

$N_3(ca) = N_3(ac) + 1$. Si un segment ab est intérieur à ABC , il compte une fois comme segment ab et une fois comme segment ba .

Donc

$$\boxed{N(ab, bc, ca) = N(ba, cb, ac) + 3} \quad (1)$$

Considérons d'autre part les triangles :

Un triangle abc contient un segment ab , un segment bc et un segment ca et intervient pour $3N(abc)$ unités dans $N(ab, bc, ca)$.

On compte de même $3N(acb)$ unités dans $N(ba, cb, ac)$.

Tout triangle abb par exemple intervient une fois dans chaque membre de (1). Il en résulte $3N(abc) - 3N(acb) = 3$ et $N(abc) - N(acb) = 1$.

EUVRARD

(Saint-Louis, Paris).

Problèmes combinatoires

1. La Combinatoire, matière de recherche et matière d'éveil.

1.1 Pendant longtemps, la Combinatoire est restée liée à l'Arithmétique dans des problèmes se rapportant à la mystique des nombres. Citons, par exemple, la

construction de carrés magiques parmi lesquels $\begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ serait (selon la légende)

le plus anciennement connu.

Peu à peu, à travers de nombreuses « récréations mathématiques », la Combinatoire trouva son domaine propre qui est l'étude des structures (ou configurations) dans les ensembles finis, cette étude se faisant à divers points de vue : existence (ou non-existence), description, classification en sous-structures, dénombrement (calcul exact ou minoration - majoration).

Depuis un siècle, les problèmes de fondement (syntaxe mathématique, Logique), la Théorie des Ensembles (et la sous-théorie des graphes), l'Algèbre (permutations, groupes et corps finis), la Théorie des Nombres, la Topologie, la Théorie des jeux stratégiques, la Programmation codée, la Technologie des automatismes, ... ont enrichi la Combinatoire en suggérant des sujets de recherches extrêmement variés. Par cette science, qui semble promise à une éternelle jeunesse, les mathématiques actuelles renouent très fortement avec le « fini » et le « discret ».

1.2. Sous l'angle de la pédagogie, quels motifs d'intérêt peut-on trouver aux problèmes combinatoires? En voici quelques-uns :

a) Les problèmes combinatoires sont intellectuellement très stimulants : ils font appel à l'imagination, à l'esprit d'invention, à l'activité ludique et au goût du jeu si nécessaires en Mathématique.

b) Les configurations étudiées réclament une bonne compréhension du premier niveau de la Théorie des ensembles (qui trouve, en Combinatoire, un champ naturel d'exercices). Mais, en dehors de ce minimum de notions ensemblistes, les problèmes combinatoires nécessitent assez peu de connaissances *a priori*, et ils procurent très tôt l'occasion de mini-déductions.

Voici un exemple de mini-déduction, cité par H. J. Ryser dans son excellent petit ouvrage : « *Mathématiques combinatoires* » (Monographies Dunod). Dans un échiquier de 64 cases, on supprime 2 cases situées aux extrémités d'une diagonale. On dispose, par ailleurs, de 31 dominos — chaque domino pouvant recouvrir exactement 2 cases. Peut-on recouvrir l'échiquier tronqué (de 62 cases) avec ces 31 dominos? Dès que l'on a remarqué que les deux cases supprimées ont même couleur, la réponse est « non » puisque chaque domino recouvre exactement une case blanche et une case noire, alors que l'échiquier tronqué ne comprend plus (par exemple) que 30 cases blanches et 32 cases noires.

En fait, ce problème (« domin-ation » d'un échiquier tronqué) concerne le produit cartésien $E \times F$ de deux ensembles finis totalement ordonnés qu'on peut identifier à $E = \{1, 2, \dots, 2m-1, 2m\}$, et $F = \{1, 2, \dots, p-1, p\}$, pour $p = 2n$ ou $p = 2n+1$.

Pour bien tronquer l'échiquier rectangulaire $E \times F$, on supprime un couple (a, b) pour lequel $a+b$ est pair (case blanche) et un couple (c, d) pour lequel $c+d$ est impair (case noire). Une « domin-ation » de l'échiquier tronqué $T = E \times F - \{(a, b), (c, d)\}$ est une partition de T en $mp-1$ dominos, chaque domino ayant l'une des deux formes : $\{(x, y), (x+1, y)\}$ ou $\{(x, y), (x, y+1)\}$.

c) Nombreux sont les problèmes combinatoires qui ont pour origine un diagramme planaire, ou qui se ramènent à l'observation d'un tel diagramme en choisissant judicieusement une représentation géométrique. Par exemple, le problème précédent (partition de T en $mp-1$ dominos) nécessite une bonne observation de cet être géométrique particulier que constitue un rectangle quadrillé. Nous soumettons à la sagacité du lecteur la démonstration de l'existence d'une telle « domin-ation », quel que soit T , lorsque $p = 2n$ (et l'étude du même problème lorsque $p = 2n+1$).

d) L'étude d'un problème combinatoire sur un ensemble de n éléments pourra toujours commencer par une expérimentation sur les petites valeurs de n . L'expérimentation s'arrête lorsque n devient trop grand, ce qui commande de raisonner pour apporter une décision dans tous les cas.

