— La multiplication d'un élève par plusieurs entiers est-elle commutative? Oui, car on voit facilement que $\beta(\alpha a) = \alpha(\beta a) = (\alpha + \beta)a$. Par contre cette égalité montre que la multiplication externe n'est pas associative puisque

$$\alpha(\beta a) = (\alpha + \beta)a \neq (\alpha\beta)a$$

En définitive, ne pensez-vous pas que ce contre-exemple puisse faciliter aux élèves la conquête de l'espace... vectoriel.

E. EHRHART,
École Militaire de Strasbourg.

Numération en base moins deux

1. Erratum.

Dans le *Bulletin* n° 262, page 251, on trouve une méthode pour chercher l'opposé d'un naturel dans le système de numération de base moins deux, « suggérée par notre collègue Gagnaire ».

Malheureusement, une erreur s'est glissée dans l'exemple donné : la ligne « 2° » détruit le travail accompli à la ligne « 1° ». Les groupements 0 1 obtenus dans le premier temps ne doivent pas être à nouveau changés en 1 1 dans le second!

Cette erreur ne risque pas de se produire si le calcul est ainsi disposé :

	1	0	01	11	0	11	01	
1°				01		01		(on ne recopie pas tout!)
2°	11		11				11	(on ne s'occupe que du reste!)
3°	11	0	11	01	0	01	11	(on rassemble les résultats 1° et 2°).

Mais les choses sont encore plus sûres et plus faciles si on dispose le calcul sur deux lignes seulement.

(On a seulement souligné les groupements 11 sur lesquels on opère en premier) :

1 0 01 $\underline{11}$ 0 $\underline{11}$ 01
11 0 11 01 0 01 11

2. Autres applications du résultat 1 + 11 = 0.

1. La suite des naturels : zéro, un, deux, trois, quatre, ... ne s'écrit pas aisément dans le système de numération de base moins deux.

Voici un procédé mécanique qui permet de trouver à peu de frais une suite de laquelle on peut extraire facilement les écritures des naturels (dans l'ordre naturel!).

Ce procédé s'appuie sur les remarques suivantes :

1° Il est facile d'ajouter un à un nombre dont l'écriture se termine par zéro :

$$\underset{\sim}{\ldots}\ 0 + 1 = \underset{\sim}{\ldots}1$$

sans changement

2° Il est facile d'enlever un à un nombre dont l'écriture se termine par un :

$$\underbrace{\ldots}\, 1 - 1 = \underbrace{\ldots}\, 0$$

sans changement

3° Il est facile de passer de l'écriture d'un nombre à l'écriture de son opposé.

4° D'autres opérations (ajouter un à un nombre terminé par un, ou enlever un à un nombre terminé par zéro) seront considérées comme trop compliquées et ne seront pas utilisées.

Ce qui suit se passe alors de commentaires :

(les flèches signifient : passer à l'opposé; les flèches signifient alternativement : ajouter un, ou : enlever un).

	naturels	opposé des naturels	
0	0		zéro
1	1		un
11		11	
10		10	
110	110		deux
111	111		trois
1101		1101	
1100		1100	
100	100		quatre
101	101		cinq
1111		1111	
1110		1110	
11010	11010		six
11011	11011		sept

On remarque que ce procédé donne également les écritures des opposés des naturels (aussi dans l'ordre « nattrel » (1)!)

(1) Ou l'ordre opposé, si on préfère!

On reconnaît facilement que le cheminement dans $\mathbb{Z}$ suggéré par ce procédé peut être illustré par le schéma sagittal suivant (qui n'est pas dépourvu d'esthétique!)

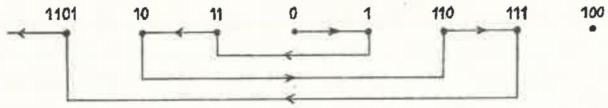

FIG. 1.

Il y a même là un moyen de définir sur $\mathbb{Z}$ un ordre qui n'est pas l'ordre «naturel» mais qui est un bon ordre (« sur tout ensemble, il existe un bon ordre » (Zermelo)).

2. Quelques indications sur la division, « assez délicate dans ce système » d'après l'auteur, parce que « l'algorithme habituel est difficile à appliquer ». Alors il faut en trouver un autre non « habituel » c'est-à-dire non adapté à ce que nous connaissions jusqu'ici (2) mais adapté à cette numération nouvelle (à nous de nous y habituer).

