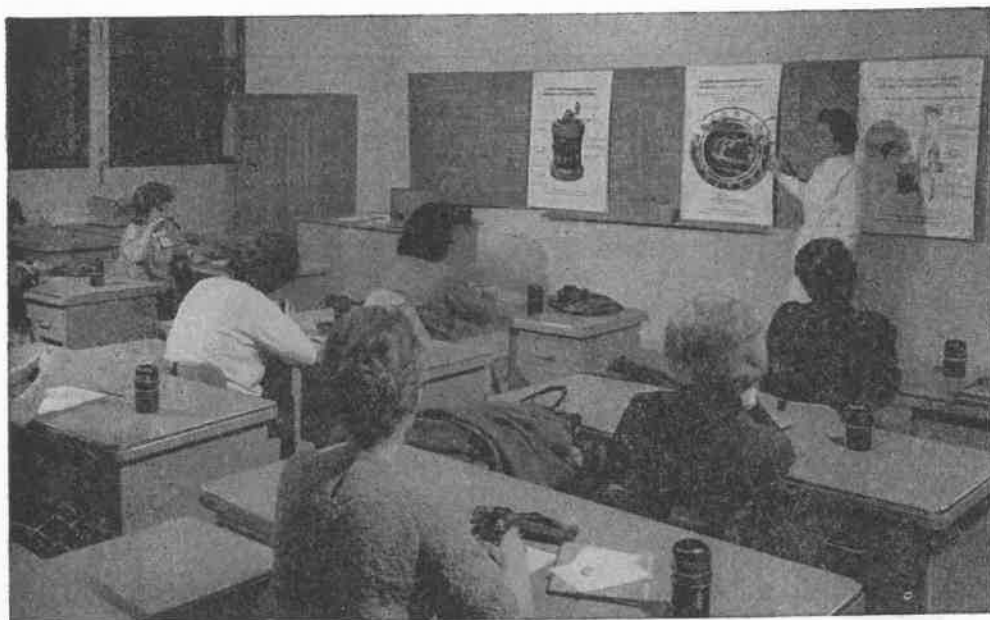
N. Ja. VILENKIN

**Fonctions spéciales et théorie
de la représentation
des groupes — 98 F**

T. E. HARRIS

Les processus de ramification

Applications à la physique et à la biologie — 48 F



A chaque élève,
sa machine à calculer

CURTA

Les méthodes modernes d'enseignement commercial rendent indispensable l'exécution fréquente, par les élèves, de **travaux pratiques** de calcul.

En raison de leur encombrement, de leur poids et de leur bruit, les machines à calculer normales présentent souvent de nombreuses difficultés d'emploi dans une classe.

Chaque CURTA peut réaliser aisément tout le travail d'une machine à calculer standard et offre, en outre, bien d'autres possibilités. Son fonctionnement silencieux permet de

plus l'exécution simultanée d'autres exercices pendant la classe.

La sécurité d'emploi de la CURTA (celle-ci est fabriquée par les **horlogers suisses**) est de réputation mondiale.

Des **planches de grand format**, très lisibles, facilitent l'exposé au tableau noir, du fonctionnement de la machine.

Vous pouvez obtenir toutes les informations désirées en complétant le coupon-réponse ci-contre, et en le retournant à **INNOVA**, 10, rue aux Ours, PARIS (3^e) - Tél. : 887-46-80.

☐

Veuillez m'envoyer une documentation détaillée et les conditions réservées à l'Education Nationale.

☐

Veuillez prendre rendez-vous pour effectuer une démonstration.

☐

Veuillez m'adresser une machine CURTA pour un essai gratuit de 10 jours.