A elle seule, l'étape de l'expérimentation est très précieuse : elle rattache la Mathématique aux autres sciences et suscite — pour chaque problème combinatoire — une méthode ou une conjecture. Mais, devant un paramètre n pouvant prendre une infinité de valeurs, un jeune auditoire comprend que la Mathématique se distingue par une exigence qui dépasse l'expérimentation : celle de la preuve valable « pour tout n ».

e) Aucun domaine mathématique n'offre autant de variété que la Combinatoire. On trouve des configurations très intéressantes à tous les niveaux, depuis les Classes élémentaires jusqu'au Troisième Cycle des Universités! En tête de nombreuses publications — offrant une foule d'idées aux pédagogues et aux chercheurs — citons, depuis 1966, le « *Journal of Combinatorial Theory* » dont paraissent deux volumes par an.

En résumé, la Combinatoire — parée (pour les spécialistes) d'une incontestable modernité — constitue un excellent thème d'étude pour les débutants : elle éveille chez eux l'esprit d'observation, le sens de l'expérimentation (trop négligé en Mathématique) et, sans exiger de longues connaissances *a priori*, elle incite à la réflexion directe en vue de raisonnements relativement brefs.

2. Quelques exemples de problèmes combinatoires.

Nous allons illustrer les remarques précédentes en examinant, à titre d'exemples, trois catégories de problèmes combinatoires : problèmes « à seuil numérique », problèmes sur les graphes, problèmes de triangulation. Bien entendu, ces catégories ne sont pas exclusives (la théorie des graphes comporte des problèmes à seuil) et elles ne recouvrent qu'une partie de la Combinatoire dans ses développements actuels.

2.1 Problèmes à seuil numérique

2.1.1 Problèmes de tiroirs.

Étant donné deux entiers $k \geq 1$, $n \geq 1$, on répartit p objets entre k tiroirs. Alors, si p est assez grand, l'un des tiroirs contient au moins n objets. (Sinon, chaque tiroir contient au plus $n-1$ objets, donc : $p \leq k(n-1)$). En d'autres termes, si l'on note $|E|$ le cardinal de tout ensemble E : « Pour tout k -partage $(E_1, E_2, \dots, E_k)$ d'un ensemble E tel que $|E| \geq 1+k(n-1)$, il existe une classe E_i telle que $|E_i| \geq n$. Par contre, si $|E| \leq k(n-1)$, il existe un k -partage $(E_1, E_2, \dots, E_k)$ de E tel que $|E_i| < n$ pour toute classe E_i ».

On peut donc dire que $|E| = 1+k(n-1)$ représente un *seuil numérique* d'existence pour la configuration souhaitée (présence d'au moins n éléments dans l'une des k classes). Mieux, on peut dire que l'existence de la configuration est certaine si $|E|$ atteint ou dépasse le seuil, ce qui conduit à une interprétation probabiliste. Pour k, n donnés, on peut chercher la probabilité $f(p)$ pour que la configuration existe lorsque $|E| = p$. Pour $k = 2$, $n = 5$, on obtient :

p	4	5	6	7	8	9
$f(p)$	0	0,0625	0,2188	0,4531	0,7266	1

$$(f(p) = \frac{1}{2^p} (C_p^0 + C_p^1 + \dots + C_p^{p-n} + C_p^n + C_p^{n+1} + \dots + C_p^p))$$

pour $k = 2$ et $n \leq p \leq 2n-1$.)

2.1.2 Théorème de Ramsey

Notons $P_2(E)$ l'ensemble des paires $\{x, y\}$ d'éléments d'un ensemble E . Si $|E| = p$, alors $|P_2(E)| = \frac{p(p-1)}{2}$.

Si E est représenté par un diagramme de points, chaque paire $\{x, y\} \in P_2(E)$ peut être figurée par le segment joignant les points (distincts) x et y . Effectuer un k -partage $(V_1, V_2, \dots, V_k)$ de $P_2(E)$ revient à colorier ces segments représentatifs au moyen de k couleurs différentes. Pour $k = 2$, on peut adopter (au lieu de 2 couleurs) le trait plein et le trait interrompu. Par exemple, pour $k = 2$ et $p = 5$, on constate (dans le 2-partage ci-dessous (fig. 7, *) (V_1, V_2) de $P_2(E)$) qu'il n'existe pas de 3-parties $F = \{a, b, c\}$ de E telle que les paires $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{c, a\}$ aient même « couleur ».

Par contre, supposons maintenant $k = 2$ et $p \geq 6$. Du point 1 partent alors au moins 3 segments d'une même « couleur » (problème des tiroirs pour $k = 2$, $n = 3$). Par exemple : $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ et $\{1, 4\}$ appartiennent à la classe V_1 (marquée en trait plein), d'où deux possibilités (fig. 7, ** et ***) :

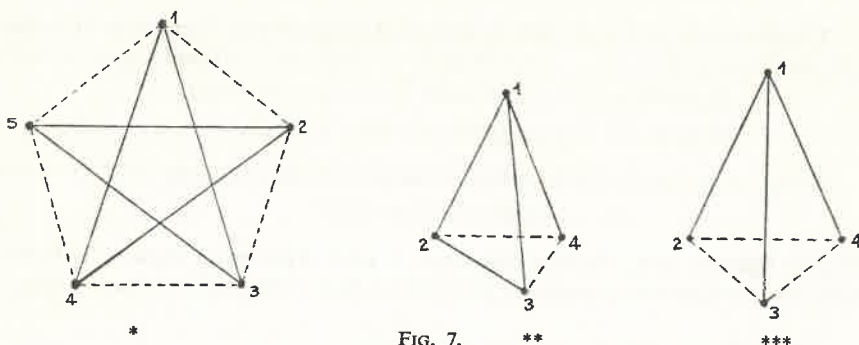


FIG. 7.

