

Catégories et géométrie élémentaire

Dans le numéro 263-264 de la revue de l'A.P.M., M. Apery exposait la notion de catégorie et en donnait quelques exemples classiques (catégorie des ensembles, catégorie des groupes, ...). Ce concept apparemment compliqué, loin d'être une pure création de l'esprit, se rencontre en Géométrie élémentaire.

Dans les programmes actuels de Mathématiques, il est question de « vecteurs liés » — ou « bipoints » — et de « vecteurs libres » — ou « vecteurs » plus brièvement. Les opérations élémentaires (addition et soustraction) sont définies sur des vecteurs libres et non sur des vecteurs liés. La distinction entre les deux notions n'est pas toujours comprise par les élèves : elle nécessite, en effet, l'introduction d'une relation d'équivalence et d'un ensemble quotient. Il est cependant possible de munir l'ensemble des vecteurs liés d'une opération « localement définie ». Le plan (ou l'espace), considéré comme ensemble de points, devient une « petite catégorie », c'est-à-dire, une catégorie où les objets forment un ensemble. Dans la définition, on peut théoriquement se passer des objets et ne définir que les morphismes; en fait, les deux façons de faire sont équivalentes et nous allons décrire ici une catégorie avec objets et morphismes.

Les objets sont les points du plan (ou de l'espace). Les morphismes sont les vecteurs liés \overrightarrow{AB} — ou bipoints (A, B) — d'origine A et d'extrémité B . On dit encore que l'objet A est la source du morphisme \overrightarrow{AB} , l'objet B est le but du même morphisme. A tout objet A correspond un vecteur lié nul, noté \overrightarrow{AA} , qui est appelé morphisme neutre associé à A .

La composition des morphismes est définie par une « somme de vecteurs liés », cette somme n'étant pas toujours possible. En général le produit de deux morphismes α et β est défini si et seulement si la source de l'un coïncide avec le but de l'autre. Ainsi, le produit $\beta\alpha$ est défini lorsque le but de α et la source de β sont identiques. Dans l'exemple qui nous intéresse, cela veut dire qu'on ne peut additionner deux vecteurs liés que si l'origine de l'un coïncide avec l'extrémité de l'autre; ainsi on peut écrire :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Par contre la somme $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$ n'est pas définie. Le produit des morphismes est bien associatif, ce qui se traduit par :

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}).$$

Enfin, le morphisme neutre associé à l'objet A vérifie les égalités :

$$\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{CA},$$

quel que soit B et quel que soit C .

Nous avons ainsi défini une catégorie qu'on peut appeler catégorie des vecteurs liés (pour insister sur le rôle des morphismes). Cette catégorie possède plusieurs propriétés. Ainsi, il n'existe qu'un seul morphisme de source A et de but B , ce qu'on traduit par la notation :

$$\text{Hom}(A, B) = \{\overrightarrow{AB}\}$$

De plus, tout morphisme est « inversible », autrement dit, tout vecteur lié \overrightarrow{AB} admet un « symétrique à droite » et un « symétrique à gauche », \overrightarrow{BA} , tel que :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} \text{ et } \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB}$$

Une telle catégorie s'appelle un « groupoïde ».

Appelons E l'ensemble des vecteurs liés. On peut définir sur E une relation d'équivalence R de la façon suivante :

« $\overrightarrow{AB} R \overrightarrow{CD}$ si et seulement si le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme ». C'est la relation classique d'équipollence. L'ensemble quotient E/R s'appelle « ensemble des vecteurs libres ».