Nom : _____

Etabl. scolaire : _____

Adresse : _____

Téléphone : _____

**Un ensemble pédagogique
délibérément moderne
qui réserve
au Professeur
toute initiative
dans la conduite
de sa classe**

BREARD MATHÉMATIQUES 6^e

L'ÉCOLE

11, Rue de Sèvres,
Paris 6^e

Mathématiques 6^e F 11,00

Tests d'acquisition 6^e F 6,50

Auxiliaires pédagogiques

à paraître en Juin 1969 :

Documents pédagogiques 6^e F 15,00

Solutions 6^e F 20,00

Tests d'acquisition - Solutions 6^e F 10,00

BORDAS

37, rue Boulard, Paris-XIV^e

NOUVEAUTÉ

COLLECTION ÉTUDES SUPÉRIEURES

en collaboration avec les Éditions Mouton

Colette HUG

L'ENFANT ET LA MATHÉMATIQUE

**Expérience originale de rénovation
de l'enseignement mathématique à l'école primaire.**

288 pages 12,00 F

Il est indispensable que la formation mathématique dans son renouvellement soit entreprise dès le plus jeune âge. Comment la concevoir, la préparer, l'entreprendre, autant de questions qui sont abordées dans cet ouvrage. Celui-ci s'adresse aussi bien aux parents qu'aux professeurs et aux mathématiciens. Il ne peut laisser indifférent quiconque s'intéresse à l'enfance car il touche aux fondements de la pensée logique et conceptuelle.

Salle d'exposition : 93, rue de Seine, Paris-VI^e

Rentrée 1969
Mathématique 6^e
Nouveau programme

Dans la
COLLECTION
A. MAUGUIN

Vient de paraître :

MATHÉMATIQUE CLASSE DE SIXIÈME

- **Livre de l'Élève.**
- **Livret pédagogique et corrigé.**

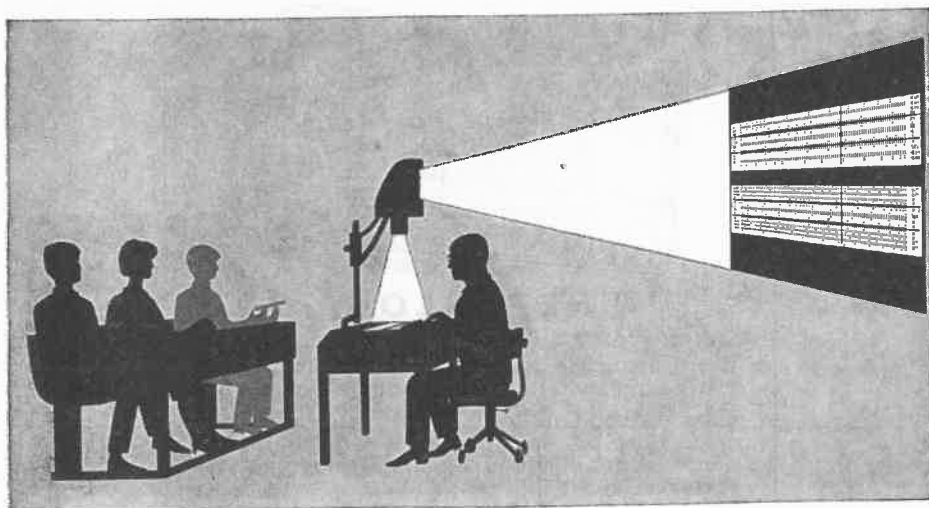
Ce manuel **entièrement nouveau**
est conforme au programme du 29 juillet 1968.

SPÉCIMEN SUR DEMANDE A MM. LES PROFESSEURS

LIBRAIRIE ISTR
7, rue de Lille, 75 PARIS VII^e
Tél. : 222-17-10

ARISTO

REGLES A CALCUL MODELES DE PROJECTION



Maniables et de dimensions réduites (env. 17×38 cm), les règles de projection ARISTO en ARISTOPAL transparent, indéformable et incassable servent à la démonstration des principes de la règle à calcul au moyen d'un diascope. Grâce à la luminosité de ce genre de projecteurs, il est inutile d'obscurcir la salle: les élèves peuvent reproduire simultanément sur leur propre règle toutes les opérations présentées. Les graduations d'une grande clarté, chiffrées en rouge et en noir, sont parfaitement lisibles, même depuis le fond de la salle.