Ou bien l'une des paires $\{2, 3\}$, $\{3, 4\}$, $\{4, 2\}$ appartient à V_1 : par exemple $F = \{1, 2, 3\}$ vérifie $P_2(F) \subset V_1$. Ou bien, les trois paires $\{2, 3\}$, $\{3, 4\}$, $\{4, 2\}$ appartiennent à V_2 , et dans ce cas, $F' = \{2, 3, 4\}$ vérifie $P_2(F') \subset V_2$.

Plus généralement, le théorème de Ramsey (pour les paires) s'énonce : « Étant donné deux entiers $k \geq 1$, $n \geq 2$, il existe un seuil $r_k(n)$ tel que, pour $|E| \geq r_k(n)$ et pour tout k -partage $(V_1, V_2, \dots, V_k)$ de $P_2(E)$, il existe une classe V_i et une n -partie F de E telles que $P_2(F) \subset V_i$ ».

Nous venons de voir que $r_2(3) = 6$. En dehors de $r_2(3)$ et des valeurs triviales $r_1(n) = n$, $r_k(2) = 2$, les seuls entiers $r_k(n)$ (nombres de Ramsey) actuellement connus sont : $r_3(3) = 17$, $r_2(4) = 18$. Par récurrence sur k , on montre facilement que :

$$r_k(3) < 1 + k!e$$

2.1.3 Exemple de problème à seuil en Arithmétique.

Partageons l'ensemble d'entiers $E = \{1, 2, 3, \dots, p\}$ en k classes $E_1, E_2, \dots, E_k$.

Dès lors : « Si p est assez grand, il existe une classe E_i et deux entiers (pas nécessairement distincts) $x \in E_i$, $y \in E_i$ tels que $x + y \in E_i$ ».

Sous forme de jeu, essayons par exemple d'empêcher la configuration annoncée, pour $k = 2$. On peut partager $\{1, 2, 3, 4\}$ (d'ailleurs d'une seule façon) de manière à ce qu'aucune des 2 classes ne contienne $x, y, x + y$, par exemple : $E_1 = \{1, 4\}$ et $E_2 = \{2, 3\}$. Mais le joueur est perdant dès qu'il doit placer 5 dans E_1 ou E_2 .

Là encore apparaît un certain seuil $s(k)$: nous venons de voir que $s(2) = 5$. Montrons que : $s(k) \leq r_k(3)$ et, pour cela, supposons $p \geq r_k(3)$. Partageons $P_2(E)$ en k classes $V_1, V_2, \dots, V_k$ en posant, pour $1 \leq u < v \leq p$:

$\{u, v\} \in V_i \Leftrightarrow (v - u) \in E_i$. Alors (théorème de Ramsey) il existe un indice i et une 3-partie $F = \{a, b, c\}$ de E tels que $P_2(F) \subset V_i$. Pour $a < b < c$ (par exemple), les entiers $x = b - a$, $y = c - b$, $x + y = c - a$ vérifient bien :

$$x \in E_i, y \in E_i, x + y \in E_i.$$

2.1.4 Citons un autre théorème à seuil concernant, cette fois, la théorie des ordres totaux : « Étant donné deux entiers $k \geq 1$, $n \geq 1$, il existe un seuil $\omega_k(n)$ tel que, pour $|E| \geq \omega_k(n)$ et pour des ordres totaux $t_0, t_1, \dots, t_k$ quelconques sur E , il existe une n partie F de E telle que les ordres restreints $t_0|_F, t_1|_F, \dots, t_k|_F$ soient identiques ou opposés ».

L'existence du seuil $\omega_k(n)$ peut se déduire du théorème de Ramsey en partageant $P_2(E)$ en 2^k classes $V(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k)$. Pour $\{x, y\} \in P_2(E)$ et $x < y \pmod{t_0}$, on poserait :

$$\{x, y\} \in V(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k) \text{ avec } \varepsilon_i = 1 \text{ si } x < y \pmod{t_i} \\ \text{et } \varepsilon_i = -1 \text{ si } x > y \pmod{t_i}, \text{ pour } 1 \leq i \leq k.$$

Signalons qu'une étude directe plus fine permet de calculer le seuil. On trouve

$$\omega_k(n) = 1 + (n-1)^{(2^k)}$$

(résultat figurant, avec d'autres théorèmes à seuil, dans notre thèse : « *Quelques problèmes combinatoires concernant les ordres totaux et les relations monomorphes* »).

