

## A propos d'une histoire de la notion de groupe abstrait

Jean ITARD

Notre collègue Hans Wussing, né en 1927, est professeur d'Histoire des Mathématiques à l'Université Karl Marx de Leipzig et membre correspondant de l'Académie Internationale d'Histoire des Sciences.

Il a déjà donné une histoire des mathématiques dans l'Antiquité, *Mathematik in der Antike*, Teubner, Leipzig, première édition en 1962, seconde édition en 1965.

On peut vouloir ignorer la pensée mathématique au paléolithique, ou dans la Chine antique, à Babylone, à Alexandrie ou à Athènes. On peut croire que savoir ou ignorance en la matière importent peu à l'enseignant de nos jours. Au reste, nombreux sont les bons manuels récents sur l'histoire des mathématiques dans l'Antiquité.

Mais tout change lorsque l'on aborde des temps plus proches de nous, singulièrement le XIX<sup>e</sup> siècle et le début du XX<sup>e</sup>. Certes nous avons le Bourbaki, *Éléments d'Histoire des Mathématiques* dont la première édition est de 1960. C'est un outil inestimable mais où un certain parti-pris se manifeste. Bourbaki veut ignorer la Géométrie, ramenée par lui à l'étude pure et simple des formes quadratiques. Cela se conçoit dans la perspective où il se place. Révolutionnaire, fondant la mathématique sur de solides bases nouvelles, il est normal qu'il écarte les échafaudages désormais inutiles, dont le plus encombrant est la Géométrie, d'Euclide, de Poncelet, de Plücker ou de Lobatcheski.

Dans un esprit tout différent on peut citer *A History of Geometrical Methods* de l'Américain Julian Lowell Coolidge (1873-1954), publiée en 1940 et dont les éditions Dover, de New York, assurent de nouveaux tirages.

On peut signaler aussi, de Félix Klein (1849-1925) les *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19 Jahrhundert* dont le tome I a été réédité à Berlin en 1926 et le tome II, dans la même ville, en 1927.

Le nom seul de l'auteur montre que l'histoire du XIX<sup>e</sup> siècle y est considérée d'un point de vue élevé, et que la notion de groupe y est mise en évidence.

Pour qui s'attacherait davantage à l'Analyse, les conférences faites en Amérique par Émile Picard et parues en 1905 chez Gauthier-Villars sous le titre *Sur le développement de l'Analyse et ses rapports avec diverses sciences* seraient fort utiles.

Mais aujourd'hui c'est l'Algèbre qui a le vent en poupe. C'est ce qu'avait bien compris Jean Dieudonné — dont les liens d'étroite amitié avec Nicolas Bourbaki sont bien connus — lorsqu'il proposa à René Taton d'organiser un colloque sur *Les origines de l'Algèbre moderne*. Ce colloque s'insérait dans les activités du 12<sup>e</sup> Congrès international d'Histoire des Sciences tenu à Paris du 25 au 31 août 1968.

Cinq rapports furent présentés :

*La Théorie des nombres et les origines de l'algèbre moderne* par moi-même, *Sur l'histoire de l'Algèbre commutative* par M<sup>lle</sup> Isabelle Bachmakova (U.R.S.S.), *La naissance de deux jumelles : la logique mathématique et l'algèbre ordonnée* par Paul Dubreil, *L'École algébrique anglaise* par Lubos Novy (Tchécoslovaquie) et *L'algèbre topologique, en particulier les groupes topologiques et de Lie*, par Hans Freudenthal (Pays-Bas). J. Dieudonné, qui présidait, regretta, avec nous tous, qu'un rapport, au moins, n'ait pas été spécialement réservé aux algèbres non commutatives. Pour ma part, mon travail — qui ne me satisfait pas — m'a appris qu'écrire sur le XIX<sup>e</sup> et le XX<sup>e</sup> siècle est fort difficile. Je le savais d'ailleurs déjà par ma contribution au troisième tome de l'Histoire Générale des Sciences (P.U.F.).

Disons tout de suite que rapports et discussions du colloque paraîtront dans les Actes du 12<sup>e</sup> Congrès.

Voici une trop longue introduction, le but essentiel de cette note étant de signaler la parution du nouvel ouvrage de H. Wussing, *Die Genesis des Abstrakten Gruppen Begriffes*, Veb Deutscher Verlag der wissenschaften, Berlin Est 1969.

C'est un ouvrage de 258 pages dont les 197 premières comprennent le texte, suivi de 241 notes, d'une bibliographie de 747 articles ou ouvrages et d'un index des noms cités couvrant les trois dernières pages.

Il ne faut pas y chercher les travaux contemporains, l'auteur s'arrêtant sagement à 1920. A ce point de vue, Bourbaki et Freudenthal dans sa contribution au 12<sup>e</sup> Congrès et dans d'autres écrits, sont plus complets.