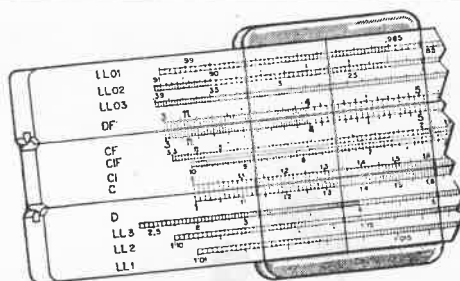
La règle de projection se pose simplement sur le plan de travail du projecteur, où elle est maintenue par des tampons mousse anti-dérapants.

Les échelles des faces avant et arrière sont disposées côte à côte et sont projetées simultanément.

Nous livrons des modèles de projection pour les règles à calcul ARISTO-Junior, ARISTO-Scholar, ARISTO-TriLog, ARISTO-Studio et ARISTO-MultiLog.

Agent Exclusif en France : MINERVA, Paris XIX^e

DENNERT & PAPE · ARISTO-WERKE KG · HAMBURG



NEPER LOG

(Double-face)

Correspondances entre les échelles de chaque face assurée par un curseur double-face.

Echelles-Log-Log e^x et e^{-x} permettant les calculs des puissances et racines positives ou négatives des nombres compris entre : 1,01 à 10^5 et de 0,991 à $2 \cdot 10^{-5}$.

Echelles πx et $\frac{1}{\pi x}$ évitant les cas hors règle.

Possibilités de calculs étendues avec un minimum de manipulations.



BREVETÉ S.G.D.G.

21, Rue de Montsouris - PARIS (XIV^e)

Tél. : POR 38-10

CHEZ VOTRE FOURNISSEUR

Vient de paraître :

la bible élémentaire
de la mathématique de
DEMAIN...

PAPY

LE PREMIER ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE

Ouvrage rédigé avec la collaboration
de

FRÉDÉRIQUE et HOLVOET

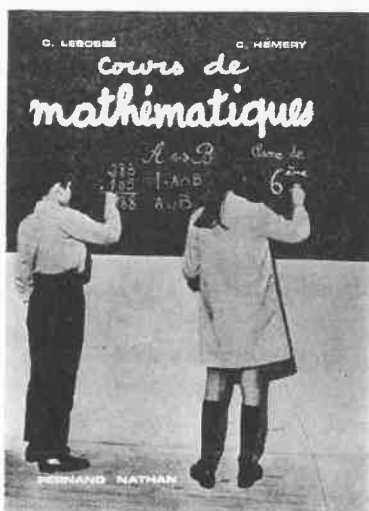
Un ouvrage de PAPY est un **PAPY** ! ce qui en soit constitue une garantie sérieuse de sa valeur. Celui-ci, qui vient de paraître, sera vivement apprécié par MM. les Professeurs de l'enseignement secondaire, en particulier le second cycle. Les bases d'un "recyclage" pour s'adapter à l'enseignement correct de la mathématique moderne.

Un volume relié de 314 pages, texte en 2 couleurs. Prix : 67 F.

Eyrolles
EDITEUR
61 BOULEVARD ST GERMAIN, PARIS

programme 1968

COLLECTION LEBOSSÉ HÉMERY



6^e COURS DE MATHÉMATIQUES

Livre du professeur... 13,90

Soucieux de respecter strictement la lettre des programmes, les auteurs ont attendu que ceux-ci consacrent officiellement l'introduction des Mathématiques Modernes dans le premier cycle de l'enseignement secondaire, avant de rédiger cet ouvrage, le premier d'une nouvelle collection. Le symbolisme, l'abstraction, la généralisation nécessités par le langage des « ensembles » ne sont pas des démarches tellement naturelles de l'esprit humain. À partir d'exemples concrets, en faisant appel aux connaissances déjà acquises dans l'enseignement du premier degré, nous espérons rendre accessibles aux jeunes élèves de sixième des éléments nouveaux que la rénovation de l'enseignement des Mathématiques a rendus nécessaires.