2.2 Problèmes faisant intervenir des graphes.

Si la rubrique « Dénombrements » recouvre de nombreux problèmes (auxquels une bonne initiation est fournie par les « *Principes de Combinatoire* » de C. Berge, Ed. Dunod), la Théorie des Graphes représente une catégorie non moins abondante qui interfère, bien entendu, avec l'Arithmétique ensembliste. De multiples ouvrages et articles s'y consacrent en totalité ou partiellement comme, par exemple (toujours aux Éd. Dunod) : *La Théorie des Graphes et ses applications* de C. Berge, et *Introduction à la Combinatoire en vue des applications* de A. Kaufmann.

a) Un *graphe* est un ensemble de couples (u, v) . Pour tout x , la *coupe* d'un graphe G suivant l'élément x est l'ensemble $G(x) = \{y : (x, y) \in G\}$; le cardinal $|G(x)|$ est la *valence* de x relativement à G . Pour tout ensemble E tel que $G \subset E \times E$, on dit (brièvement) que G est un graphe « dans E ». Si l'on pose : $E_n = \{x \in E : |G(x)| = n\}$, et si E est fini, il existe un partage de E de la forme $(E_0, E_1, E_2, \dots, E_k)$. Nous dirons que E_1 est l'ensemble des éléments *univoques* de E (pour le graphe G).

b) Parmi les graphes, les plus simples sont les graphes *symétriques* et *irréflexifs*, soumis aux deux conditions :

$$(\forall x)(\forall y) [(x, y) \in G \Rightarrow (y, x) \in G] \\ (\forall x)(\forall y) [(x, y) \in G \Rightarrow x \neq y]$$

Définir un tel graphe symétrique et irréflexif G dans un ensemble E revient à introduire un 2-partage (V_1, V_2) de $P_2(E)$, et à poser : $(x, y) \in G \Leftrightarrow \{x, y\} \in V_1$. Nous allons donner deux exemples de problèmes concernant de tels graphes.

2.2.1 Utilisation d'un graphe « régulier » pour minorer le nombre de Ramsey $r_2(4)$.

Soit E le corps des entiers modulo 17. Prenons comme graphe G l'ensemble des couples $(x, y) \in E \times E$ pour lesquels $x - y$ est un carré $\neq 0 \pmod{17}$. Ces carrés constituent un sous-groupe multiplicatif H_1 d'ordre 8, de co-classe H_2 :

$$H_1 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\} = 3H_2 \\ H_2 = \{\pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 7\} = 3H_1.$$

Le graphe G est symétrique, irréflexif, et le 2-partage correspondant (V_1, V_2) de $P_2(E)$ vérifie :

$$\{x, y\} \in V_1 \Leftrightarrow (x, y) \in G \\ \{x, y\} \in V_2 \Leftrightarrow x - y \in H_1$$

En outre, G est *régulier* au sens suivant : dans le partage (E_n) où $n \in \mathbb{N}$ de E défini en (a), $E_n = \emptyset$ pour tout $n \neq 8$, autrement dit : $E = E_8$.

Pour la configuration dont le seuil d'existence est le nombre de Ramsey $r_2(4) = 18$, montrons que le graphe G (dans l'ensemble E de cardinal 17) a un caractère critique.

En effet, puisque $A = H_1 \cap (1 + H_1) = \{-1, 2, -8\}$ vérifie $P_2(A) \subset V_2$, il n'existe pas de 4-partie $F = \{0, 1, u, v\}$ de E telle que $P_2(F) \subset V_1$. Plus généralement, par les permutations affines de $E : x \mapsto (b-a)x+a$ (pour $a \neq b$), il en résulte qu'il n'existe pas de 4-partie $F = \{a, b, c, d\}$ de E telle que $P_2(F) \subset V_1$.

Lorsque les éléments $0, 1, 2, \dots, 16$ de E sont représentés par des points répartis régulièrement sur un cercle, chaque paire $\{x, y\} \in V_1$ (correspondant à deux éléments (x, y) et (y, x) de G) peut être figurée par la corde joignant les points x et y . Le graphe G (ou plutôt sa représentation géométrique, dont l'observation directe n'est pas impossible) apparaît alors comme la superposition de 4 contours polygonaux réguliers, chacun de 17 côtés. C'est l'existence d'un tel graphe G qui justifie : $r_2(4) > 17$.

Cet exemple montre quels liens peuvent exister entre la Combinatoire et l'Algèbre géométrique « finie ».

2.2.2 Jeu des « mains jointes », graphes de jonction,

a) Observons une bande E d'enfants qui jouent à se tenir par les mains. L'ensemble E se partage en sous-ensembles E_0, E_1, E_2 de la manière suivante :

E_0 est l'ensemble des enfants « solitaires ». Ils boudent peut-être, ne tendent aucune main et ne tiennent aucun camarade.

E_2 est l'ensemble des enfants « expansifs ». Chaque enfant expansif tend ses deux mains et tient ainsi deux camarades différents.

E_1 est l'ensemble des enfants « réservés » qui ne tendent qu'une seule main. Chaque enfant réservé tient un seul camarade.

Lorsque le jeu peut s'installer dans les conditions indiquées, de telle sorte que toute main tendue soit saisie par une autre, on observe que le nombre des enfants réservés est toujours pair.

En effet, l'ensemble $E_1 \cup E_2$ se partage en rondes $R_1, R_2, \dots, R_m$ et en farandoles $F_1, F_2, \dots, F_n$:

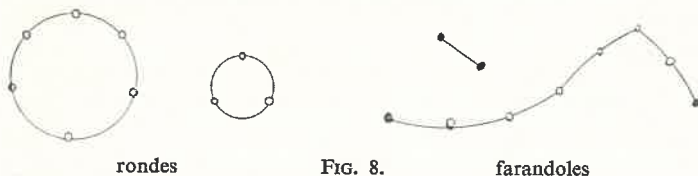


FIG. 8.

farandoles

Dans une ronde R ($|R| \geq 3$), tous les enfants sont expansifs.

Chaque farandole F ($|F| \geq 2$) comporte deux enfants réservés (à ses extrémités), les autres enfants — s'il y en a — sont des expansifs.

