

Problèmes combinatoires

...et autres thèmes

A propos des triangulations

Les commentaires de A. Adler (*Bulletin* n° 268, pp. 237-238), au sujet d'un problème donné dans sa classe de Spéciales A', ne sont pas restés sans écho. Il s'y rattache : un énoncé sur le même thème (des triangulations et des différentes formes du lemme de Sperner) proposé à la Faculté des Sciences de Toulouse à la session de septembre, des remarques de notre collègue Euvrard (figurant dans le présent *Bulletin*), enfin une mention de la géométrie combinatoire parmi les types de « problèmes combinatoires » évoqués par C. Frasnay (également dans ce *Bulletin*).

1° Pour éviter d'avoir à définir les triangulations en général, le problème donné à Toulouse utilisait des triangulations particulières par faisceaux de segments parallèles aux côtés d'un triangle $[a_1, a_2, a_3]$, mais la présentation était purement arithmétique. Voici le début de ce texte :

« Étant donné un entier $n \geq 1$, on envisage : l'ensemble T , ses bords B_1, B_2, B_3 et ses sommets a_1, a_2, a_3 définis par :

$$T = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = n\},$$

$$B_i = \{(x_1, x_2, x_3) \in T : x_i = 0\},$$

$$a_1 = (n, 0, 0), a_2 = (0, n, 0), a_3 = (0, 0, n),$$

Une maille (dans T) est un triplet $(u, v, w) \in T^3$ de forme :

$$u = (p + \varepsilon, q, r), v = (p, q + \varepsilon, r), w = (p, q, r + \varepsilon), \text{ pour } \varepsilon = \pm 1.$$

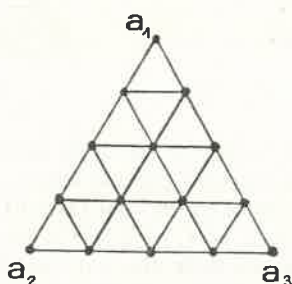


FIG. 1.

Une fonction de Sperner (dans T) est une application f de T dans $\{1, 2, 3\}$ vérifiant les conditions : $i \in f(B_i)$. (Il en résulte : $f(a_1) = 1, f(a_2) = 2, f(a_3) = 3$.) Si t est le nombre des mailles (u, v, w) telles que $\{f(u), f(v), f(w)\} = \{1, 2, 3\}$, on demande de montrer que t est toujours impair (quel que soit n , et quelle que soit f).

Cette conclusion : t est impair (qui constitue la seconde forme du lemme de Sperner, la première étant simplement $t \geq 1$) était, bien entendu, amenée par des questions préparatoires.

2° Pour mieux comprendre l'énoncé plus général proposé par A. Adler (voir le n° 268 du *Bulletin*), certains ont ressenti la nécessité d'une définition préalable des triangulations. C'est ce qu'observe tout d'abord notre collègue Euvrard dans ses remarques. Si l'on ne craint pas les superfluités, on peut adopter le point de vue suivant :

Étant donné 3 points non alignés a_1, a_2, a_3 , notons $\theta(a_1, a_2, a_3)$ l'ensemble (de cardinal 7) constitué par les 3 singletons $\{a_i\}$, les 3 arêtes $]a_i, a_j[$ et le triangle ouvert $\omega =]a_1, a_2, a_3[$. On peut dire que la partition $\theta(a_1, a_2, a_3)$ est la triangulation la moins fine du triangle fermé $\bar{\omega} = [a_1, a_2, a_3]$. Une *triangulation* quelconque $\mathcal{T}$ de $\bar{\omega}$ serait alors une partition de $\bar{\omega}$ en « *simplexes* » des trois types $\{x\}$, $]x, y[$, $]x, y, z[$ vérifiant les conditions :

- (1) $\mathcal{T}$ est fini.
- (2) Pour tout $]x, y, z[$ appartenant à $\mathcal{T}$: $\theta(x, y, z) \subset \mathcal{T}$.
- (3) Pour tout $]x, y[$ appartenant à $\mathcal{T}$, le nombre des triangles $]x, y, z[$ appartenant à $\mathcal{T}$ est : 1 lorsque $]x, y[$ est *périphérique*, 2 lorsque $]x, y[$ est *interne* (interne signifiait : $]x, y[\subset \omega$).

Dans les démonstrations du lemme de Sperner apportées par nos Collègues Adler, Euvrard, Frasnay, on voit apparaître essentiellement les conditions (1) et (3), sans que cela préjuge rien sur l'implication $((1) \text{ et } (2)) \Rightarrow (3)$ et sur la possibilité d'une définition plus brève des triangulations. Des éclaircissements seraient ici les bienvenus.

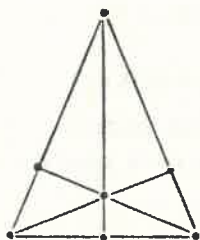


FIG. 2. — Exemple : $\text{card } (\mathcal{T}) = 25$.

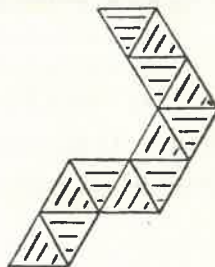


FIG. 3.

3° Une démonstration de la seconde forme du lemme de Sperner (utilisant des « chaînes » de triangles successifs accolés par une arête — comme dans la « deuxième solution » de A. Adler) a été donnée en 1967 par Daniel I. A. Cohen dans le « *Journal of Combinatorial Theory* » (vol. 2, n° 4, p. 585-587). Pour simplifier cette démonstration, C. Frasnay a imaginé une fable dite « du jeu des mains jointes », dont la mathématisation fournit une proposition de Théorie des Graphes. Puisse-t-il ainsi nous convaincre que le lemme de Sperner n'est finalement... qu'un jeu d'enfants!

Quoi qu'il en soit, n'oublions pas de féliciter — avec notre Collègue Adler — ceux de ses grands Élèves dont les réflexions (sur le thème des triangulations) ont été si fructueuses.

La Rédaction.