On peut dire que la belle étude de H. Wussing est une histoire des mathématiques de 1750 environ à 1920, centrée sur la notion de groupe. L'évolution de la géométrie jusqu'au début du XIX<sup>e</sup> siècle rapidement esquissée, on voit apparaître la Géométrie projective, s'élargir la notion de coordonnées, surgir les géométries non-Euclidiennes, se poser les problèmes sur la nature de l'espace. Les rôles de Möbius (1790-1868) et de Plücker (1801-1868) sont alors mis en évidence.

Mais à côté de la Géométrie « moderne », la théorie des nombres depuis Euler (1707-1783) et Lagrange (1726-1813) joue ici un rôle éminent, surtout avec Gauss (1777-1855). Je ne veux pas me laisser aller à développer des considérations qui me sont chères, mais l'auteur a eu raison de montrer que tant en Géométrie qu'en théorie des nombres la notion implicite de groupe sous-tend presque toutes les recherches.

La part du lion échoit cependant à la résolution algébrique des équations avec, d'abord, Lagrange et Vandermonde (1735-1796). C'est de ce genre de travaux, auxquels se sont appliqués Ruffini (1765-1822), Abel (1802-1829) et Gauss entre bien

d'autres, que naît le concept de groupe de permutations, c'est-à-dire — mais on ne le saura que bien plus tard — le concept de groupe fini. En effet tout groupe fini est isomorphe à un groupe de permutations : théorème de Cayley (1821-1895), énoncé en 1878.

Mais revenons en arrière. On sait que l'expression « Groupe » est due à Évariste Galois (1811-1832). L'auteur lui consacre évidemment de longues et nombreuses pages et donne de plus des précisions sur la diffusion de ses idées, tant à l'étranger qu'en France avec J. Liouville (1809-1882) qui le fait connaître en 1846, J.-A. Serret (1819-1885) et son traité d'Algèbre Supérieure, ou Camille Jordan (1838-1922).

On ne peut pas tout savoir, on ne peut pas tout dire. C'est ainsi que si dans la bibliographie, pourtant très riche, les *Œuvres de Galois*, 1897 et les *Manuscrits d'Évariste Galois*, 1908, sont signalés, le travail de R. Bourgne et J.-P. Azra, préfacé par J. Dieudonné *Écrits et Mémoires Mathématiques d'Évariste Galois*, Gauthier-Villars 1962, est passé sous silence. Il doit cependant figurer dans toute bibliothèque de Faculté, voire de Lycée.

De même pour Camille Jordan. S'il est un des auteurs les plus souvent cités par H. Wussing, si la bibliographie lui consacre 35 entrées, et si l'on y trouve le tirage en 1957 (Blanchard) du *Traité des Substitutions* (1870), l'édition de ses œuvres, commencée en 1961 chez Gauthier-Villars (4 vol.), n'est pas signalée. C'est là que les lecteurs intéressés par les renvois de H. Wussing trouveront leur pâture.

Puisque le mot « isomorphe » et ses divers dérivés sont dans notre enseignement d'un usage très fréquent, je rappelle ici qu'il est dû à C. Jordan.

En 1870 deux jeunes mathématiciens, camarades d'étude et liés d'amitié tant à Berlin qu'à Paris, feront faire à la notion de groupe des progrès considérables. Ce sont l'Allemand Félix Klein, assistant de Plücker dans son enseignement de physique, et le Norvégien Sophus Lie (1842-1899). Leur rôle est étudié ici de très près, surtout celui de Klein. En particulier la genèse du célèbre programme d'Erlangen est nettement mise en relief.

Disons encore qu'est enfin rendu à J.-A. Serret l'hommage qu'il mérite et que le rôle de Cayley tant en Géométrie non Euclidienne que dans l'étude des groupes finis abstraits est solidement mis en évidence.

Dans les dernières pages J.-A. de Séguier (1862-1937), disciple de Camille Jordan a droit à une étude particulière pour sa *Théorie des Groupes finis*, Paris 1904, et ses *Groupes de substitutions*, Paris 1912. N'est évidemment pas citée la *Théorie des Groupes abstraits* (Gauthier-Villars, 1938) qu'il a écrite en collaboration avec Potron.

J'espère avoir laissé les lecteurs sur leur faim, afin de les encourager à lire un ouvrage captivant. Il est malheureusement écrit en Allemand donc peu accessible pour beaucoup. Il mériterait une traduction. Qu'un jeune mathématicien l'entreprenne, il sera payé de son effort par le plaisir qu'il y prendra. Quant au gain pécuniaire, il n'y doit pas songer, heureux s'il trouve un éditeur. La paresse de l'édition française fait un peu craindre en ce domaine, mais il y a l'A.P.M. Pourquoi n'obvierrait-elle pas à cette carence?

Jean ITARD.

Clermont-Ferrand : 7 - 10 Mai 1970 - Mathématisation