Ainsi : $|E_1| = 2n$.

b) Traduisons le jeu précédent en Théorie des Graphes. Appelons *graphe de jonction* toute graphe symétrique, irréflexif G relativement auquel les valences sont 0, 1 ou 2 : $(\forall x) |G(x)| \leq 2$. Dans tout ensemble E tel que $G \subset E \times E$, G détermine un 3-partage (E_0, E_1, E_2) , conformément à 2.2.(a). On obtient alors le théorème suivant : « Si G est un graphe de jonction dans un ensemble fini E , le nombre $|E_1|$ des éléments de E univoques (pour G) est pair ».

Nous avons de ce théorème une connaissance intuitive, en interprétant tout

$(x, y) \in G$ comme un couple d'enfants qui se tiennent dans un jeu « des mains jointes », et cette intuition est d'autant plus remarquable que la mise en forme de la preuve n'est pas si facile qu'on pourrait le croire.

Appelons *composante* de G toute partie A de E constituée par les éléments d'une famille (a_n) vérifiant (pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$) la condition :

$G(a_n) = \{a_{n-1}, a_{n+1}\}$ (qui implique : $a_n \in E_1 \Leftrightarrow a_{n-1} = a_{n+1}$). Le *type* d'une telle composante A est le couple de cardinaux $(|A|, |A \cap E_1|)$.

Exemples. — On peut introduire dans le groupe additif $\mathbb{Z}$ quatre relations d'équivalence $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ (ρ_3 et ρ_4 faisant intervenir un entier $m \geq 3$) de telle sorte que chaque ensemble quotient $E = \mathbb{Z}/\rho_i$ apparaisse comme une composante d'un graphe de jonction associé : $G = \{(x, y) \in E \times E : x - y = \pm 1\}$.

Si a_n désigne la classe de l'entier n (mod. ρ_i), voici comment se présentent la famille (a_n) et les ensembles E, E_1 dans chacun des cas $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$:

1° Pour $\rho_1(x, y) \Leftrightarrow [x = y]$, E s'identifie à $\mathbb{Z}$ et la famille est :

$\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ (d'où $E_1 = \emptyset$).

---○---○---○---○--- Composante de type $(\mathcal{N}_0, 0)$.

2° Pour $\rho_2(x, y) \Leftrightarrow [x = y \text{ ou } x + y = 0]$, E s'identifie à $\mathbb{N}$ et la famille est :

$\dots, 2, 1, 0, 1, 2, \dots$ (d'où $E_1 = \{0\}$).

●---○---○---○--- Composante de type $(\mathcal{N}_0, 1)$.

3° Pour $\rho_3(x, y) \Leftrightarrow [x \equiv y \pmod{m}]$, E s'identifie au groupe additif $\{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ des entiers modulo m , et la famille est :

$\dots, 0, 1, 2, \dots, m-1, 0, 1, 2, \dots, m-1, 0, 1, 2, \dots$

(d'où $E_1 = \emptyset$).

4° Pour $\rho_4(x, y) \Leftrightarrow [x \equiv y \pmod{m} \text{ ou } x + y \equiv 0 \pmod{m}]$, avec $m = 2p$ ou $m = 2p+1$, E s'identifie à $\{0, 1, 2, \dots, p\}$ et la famille est :

$\dots, 0, 1, 2, \dots, p-1, p, p-1, \dots, 2, 1, 0, 1, 2, \dots$

(d'où $E_1 = \{0, p\}$).



FIG. 9.
Composante de type $(m, 0)$.

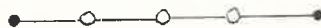


FIG. 10.
Composante de type $(p+1, 2)$.

c) Dans le cas général, on démontre trois lemmes concernant les graphes de jonction dans des ensembles quelconques (finis ou non) :

Lemme 1. — Si G est un graphe de jonction dans un ensemble E , les composantes de G constituent une partition de $E_1 \cup E_2$.

Lemme 2. — Pour un graphe de jonction, les seuls types de composantes possibles sont : $(\mathcal{N}_0, 0)$, $(\mathcal{N}_0, 1)$, $(m, 0)$ (pour tout entier $m \geq 3$) et $(n, 2)$ (pour tout entier $n \geq 2$).

Lemme 3. — Soient A et A' des composantes respectives de deux graphes de jonction G et G' . Si A et A' ont le même type, les graphes restreints $G \cap (A \times A)$ et $G' \cap (A' \times A')$ sont *isomorphes*; autrement dit : il existe une injection $x \mapsto x'$ de A sur A' telle que

$$(\forall x)(\forall y)[(x, y) \in G \Leftrightarrow (x', y') \in G'] \\ x \in A \quad y \in A.$$

Ces lemmes aboutissent à une description des graphes de jonction (rappelons que la description des configurations et leur classement en divers types sont des préoccupations importantes de la Combinatoire). Tout graphe de jonction G dans un ensemble E s'obtient en réunissant des graphes G_i dont les supports A_i sont dénombrables (finis ou non) et deux à deux disjoints, chaque graphe G_i étant isomorphe à l'un des modèles $\{(x, y) \in B_i \times B_i : x - y = \pm 1\}$ décrits en (b) (pour un ensemble quotient $B_i = \mathbb{Z}/\rho$ tel que $|A_i| = |B_i|$).

Les sous-ensembles A_i de E sont alors les composantes de G .

