Des triangles

Il m'a paru intéressant de donner le début de l'énoncé d'un premier problème posé en mathématiques spéciales A et de signaler quelques-unes des intéressantes solutions qui ont été fournies dans diverses copies. Nous les avons discutées, comparées et mises au point.

Énoncé. *On donne un segment AB dont les deux extrémités sont marquées* a *et* b*; on insère entre les deux points un nombre quelconque de points marqués* a *ou* b, *arbitrairement. On décompose de la sorte AB en un certain nombre de segments; montrer que le nombre total de segments* ab *diffère d'une unité du nombre de segments* ba, *la somme de ces deux catégories de segments étant impaire.*

On donne un triangle ABC dont les trois sommets sont respectivement marqués a, b, c. *On décompose ce triangle en triangles partiels dont les sommets sont sur le périmètre du triangle ou à l'intérieur de celui-ci. Ces points sont notés arbitrairement de l'une des trois lettres* a, b, c. *s'ils sont à l'intérieur du triangle; ils sont notés arbitrairement de l'une des deux lettres qui figurent sur le côté, s'ils sont situés sur un des côtés de ABC. Démontrer que le nombre total des triangles* abc *est impair, le nombre de ceux qui sont orientés positivement différant de 1 du nombre total de ceux qui sont marqués négativement* (1).

Je ne donnerai pas la solution de la première question, absolument sans difficulté, ni celle relative aux orientations des triangles. Par contre je vais résumer ci-dessous trois solutions très différentes de la deuxième question. (Il m'a été fourni d'autres solutions qui m'ont paru moins intéressantes pour les lecteurs du Bulletin).

Première solution. Nous allons compter le nombre de segments ab; il en existe h qui sont situés sur un côté du triangle initial. Il en existe k non situés sur un côté. Les premiers sont les côtés de h triangles, les seconds de $2k$ triangles. Dans cette manière de compter les triangles abc, au nombre de r ne sont obtenus qu'une seule fois tandis que les triangles aab et abb sont obtenus deux fois; soit s le nombre de ces triangles. De ces deux manières de faire le décompte nous tirons

$$h + 2k = r + 2s$$

d'où il résulte que r et s ont la même parité; d'après la première partie h est impair; il en est donc de même de r.

(1) Certains de ces résultats sont dus à Sperner. Le lecteur curieux de se renseigner de manière plus complète pourra se reporter à C. Berge : *Espaces topologiques. Fonctions multivoques*, 1959, p. 178; L.-A. Lyusternik : *Convex figures and polyhedra*, 1962, pp. 160-163.

Deuxième solution. Nous supposons qu'il n'existe pas de triangle *abc*; sur le côté AB il existe un nombre impair de segments *ab* (ou *ba*); nous partons de l'un d'eux nous construisons le triangle auquel il donne naissance; c'est un triangle *aab* ou *abb*; il admet donc un second côté *ab*; sur ce côté repose un nouveau triangle *aab* ou *abb* qui possède un nouveau segment *ab*. Nous construisons ainsi une chaîne de segments tous distincts liés à une chaîne de triangles. Cette chaîne s'arrête sur un côté du triangle initial qui ne peut être que AB. On définit de la sorte une bijection entre les segments *ab* (ou *ba*) du côté AB; cette bijection qui n'a pas d'élément double possède certainement un nombre pair d'éléments ce qui est en contradiction avec la première question.

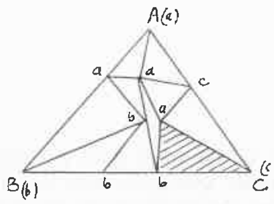

FIG. 1.

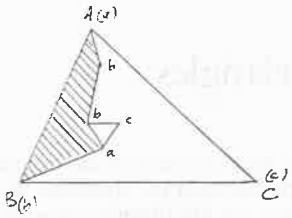

FIG. 2.

Troisième solution. Nous étudions tous les chemins qui partant de A aboutissent en B en ne traversant que des points *a* ou *b* et qui ne passent pas deux fois par le même point. De tels chemins existent, AB est l'un d'eux. Un tel chemin et AB enferment un nombre de triangles que nous désignons par *p*. Nous considérons un chemin pour lequel *p* atteint son maximum. Ce chemin contient un nombre impair de côtés *ab* (d'après la première question), nous prenons l'un d'entre eux et nous prenons le triangle ayant ce côté et situé à l'extérieur de l'aire hachurée (fig. 2) ce triangle existe car un côté *ab* n'est situé ni sur AC ni sur BC; son troisième sommet ne peut appartenir au chemin envisagé sinon il serait possible de construire un chemin contenant $p + 1$ sommets. Le troisième sommet ne peut pas non plus être un point *a* ou *b*, pour la même raison. C'est donc un point *c*; il en résulte l'existence d'au moins un triangle *abc*.

Je passe sur d'autres solutions qui m'ont été fournies mettant en jeu des algorithmes destinés à diminuer le nombre de triangles.

A. ADLER,
(*Lycée Condorcet.*)