2^e C GÉOMÉTRIE.

Cet ouvrage développe en 24 leçons le cours de Géométrie de seconde C. Il y est largement fait appel aux notions de transformations ponctuelles dans le plan, en particulier à la symétrie-point et à la symétrie axiale. L'ordre

du programme est respecté; la géométrie vectorielle occupant les deux-tiers de l'ouvrage. Le recueil d'exercices et de problèmes de révision a été entièrement revu et modernisé. On y trouvera l'occasion d'appliquer les connaissances acquises dans le premier cycle et de découvrir de nombreux « lieux géométriques », conformément aux instructions qui accompagnent le programme.

2^e C ALGÈBRE.

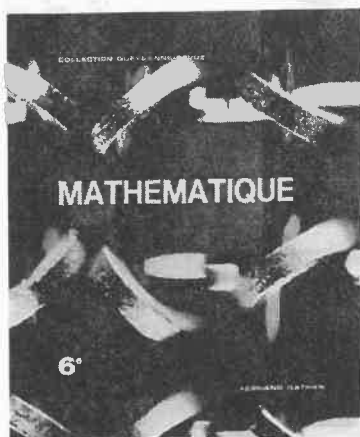
Entièrement conforme aux nouveaux programmes, qui consacrent, officiellement l'introduction des Mathématiques Modernes au niveau de la classe de seconde, cet ouvrage traite du langage des ensembles, des propriétés des nombres réels (souvent admises) et des fonctions numériques d'une variable réelle. Un soin particulier a été apporté aux choix des exercices et des problèmes. Beaucoup d'entre eux constituent une révision indispensable des notions de Calcul Algébrique.

FERNAND NATHAN

NOUVEAUTÉS

*mathématique
moderne
queysanne revuz*

UN BLOC PÉDAGOGIQUE CLASSE DE SIXIÈME



LIVRE DE L'ÉLÈVE.	14,80
LIVRE DU PROFESSEUR	5,00
TRAVAUX DIRIGÉS — 1 cahier pour l'élève.	4,80
— 1 livre pour le professeur.	6,50

Ce nouveau manuel de sixième développe le programme de 1968. Il est divisé en une trentaine de chapitres correspondant en gros à une semaine de travail. Dans chacun d'eux les Travaux pratiques sont non seulement intégrés au texte, conformément aux instructions Ministérielles, mais participent au développement du cours. Ainsi, à partir de situations familières et concrètes, aidé de figures utilisant largement les couleurs, c'est l'élève lui-même qui est amené aux conclusions et formulations essentielles. Des exercices nombreux, se référant à chaque paragraphe, terminent chaque chapitre; ils peuvent servir à multiplier les exemples introductifs. De plus un cahier de Travaux dirigés dont les exercices se réfèrent également à chaque paragraphe du manuel est associé une feuille détachable du cahier de Travaux Dirigés. Dans les conditions d'effectifs actuelles, cette forme de manuel a paru préférable, d'une part pour assurer une meilleure cohésion de l'ensemble, d'autre part pour permettre aux élèves de fréquents retours en arrière.

MATHÉMATIQUE 2 ^e CT (2 Tomes)	
Tome 1	10,50
Tome 2 (en préparation)	
livre du professeur	

A PARAÎTRE PROCHAINEMENT :

MATHÉMATIQUE 2 ^e A (1 Tome)	
livre du professeur	

PROGRAMME 1968

5 ^e MATHÉMATIQUES (rouge)	11,90
Livre du Professeur	5,80
4 ^e MATHÉMATIQUES (vert)	12,30
Livre du Professeur	6,90
3 ^e MATHÉMATIQUES (violet)	15,00
Livre du Professeur	6,90

FERNAND NATHAN

foucher

Mathématiques appliquées

■ Statistiques - Section G. de **Leurion**
Tome I : BTnE : **7,70** — Corrigé : **8,50**
Tome II : Cl. Term. : **6,90** — Corrigé : **8,50**

Mathématiques financières

■ Opérations à long terme de **Chabriol**
Tome I : BTnE : **11,60** — Corrigé : **12,40**

Comptabilité Analytique d'Exploitation

■ de **Reverdy et Court**
Tome I : **12,40**
Tome II : **12,40**

Envoi du catalogue général gratuit sur simple demande.