L'hypothèse auxiliaire « E est fini » écarte les types de composantes $(\mathcal{N}_0, 0)$ et surtout $(\mathcal{N}_0, 1)$. Les composantes A_i sont alors : soit des « rondes » (types $(m, 0)$), soit des « farandoles » (types $(n, 2)$), ce qui entraîne : $|E_1|$ est pair.

2.3 Problème de Géométrie combinatoire :

2.3.1 Lemme de Sperner pour la dimension 1.

Des enfants sont rangés en une file qui comporte un garçon (sexe 1) à une extrémité et une fille (sexe 2) à l'autre extrémité. Dans cette file, chaque enfant a un rang i ($1 \leq i \leq p$), et on s'intéresse aux paires d'enfants placés côte-à-côte, c'est-à-dire aux couples de rangs $(i, i+1)$ (pour $1 \leq i < p$). Dès lors, le nombre des couples formés d'un garçon et d'une fille (dans cet ordre, ou dans l'ordre opposé) est toujours impair. En d'autres termes :

Soit f une application de $\{1, 2, \dots, p\}$ sur $\{1, 2\}$ telle que : $f(1) = 1, f(p) = 2$.

On introduit le nombre $\overset{+}{n}$ des entiers i ($1 \leq i < p$) tels que $f(i) = 1, f(i+1) = 2$ et le nombre $\bar{n}$ des entiers i tels que $f(i) = 2, f(i+1) = 1$. Alors $n = \overset{+}{n} + \bar{n}$ est le nombre des entiers i tels que $\{f(i), f(i+1)\} = \{1, 2\}$. Les lemmes de Sperner sont :

$$(S_1) \quad n \geq 1 \\ (S'_1) \quad n \text{ est impair} \\ (S''_2) \quad \overset{+}{n} = 1 + \bar{n}.$$

Il est clair que $(S'_1) \Rightarrow (S_1)$, $(S_1) \Rightarrow (S_1)$. La preuve de (S''_2) est triviale en écrivant :

$$1 = f(p) - f(1) = \sum_{1 \leq i < p} (f(i+1) - f(i)) = \overset{+}{n} - \bar{n}.$$

2.3.2 Lemmes de Sperner pour la dimension 2.

Soit $T = [a_1, a_2, a_3]$ une plaque triangulaire de sommets a_1, a_2, a_3 , de côtés $B_1 = [a_2, a_3]$, $B_2 = [a_3, a_1]$, $B_3 = [a_1, a_2]$. Au moyen de parallèles aux côtés B_1, B_2, B_3 , on partage T en n^2 triangles t_i . On désigne par E l'ensemble des sommets des trian-

gles t_i . Pour cet ensemble E , une fonction de Sperner est une application f de E sur $\{1, 2, 3\}$ vérifiant les conditions :

$$(\forall x)(x \in E, B_i \Rightarrow f(x) \neq i)$$

(Il en résulte : $f(a_i) = i$.)

Si a, b, c sont les sommets d'un triangle t_i , on dit (brièvement) que t_i est *marqué* $f(a), f(b), f(c)$. Orientons le plan de la plaque T de manière que le triplet (a_1, a_2, a_3) soit de signe positif : en tenant compte du signe $\varepsilon = \pm 1$ du triplet (a, b, c) , on distinguera le nombre p^+ des triangles t_i *marqués positivement* 123 et le nombre p^- des triangles t_i *marqués négativement* 123. Les lemmes de Sperner (pour le type de subdivisions envisagé dans T) concernent p^+, p^- et le nombre $p = p^+ + p^-$ des triangles t_i marqués 123 :

$$(S_2) \quad p \geq 1$$

$$(S'_2) \quad p \text{ est impair}$$

$$(S''_2) \quad p^+ = 1 + p^-.$$

Là encore : $(S'_2) \Rightarrow (S_2)$, et $(S''_2) \Rightarrow (S'_2)$.

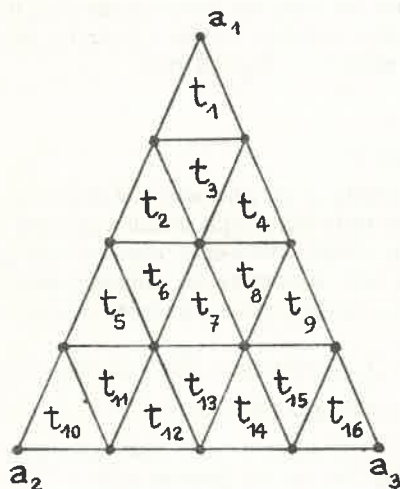


FIG. 11.

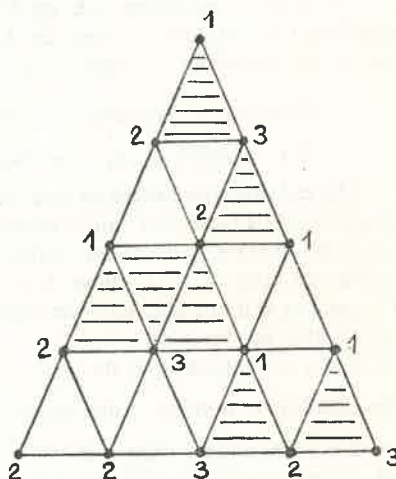


FIG. 12.