Le principe est simple : soit à diviser 1010010111 par 11011. On va ajouter le produit de l'opposé de 11011 par une puissance de la base (moins deux) un certain « nombre de fois » jusqu'à ce que le reste r vérifie la condition $0 \leqslant r < |11011|$. Pour ceci, on s'arrange à faire apparaître, à gauche des écritures, des groupements 11 (qui neutralisent les 01), ou des 01 (qui neutralisent les 11). Le « nombre de fois qu'on a soustrait 11011 » s'obtient ensuite par addition. Voici deux exemples de disposition pratique :

```
1010010111   | 11011 ┐
①001         |  1001 ┘ opposé
-----
11101
①001
-----
11010
①001
-----
  11101
  ①001
  -----
  11010
  ①001
  -----
     1111
     ①001
     -----
    110100
     ①001
     -----
      110 → reste
=========
11111011    → quotient
```

```
1010010111   | 11011 ┐
①001         |  1001 ┘ opposé
-----
 1000
①001
-----
 11010
 ①001
 -----
   11101
   ①001
   -----
   11010
   ①001
   -----
     1111
    ①001
    -----
     11001
    ①001
    -----
      110 → reste
=========
11111011    → quotient
```

Chaque fois qu'on ajoute l'opposé du diviseur, on prend soin d'entourer son 1 initial. L'addition de ces 1 initiaux (en respectant la colonne dans laquelle ils sont inscrits) donne le quotient.

---

(2) C'est nous, les habitués!

Il est remarquable que l'opération peut être commencée un peu n'importe comment, contrairement à ce qui se passe pour la division « habituelle »; il suffit de se laisser guider par la relation $0 \leqslant r < |b|$.

$|b|$ sera celui des deux nombres b ou $-b$ dont l'écriture comporte un nombre impair de chiffres. L'écriture de r devra comporter un nombre de chiffres impair et au plus égal, à celui de b. Mais ceci ne suffit pas : ainsi 11001 représente un entier strictement supérieur à 11011. Le soin est laissé au lecteur de trouver un moyen (simple d'ailleurs) de comparaison de deux entiers donnés par leur écriture en base moins deux.

3. *Utilisation des cartes perforées.*

1. On dispose d'un certain nombre de cartes perforées comme ci-contre (avec dix trous, leur nombre sera limité à mille vingt-quatre, mais on peut se contenter de moins, pour commencer !).

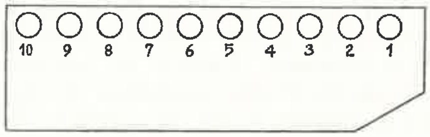

FIG. 2.

La règle du jeu est la suivante (les trous sont numérotés à partir de la droite) :

1° On s'empare du paquet et on le répartit en deux tas en posant alternativement une carte à droite (tas D) et une carte à gauche (tas G).

On découpe ensuite une encoche au trou n° 1 de chaque carte du tas G :

On laisse intacte les cartes du tas D.

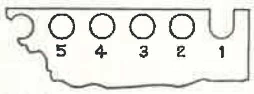

FIG. 3.

2° On répartit ensuite le tas G en deux tas : GD et GG en posant alternativement une carte à droite et une carte à gauche, comme ci-dessus. On découpe ensuite une encoche au trou n° 2 de chaque carte du tas GG. Les autres restent intactes. On opère de la même façon sur le tas D, qui donne un tas DG (encoche au trou n° 2) et le tas DD (trou n° 2 intact).

3° On continuera en encochant le trou n° 3 des cartes des tas GDG, GGG, DGG, DDG obtenus à partir des précédents par le même procédé, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on arrive à des tas de cartes contenant une carte au plus.

2. Il est clair que deux cartes distinctes seront alors encochées différemment. On obtient ainsi un ensemble d'objets sur lequel il est intéressant de mettre un ordre.

Pour ceci, les cartes sont empilées en un paquet « dans le désordre » et orientées les trous en haut (on utilise le coin inférieur droit coupé).

Introduisons une aiguille dans le trou n° 1 : certaines cartes tombent. Plaçons les derrière le paquet. Recommençons l'opération pour le trou n° 2, en prenant garde à déplacer les cartes qui tombent sans détruire leur ordre mutuel. Continuons cette opération jusqu'à ce qu'aucune carte ne tombe plus (celles qui tombent sont chaque fois placées derrière le paquet).

La recherche de l'explication des affirmations qui suivent est laissée au soin du lecteur.

1° La carte qui se trouve devant le paquet ne porte aucune encoche (pourquoi?).

2° Numérotons toutes les cartes suivantes dans l'ordre où nous les trouvons : un, deux, trois...

3° Voici une carte, telle qu'on l'obtient par ce procédé, avec son numéro (vingt et un).

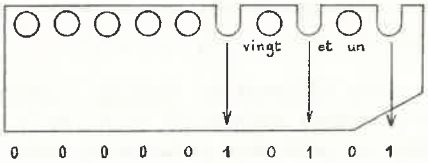

FIG. 4.

A chaque encoche de cette carte, associons le chiffre 1.