■ 128, rue de Rivoli — Paris-1^{er} — C.C.P. 1804-42 — Tél. 236.38.90 ■

MATHÉMATIQUES 6^e

NOUVEAU PROGRAMME

Arrêté du 29-7-68. B. O. du 31-10-68 — Instructions du 28-2-69. B.O. du 6-3-69

par **M. MONGE** Ancien Élève de l'École Normale Supérieure. Professeur agrégé

M. GUINCHAN Licencié ès Sciences. Professeur de C. E. G.

J.-P. PELLE Agrégé de l'Université.

J. MONGE Licenciée ès Sciences

G. PELLE Professeur certifié

- Un volume relié pelliculé. 288 pages 11,50 F
- Corrigé des exercices, à l'usage exclusif des professeurs de mathématiques Été 1969
- Livret de conseils pédagogiques pour les professeurs et les parents Été 1969

Cet ouvrage est l'œuvre commune d'une équipe dont la qualification est étendue aux différentes catégories de l'enseignement actuel.

Un livre nouveau, moderne, dont la conception pédagogique et mathématique est le fruit d'une expérience très étendue des auteurs. La collection, bien connue depuis longtemps, leur a permis d'établir des liens très fructueux avec les utilisateurs de toutes les régions du pays.

Le résultat est un ouvrage très pédagogique où le programme est traité sans développement inutile, sans abus de terminologie.

Pour les élèves, la classe de 6^e sera une découverte sérieuse, progressive, capitale pour leur formation. Nous avons veillé à les intéresser, à faire appel à leur expérience personnelle, à ne formuler une notion que lorsqu'elle aura été « vécue », à refuser le pédantisme.

La rédaction, très précise, est toujours brève et claire. Le texte est recoupé de courts exercices pour contrôler l'adhésion de l'élève et pour la confirmer.

En outre, une réserve considérable d'exercices (730) soigneusement gradués offre à l'enseignement l'indispensable gamme de travaux personnels.

La réflexion, l'effort d'analyse et d'expression, l'emportent toujours sur le vain calcul et l'habileté routinière.

Le format à l'italienne 22 × 19 offre de grandes marges où figurent les dessins en regard du texte.

Une typographie actuelle, vigoureuse et aérée.

L'emploi de la couleur met en relief les éléments essentiels et anime les figures.

Toutes ces qualités font de ce livre un instrument fonctionnel et attachant.

MM. les Professeurs de mathématiques, intéressés par cet ouvrage et qui ne l'auraient pas encore reçu en SPÉCIMEN, sont invités à le demander à notre SERVICE PUBLICITÉ, (Joindre 2,00 F en timbres-poste pour participation aux frais.)

BELIN 8, rue Férou, PARIS-6^e — Tél. 326.89.45

COURS DE MATHÉMATIQUES

Henri POCHARD
Professeur Agrégé à Nice

PROGRAMME 1968

Vient de paraître :

Classes de 2^e A C T tome I

Langage des ensembles. Nombres réels. Fonctions numériques d'une variable réelle.

Classes de 2^e A C T tome II

Géométrie plane et espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.
Géométrie métrique plane.

Paraîtra en Septembre :

Classe de 2^e A (programme obligatoire)

Les spécimens seront envoyés sur simple demande

Rappel :

Classes de 1^{re} A (volume unique)
1^{re} C D T tome I

1^{re} C T tome II
1^{re} D tome II

Classes terminales A (volume unique)

C T tome I
D tome I

C D T tome II
C T tome III

GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins, PARIS

NOUVEAUTÉ,

VIENT DE PARAÎTRE :

POUR UNE RÉVISION RAPIDE DU COURS DE MATHÉMATIQUES

Classes Terminales C et E

par

A. COMBES

Professeur au lycée Voltaire



Volume 13,5 × 21 cm, de 192 pages . . . **Prix conseillé : 7,43 F**



Il a paru nécessaire que les élèves aient sous la main des livres qui leur permettent d'avoir l'essentiel de leurs cours de mathématiques et cela d'une manière pratique : c'est là l'objet de cette collection dont le succès des premiers ouvrages nous a persuadés de son utilité.