Exemple. — Sur la figure 12 (pour $n = 4$) sont inscrites seulement les valeurs $f(x)$ d'une fonction de Sperner f aux divers points $x \in E$. Les triangles t_i marqués 123 sont hachurés : on trouve $p = 7$, $p^+ = 4$, $p^- = 3$.

Pour une subdivision donnée de T , le « jeu de Sperner » entre deux enfants consisterait à leur faire inscrire, chacun à son tour, une valeur $f(x)$ en respectant les conditions :

$f(x) = i$ ou j pour tout $x \in [A_i, A_j]$. Le premier enfant faisant apparaître un triangle t_k marqué 123 est perdant. D'après (S_2) , il y a toujours un perdant dans ce jeu.

Nous allons donner deux démonstrations séparées, l'une pour (S'_2) (utilisant le théorème des graphes de jonction), l'autre pour (S''_2) .

a) Démonstration directe du lemme (S'_2).

Prenons comme graphe G l'ensemble des couples (t_i, t_j) de triangles situés de part et d'autre d'une arête commune $[a, b]$ marquée 12 : G est un graphe symétrique irréflexif relativement auquel les valences sont 0, 1 ou 2. Puisque G est un graphe de jonction dans un ensemble fini (de cardinal n^2), le nombre des triangles t_i de valence 1 (pour G) est pair. Examinons les différentes marques possibles :

Les triangles marqués 111, 222, 333, 113, 133, 223, 233, sont de valence 0. Pour les autres triangles, ayant une arête $[a, b]$ marquée 12, distinguons le cas d'une arête *périphérique* (contenue dans un côté B_i , ici nécessairement B_3) et le cas d'une arête *interne* (non contenue dans un côté B_i).

1° Un triangle t_k marqué 112 ou 122 a deux arêtes marquées 12 : il est impossible que ces arêtes soient toutes deux périphériques.

Si les deux arêtes sont internes, t_k est de valence 2. Si l'une des deux arêtes est interne et l'autre périphérique, t_k est de valence 1.

2° Un triangle t_k marqué 123 a une seule arête marquée 12.

Si cette arête est interne, t_k est de valence 1. Si l'arête est périphérique, t_k est de valence 0.

Dès lors, soient :

u le nombre des triangles 112 ou 122 ayant une arête 12 interne et une arête 12 périphérique,

v le nombre des triangles 123 ayant leur arête 12 périphérique,

w le nombre des triangles 123 ayant leur arête 12 interne.

D'après le lemme de Sperner (S'_1) (appliqué à la restriction de f dans $E \cap B_3$), $u+v$ est impair. D'après le théorème des graphes de jonction, le nombre $u+w$ des triangles t_i univoques (pour G) est pair. Donc : $p = v+w = (u+v) + (u+w) - 2u$ (nombre des triangles t_i marqués 123) est bien impair.

b) Démonstration du lemme (S''_2).

Étant donné une subdivision de T en n^2 triangles t_i , et une fonction de Sperner f définie dans l'ensemble E des sommets de ces triangles t_i , notons θ l'ensemble des triplets $(a, b, c) \in E^3$ vérifiant les conditions : a, b, c sont sommets d'un triangle t_i et $f(a) = 1, f(b) = 2$. Pour $\varepsilon = \pm 1$ et $\alpha \in \{1, 2, 3\}$, notons :

θ_ε l'ensemble des $(a, b, c) \in \theta$ ayant le signe ε ,

θ'_ε l'ensemble des $(a, b, c) \in \theta_\varepsilon$ d'arête $[a, b]$ périphérique,

θ''_ε l'ensemble des $(a, b, c) \in \theta_\varepsilon$ d'arête $[a, b]$ interne,

$\theta^\alpha_\varepsilon$ l'ensemble des $(a, b, c) \in \theta_\varepsilon$ tels que $f(c) = \alpha$.

Dès lors : ${}^+p = |\theta^1_1|$ et ${}^-p = |\theta^3_{-1}|$,

$$\theta = \theta_1 \cup \theta_{-1}, \quad \theta_\varepsilon = \theta'_\varepsilon \cup \theta''_\varepsilon = \theta^1_\varepsilon \cup \theta^2_\varepsilon \cup \theta^3_\varepsilon.$$

D'après le lemme de Sperner (S''_1) (appliqué à la restriction de f dans $E \cap B_3$), les cardinaux ${}^+q = |\theta^1_1|$ et ${}^-q = |\theta^3_{-1}|$ vérifient : ${}^+q - {}^-q = 1$.

Mais la fonction $(a, b, c) \mapsto (c, b, a)$ injecte θ^1_1 sur θ^1_{-1} , et la fonction $(a, b, c) \mapsto (a, c, b)$ injecte θ^2_1 sur θ^2_{-1} . Par ailleurs, en associant les triangles $t_i = [a, b, c]$ et $t_j = [a, b, c']$ situés de part et d'autre d'une arête commune $[a, b]$, on obtient une fonction $(a, b, c) \mapsto (a, b, c')$ qui injecte θ''_1 sur θ''_{-1} .

1. $V = V$ et que, par distribution, $V+V+V = 3V$ ou $2V+3V = 5V$ (1). Il peut alors être utile de disposer, comme contre-exemple (2) d'un ensemble structuré où $1.a \neq a$, $a+a+a \neq 3a$ et $3a+2a \neq 2a+3a \neq 5a$, inégalités choquantes, on le comprend, pour un élève qui obéit à des réflexes conditionnés enracinés depuis des années, la forme continuant à dicter le résultat, alors que son sens a changé.