A chaque trou non encoché, associons le chiffre 0.

On obtient ainsi l'écriture 10101 qui n'est autre que l'écriture dans le système de base deux vingt et un.

4° La même observation peut être faite sur chaque carte du paquet.

L'intérêt de cette manipulation est considérable. Outre que ce procédé permettrait de classer en dix coups d'aiguille un paquet de mille vingt quatre cartes, par numéros croissants, il y a certainement là une source de manipulations pour l'introduction du système de numération de base deux.

3. Mais il n'y a pas qu'une manière d'ordonner un ensemble. Convenons de placer derrière le paquet les cartes qui tombent lorsque l'aiguille est dans le trou n° 1, puis de placer devant le paquet celles qui tombent au trou n° 2, et ainsi de suite, en alternant : derrière au trou n° 3, devant au n° 4, etc... Cette fois-ci, éliminons les cartes qui tomberont lors de l'exploration du dernier trou donnant des chutes (ce dernier ensemble pouvant être « incomplet »).

Recherchons alors la carte qui ne porte aucune encoche. Nous la marquons zéro (en rouge pour éviter les confusions). Puis nous marquons un (rouge), deux (rouge), trois (rouge), ... les cartes suivantes.

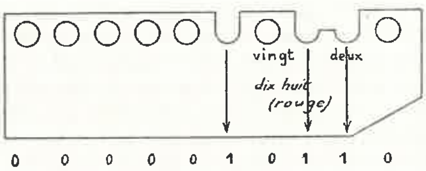

FIG. 5.

Voici, par exemple, la carte n° dix-huit (rouge) telle qu'on l'obtient, par ce procédé. Si l'on code les encoches par 1 et les trous intacts par 0 on obtient l'écriture de dix-huit en base moins deux : 10110. La même observation peut être faite sur chaque carte.

Occupons-nous maintenant de la carte qui précède la carte zéro. Nous la marquerons « naturellement » moins un (rouge), la précédente moins deux (rouge). etc,..

4. Il est juste, ici, de reprendre une idée due à notre excellent collègue Dumont et qu'il a développée lors du stage I.P.N. de Grenoble en septembre 1968.

Sur un *même matériel* (ici l'ensemble des cartes perforées) il est possible de définir deux structures différentes (ici par l'intermédiaire de l'ordre) de manière à obtenir

— soit un ensemble isomorphe à $(\mathbb{N}, +, \times, \leqslant)$,

— soit un ensemble isomorphe à $(\mathbb{Z}, +, \times, \leqslant)$.

Cette attitude est toute différente de l'attitude traditionnelle qui consiste à essayer de munir deux ensembles distincts ($\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$) de la même structure.

Dumont voudra bien me pardonner ce raccourci, certes déformant (pas trop, je le souhaite), de son idée, mais je n'avais que l'intention d'en donner une illustration (parmi tant d'autres...) à l'aide de cartes perforées, ...en même temps qu'un moyen d'introduction de la base moins deux chez nos jeunes élèves.

Pierre Gagnaire,
C.E.S. Édouard Herriot, Bron.

Quatre jours à Exeter

Sur l'invitation de Collègues qui sont, en Angleterre, les animateurs de l'A.T.M. (Association of Teachers of Mathematics) une douzaine de Collègues de l'A.P.M.E.P. ont passé quatre jours (19-22 avril 1969) à l'Université d'Exeter (Devon). Je n'aurai pas l'audace de donner un compte rendu détaillé de ces journées; c'est le type même du colloque « informel », sans ordre du jour précis, sans motion finale; ce fut, à mon sens, une parfaite réussite : des débats tout à fait libres, le ton de la fraternité et de l'amitié, le sentiment de nos différences dans les méthodes et de notre communauté de vues dans les objectifs fondamentaux de notre action. Pour nous au moins, qui venions du continent, il y a eu pendant ces quatre jours, cent occasions de glaner des idées nouvelles et l'avion qui nous ramenait à Orly le 22 au soir était chargé (les douaniers ne l'ont pas remarqué) de mille suggestions mathématiques.

Pour donner le ton, Trevor Fletcher que les congressistes de Marly n'ont pas oublié, nous posa quatre questions.

1. Sont-ce des caricatures que nous nous faisons les uns de l'enseignement mathématique des autres? En France, organisation très systématique (et en tout cas centralisée), enseignement très théorique, très « intellectuel »; importance primordiale du contenu; peu de liens entre l'enseignement des mathématiques et celui des autres disciplines. En Angleterre, organisation très diversifiée (en tout cas non centralisée), enseignement très pragmatique; importance des recherches sur les méthodes d'approche, accent mis sur l'activité de l'élève; un certain souci des liaisons des mathématiques avec les autres disciplines.