L'auteur donne ainsi la possibilité aux élèves non seulement de faire une révision rapide de leur cours, mais surtout de mettre au point leurs connaissances. Mieux, ces volumes seront conservés et l'on pourra, les années suivantes, s'y reporter pour se remémorer les points devenus parfois obscurs.



Rappel : Dans la même collection :

<i>Classes de Seconde A, C et T</i>	<i>Prix conseillé : 5,30 F</i>
<i>Classes de Première A, B, C, D et E.</i>	<i>Prix conseillé : 7,43 F</i>
<i>Classe Terminale D.</i>	<i>Prix conseillé : 5,92 F</i>
<i>Pour une Révision rapide du cours de Probabilités et de Statistique (1^{re} et Terminales)</i>	<i>Prix conseillé : 3,52 F</i>

Ouvrages conformes aux derniers programmes

VUIBERT

63, bd SAINT-GERMAIN, 63, PARIS-V^e

ÉDITIONS WESMAEL-CHARLIER

28, rue Madame, PARIS-6^e — 548-16-61

Ouvrages de mathématiques conformes aux directives nouvelles

WERBROUCK et WAMBERSIE

Première édition prévue en quatre fascicules

Sort de presse

Fascicule II — Les nombres naturels — notions d'équivalence et translations — 66 pages . . . 5,55 + tva : **6,20**

Déjà disponibles

Fascicule I — Ensembles et relations — Premiers éléments de Géométrie — 96 pages . . . 7,80 + tva : **8,60**

Fascicule III — Les entiers rationnels — 32 pages . . . 3,40 + tva : **3,75**

A paraître

Fascicule IV —

Collection LEROY et HANCHIR

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE MODERNE

1^{re} année de l'Enseignement secondaire

Sort de presse

4^e partie — Géométrie 34 pages . . . 2,81 + tva : **3,10**

Déjà disponible

1^{re} partie — Ensembles et relations — 36 pages . . . 4,22 + tva : **4,65**

A paraître

2^e et 3^e parties

R. LISSAGORSKY et P. SIMON

COURS DE MATHÉMATIQUE

Classe de 6^e

Sort de presse

Fascicule III — Relation — Composition — Fonctions — Projection suivant une direction — l'Ensemble des nombres naturels — 60 pages 4,83 + tva : **5,40**

Déjà disponible

Fascicule I — Premières notions sur les ensembles — Algèbre des Ensembles — 32 pages . . . 2,81 + tva : **3,10**

Fascicule II — Premières notions sur les relations — Premiers éléments de Géométrie — Entretien des acquisitions et Compléments 48 pages . . . 4,22 + tva : **4,65**

A paraître

Fascicule IV

LIBRAIRIE ANDRÉ DESVIGNE - 17, rue Mulet, LYON

DEPOT A PARIS : 6 bis, rue de l'Abbaye - PARIS-6^e
C.C.P. LYON 94-90 — R.C. LYON 57 B 2087

MATHÉMATIQUES

NOUVEAUX PROGRAMMES EN USAGE à la RENTRÉE 1969

NOUVEAUTÉS

- V. Lespinard — Mathématiques, classe de SIXIÈME.
V. Lespinard — Algèbre, classe de SECONDE C.
V. Lespinard — Géométrie, classe de SECONDE C.
V. Lespinard — Mathématiques, classe de SECONDE A.
V. Lespinard — Algèbre, classe de SECONDE T.