Reprenons l'ensemble E de nos 30 élèves, assis en six colonnes de cinq et considérons d'autre part l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers. Désignons par $a, b, c, \dots$ et par $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ respectivement les éléments de E et de $\mathbb{Z}$. Nous allons cette fois doter E des deux lois de composition suivantes :

Définitions :

1° L'addition des élèves (loi interne) est définie comme au chapitre précédent.

2° La multiplication αa d'un élève a par un entier α (loi externe) (3) est définie comme suit :

Si $\alpha = +n > 0$, l'élève αa se trouve dans la colonne de a au n -ième banc derrière lui; si n dépasse le nombre de bancs qui sont derrière a , on convient de continuer à compter les bancs vers l'arrière à partir du premier banc de la colonne de a , cette colonne pouvant ainsi être parcourue plusieurs fois. Si $\alpha = -n < 0$, l'élève αa se trouve encore dans la colonne de a , mais au n -ième banc devant lui, en continuant au besoin à parcourir cette colonne vers l'avant à partir de son dernier banc.

Si $\alpha = 0$, l'élève αa est dans la colonne de a et dans son banc : donc $0.a = a$.

Propriétés de la multiplication externe.

— Existe-t-il un élément de $\mathbb{Z}$ neutre pour cette multiplication, donc tel que $\alpha a = a$? Oui, il y en a une infinité périodique, $\alpha = 0$ (modulo 5) (4). Mais $1.a \neq a$.

Remarquons que plus généralement $\alpha a = \alpha' a$, si et seulement si $\alpha = \alpha'$ (modulo 5).

— La multiplication par un α est-elle distributive par rapport à une somme d'élèves? Oui, $\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b$, car si a et b subissent une même translation déterminée par α , le crochet définissant $a+b$ la subit également.

— La multiplication par un élève est-elle distributive par rapport à une somme d'entiers? Non, car $\alpha a + \beta a = \alpha a$, puisque les élèves αa et βa se trouvent dans la même colonne. Ainsi $2a+3a = 2a$ et $a+a+a = a$.

(1) Il convient d'insister chez l'élève sur le fait que dans $(\alpha+\beta)V = \alpha V + \beta V$ les deux signes + désignent des opérations différentes.

(2) L'Académie des Sciences condamne l'emploi du mot *contre-exemple* au profit de l'expression exemple contraire. Je préfère cependant ce mot, un peu barbare il est vrai, pour deux raisons : d'une part il est déjà consacré par l'usage et d'autre part il me semble qu'il retient mieux l'attention que le substantif « exemple » modifié par l'adjectif « contraire ».

(3) Remarquons qu'on pourrait introduire une multiplication où le produit de deux élèves serait un entier de l'ensemble $\{1, 2, 3, \dots, 30\}$. Il suffirait de numérotter les places et de convenir que le produit ab est le numéro de la place qui se trouve à l'intersection de la colonne de a avec la rangée de b .

(4) Rappelons que pour une loi de composition interne, il n'y a jamais deux éléments neutres e, e' . On aurait en effet $e * e' = e'$ puisque e est neutre et $e * e' = e$, puisque e' est neutre, donc $e = e'$.

— La multiplication d'un élève par plusieurs entiers est-elle commutative? Oui, car on voit facilement que $\beta(\alpha a) = \alpha(\beta a) = (\alpha + \beta)a$. Par contre cette égalité montre que la multiplication externe n'est pas associative puisque

$$\alpha(\beta a) = (\alpha + \beta)a \neq (\alpha\beta)a$$

En définitive, ne pensez-vous pas que ce contre-exemple puisse faciliter aux élèves la conquête de l'espace... vectoriel.

E. EHRHART,
École Militaire de Strasbourg.

Numération en base moins deux

1. Erratum.

Dans le *Bulletin* n° 262, page 251, on trouve une méthode pour chercher l'opposé d'un naturel dans le système de numération de base moins deux, « suggérée par notre collègue Gagnaire ».

Malheureusement, une erreur s'est glissée dans l'exemple donné : la ligne « 2° » détruit le travail accompli à la ligne « 1° ». Les groupements 0 1 obtenus dans le premier temps ne doivent pas être à nouveau changés en 1 1 dans le second!

Cette erreur ne risque pas de se produire si le calcul est ainsi disposé :

	1	0	01	11	0	11	01	
1°			01		01			(on ne recopie pas tout!)
2°	11		11			11		(on ne s'occupe que du reste!)
3°	11	0	11	01	0	01	11	(on rassemble les résultats 1° et 2°).

Mais les choses sont encore plus sûres et plus faciles si on dispose le calcul sur deux lignes seulement.

(On a seulement souligné les groupements 11 sur lesquels on opère en premier) :

1	0	01	<u>11</u>	0	<u>11</u>	01
11	0	11	01	0	01	11

2. Autres applications du résultat $1 + 11 = 0$.

1. La suite des naturels : zéro, un, deux, trois, quatre, ... ne s'écrit pas aisément dans le système de numération de base moins deux.

Voici un procédé mécanique qui permet de trouver à peu de frais une suite de laquelle on peut extraire facilement les écritures des naturels (dans l'ordre naturel!). Ce procédé s'appuie sur les remarques suivantes :

1° Il est facile d'ajouter un à un nombre dont l'écriture se termine par zéro :

...	0	+	1	=	...	1
	└──────────┘					
	sans changement					