

A propos d'une propriété de partition d'un triangle ABC. [Voir Bulletin n° 268, pp. 237-238].

Je voudrais faire deux observations :

La première concerne la difficulté de rédaction d'un énoncé correct, difficulté que connaissent bien ceux qui donnent des sujets dans les examens ou concours :

L'énoncé proposé par Adler est incorrect, car l'auteur pensait inconsciemment à « une bonne partition triangulaire », comme il me l'a lui-même écrit. C'est-à-dire que l'on doit rejeter la partition suivante où un point c appartient à un côté d'un triangle sans en être sommet (fig. 4). En effet le théorème proposé est manifestement faux dans ce cas. Et pourtant c'est une partition en triangles !

La seconde illustre l'un des pièges possibles du raisonnement par récurrence. J'ai donné l'exercice dans ma classe de Spéciales. La plupart des élèves ont donné la solution suivante :

Le plan étant orienté pour que ABC soit direct, supposons qu'avec n points la propriété soit vraie, à savoir : $N(abc) - N(acb) = +1$, $N(abc)$ désignant le nombre de triangles abc (sommets énoncés dans l'ordre direct sur le triangle). On ajoute un point. Il est soit à l'intérieur d'un triangle, soit sur un côté. On le joint à tous les sommets voisins, c'est-à-dire à tous ceux possibles sans couper un côté déjà tracé. En examinant tous les cas possibles, on constate facilement que la propriété vraie pour n points est vraie pour $n+1$. Or elle l'est pour 0 point.

Malheureusement cette solution, en apparence si satisfaisante, ne vaut rien. Il est facile en effet de fabriquer une partition (une bonne) où il est impossible, en enlevant un point, d'arriver à une partition en triangles. C'est le cas de la figure 5. Elle ne peut donc être obtenue dans la fabrication récurrente précédente.

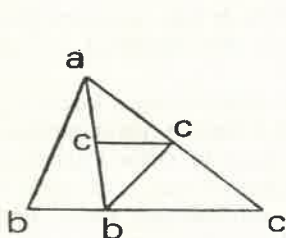


FIG. 4.

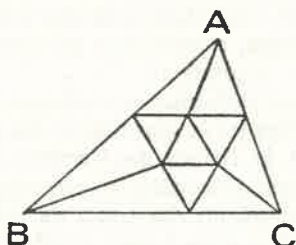


FIG. 5.

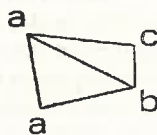


FIG. 6.

Enfin je signale la solution suivante, fournie par un élève, analogue à la première donnée par Adler, mais qui a l'avantage de donner en même temps la propriété $N(abc) - N(acb) = +1$.

Nous orientons le plan de façon que le triangle ABC soit direct, et nous énonçons toujours les sommets successifs d'un triangle dans l'ordre direct. Les côtés sont donc orientés sur chaque triangle. Exemple : Dans la figure 6, le triangle abc contient un segment ab et le triangle aab un segment ba .

Comptons alors le nombre total de segments du type ab , bc , ca et le nombre total de segments du type ba , cb , ac .

Sur un côté de ABC, AB par exemple, n'existent que des segments ab ou ba et on a $N_1(ab) = N_1(ba) + 1$ de même sur BC et CA : $N_2(bc) = N_2(cb) + 1$ et

$N_3(ca) = N_3(ac) + 1$. Si un segment ab est intérieur à ABC , il compte une fois comme segment ab et une fois comme segment ba .

Donc $N(ab, bc, ca) = N(ba, cb, ac) + 3$ (1)

Considérons d'autre part les triangles :

Un triangle abc contient un segment ab , un segment bc et un segment ca et intervient pour $3N(abc)$ unités dans $N(ab, bc, ca)$.

On compte de même $3N(acb)$ unités dans $N(ba, cb, ac)$.

Tout triangle abb par exemple intervient une fois dans chaque membre de (1). Il en résulte $3N(abc) - 3N(acb) = 3$ et $N(abc) - N(acb) = 1$.

EUVRARD
(Saint-Louis, Paris).

Problèmes combinatoires

1. La Combinatoire, matière de recherche et matière d'éveil.

1.1 Pendant longtemps, la Combinatoire est restée liée à l'Arithmétique dans des problèmes se rapportant à la mystique des nombres. Citons, par exemple, la

construction de carrés magiques parmi lesquels $\begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ serait (selon la légende)

le plus anciennement connu.

Peu à peu, à travers de nombreuses « récréations mathématiques », la Combinatoire trouva son domaine propre qui est l'étude des structures (ou configurations) dans les ensembles finis, cette étude se faisant à divers points de vue : existence (ou non-existence), description, classification en sous-structures, dénombrement (calcul exact ou minoration - majoration).

Depuis un siècle, les problèmes de fondement (syntaxe mathématique, Logique), la Théorie des Ensembles (et la sous-théorie des graphes), l'Algèbre (permutations, groupes et corps finis), la Théorie des Nombres, la Topologie, la Théorie des jeux stratégiques, la Programmation codée, la Technologie des automatismes, ... ont enrichi la Combinatoire en suggérant des sujets de recherches extrêmement variés. Par cette science, qui semble promise à une éternelle jeunesse, les mathématiques actuelles renouent très fortement avec le « fini » et le « discret ».

1.2. Sous l'angle de la pédagogie, quels motifs d'intérêt peut-on trouver aux problèmes combinatoires? En voici quelques-uns :

a) Les problèmes combinatoires sont intellectuellement très stimulants : ils font appel à l'imagination, à l'esprit d'invention, à l'activité ludique et au goût du jeu si nécessaires en Mathématique.

b) Les configurations étudiées réclament une bonne compréhension du premier niveau de la Théorie des ensembles (qui trouve, en Combinatoire, un champ naturel d'exercices). Mais, en dehors de ce minimum de notions ensemblistes, les problèmes combinatoires nécessitent assez peu de connaissances *a priori*, et ils procurent très tôt l'occasion de mini-déductions.