Classes TERMINALES — Programme 1968 — Édition ORANGE

V. Lespinard et R. Pernet

Classe de TERMINALE A1, A2, A5 — Mathématiques	Br.	5,00
Classe de TERMINALE A — Mathématiques	Cart.	9,00
Classe de TERMINALE B — Mathématiques	Cart.	17,70
Classe de TERMINALE C — Géométrie	Cart.	23,75
Classe de TERMINALE C et T — Analyse, Cinématique	Cart.	18,50
Classe de TERMINALE C et T — Structures, Arithmétique .	Cart.	19,10
Classe de TERMINALE D — Structures, Analyse et Probabilités	Cart.	19,20
Classe de TERMINALE D — Géométrie et Cinématique	Cart.	19,20

Les ouvrages des anciens programmes resteront en vente jusqu'à épuisement, et notamment la « GÉOMÉTRIE classe de Mathématiques » dont la structure correspond à celle des nouveaux programmes de « T ».

Programme du 8 juin 1968 — Édition ORANGE

V. Lespinard et R. Pernet

Classe de PREMIÈRE A : Mathématiques.....	Cart.	13,50
Classe de PREMIÈRE B : Mathématiques	Cart.	28,95
Classe de PREMIÈRE C : Géométrie et Géométrie analytique	Cart.	14,75
Classe de PREMIÈRE C et D : Algèbre - Analyse - Trigonométrie - Cinématique (1 volume)	Cart.	16,50
Classe de PREMIÈRE D : Géométrie Analytique et Statistique	Cart.	12,00

Cycle d'Orientation — Programme 1964 — Édition ORANGE

V. Lespinard et R. Pernet

Mathématiques, classe de Troisième	Cart.	11,00
Mathématiques, classe de Quatrième	Cart.	12,80

Cycle d'Observation

V. Lespinard et R. Pernet

Mathématiques, classe de Cinquième (avec Astronomie).....	Cart.	8,95
---	-------	------

armand colin

Formation des adultes

Collection dirigée par le Centre Universitaire de Coopération Économique et Sociale (CUCES) et l'Institut National pour la Formation des adultes (INFA)

Des ouvrages simples et clairs accessibles aux adultes peu scolarisés et engagés dans la vie professionnelle dans le domaine de la Promotion sociale et de l'Éducation permanente.

Cours programmés

Déjà parus :

Les vecteurs

Robert A. Carman,
traduit de l'américain, 128 pages 16 × 21 Broché 12,10 F

Transformations des égalités

Gerhard Schröter,
traduit de l'allemand, 120 pages 16 × 21 Broché 9,50 F

En préparation

Puissance

Radicaux

Fonctions trigonométriques

En tête de chaque ouvrage se trouvent précisés son public, son niveau, son mode d'utilisation.

la mathématique parlée
par ceux qui l'enseignent

la mathématique parlée...

...par ceux qui l'enseignent

Édition 1967, *en souscription.*

Millésime 1968,

Édition 1968, *en préparation.*

*Si vous ne comprenez rien à
ces appellations, lisez la notice
p. 240.*



DELAGRAVE

Nouveautés

Collection

P. VISSIO

R. CLUZEL et P. VISSIO

MATHÉMATIQUE

Classes de SECONDE

Un volume 16 × 22, 608 pages, cart..... 28 »

MATHÉMATIQUE

Seconde A

Un volume 16 × 22, 416 pages, cartonné 19,50 »

R. POLLE et G. H. CLOPEAU

MATHÉMATIQUE 6^{ème}

Un volume 22 × 16, 272 pages, cartonné..... 12,50 »

Une pochette de fiches d'exercices 8,90 »

R. POLLE

L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

EN CLASSE DE SIXIÈME

A l'usage des professeurs qui auront à enseigner

en septembre 1969 le nouveau programme de mathématique

Un volume 14 × 22,5, broché..... 12 » cartonné.... 15 »

R. CLUZEL et P. VISSIO

MATHÉMATIQUE

1^{re} F

Un volume 16 × 22, 416 pages, cartonné..... 23,50 »