On démontre en algèbre que si un ensemble est muni d'une loi de composition interne et d'une relation d'équivalence compatible avec cette loi, il est possible de définir sur l'ensemble quotient une loi interne déduite de la première. On serait tenté d'utiliser ici ce résultat. En fait, ce n'est pas possible puisque l'addition n'est pas définie partout dans E . Malgré tout, il est possible de définir la somme de deux vecteurs libres \vec{u} et \vec{v} . Il existe un vecteur lié \overrightarrow{AB} , appartenant à la classe \vec{u} , que l'on peut choisir arbitrairement. Ce vecteur lié étant fixé, il existe un vecteur lié d'origine B , soit \overrightarrow{BC} , dont la classe est \vec{v} . Par définition, le vecteur lié $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ est un représentant de la somme $\vec{u} + \vec{v}$. Il est facile de vérifier que cette définition de la somme de vecteurs libres ne dépend pas des représentants choisis.

L'ensemble E/R est ainsi muni d'une addition partout définie (qui en fait un groupe abélien). On peut alors définir la catégorie des vecteurs libres. L'objet unique est un point fixe O . Les morphismes sont les vecteurs libres; ils ont même source et même but : l'objet O . La composition des morphismes est encore définie par l'addition des vecteurs libres. Cette opération est ici toujours possible, elle est associative et il existe un morphisme neutre unique (associé à l'objet O) : c'est le vecteur libre nul. Les axiomes sont bien vérifiés; c'est la conséquence du fait que E/R est un groupe.

La catégorie ainsi obtenue ne constitue pas un exemple aussi intéressant que le précédent mais nous allons pouvoir définir maintenant un « foncteur » F de la catégorie des vecteurs liés dans la catégorie des vecteurs libres.

Un foncteur fait correspondre aux objets d'une catégorie des objets d'une autre catégorie et aux morphismes de la première des morphismes de la seconde, de façon à conserver les propriétés de la composition des morphismes.

A tout objet A , le foncteur F associe l'objet O défini dans la catégorie des vecteurs libres, A tout vecteur lié \overrightarrow{AB} , le foncteur F associe la classe de \overrightarrow{AB} modulo R : c'est un vecteur libre, Cette correspondance vérifie les trois axiomes des foncteurs :

- (1) Si \overrightarrow{AB} est un morphisme de source A et de but B dans la première catégorie, $F(\overrightarrow{AB}) =$ classe de \overrightarrow{AB} est un morphisme de source $F(A)$ et de but $F(B)$ dans la seconde catégorie.
On a, en effet, $F(A) = F(B) = O$.
- (2) $F(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = F(\overrightarrow{AB}) + F(\overrightarrow{BC})$. Cette propriété résulte de la définition de l'addition dans E/R .
- (3) Si on applique F au morphisme neutre associé à l'objet A , on obtient le morphisme neutre associé à $F(A)$. En effet : $F(\overrightarrow{AA}) = \vec{o}$: vecteur libre nul ou morphisme neutre associé à $F(A) = O$.

Il existe ainsi un foncteur de la catégorie des vecteurs liés dans la catégorie des vecteurs libres. Cette notion dont nous avons trouvé un exemple simple est fondamentale dans plusieurs chapitres de la Mathématique moderne. Elle permet, par exemple, de « classifier » certains êtres mathématiques. Ainsi, les vecteurs liés correspondant au même vecteur libre par le foncteur F appartiennent à une même classe d'équivalence. Cette notion permet aussi de transformer un problème relatif à une catégorie en un problème relatif à une catégorie plus simple. Ainsi, dès qu'une propriété est vraie entre vecteurs liés, on peut en déduire une propriété entre vecteurs libres par l'intermédiaire du foncteur F . Le raisonnement par l'absurde permet de conclure à certains résultats « négatifs ».

Nous venons de montrer, par cet exemple tiré de la Géométrie vectorielle, que les notions de catégorie et de foncteur, loin d'être artificielles, s'introduisent de façon naturelle en Mathématiques Élémentaires. L'exemple choisi ne simplifie sans doute guère la théorie des vecteurs mais il peut aider à comprendre un langage nouveau. Il n'est pas interdit de penser que les catégories seront introduites un jour dans l'enseignement secondaire comme cela s'est produit pour la Théorie des ensembles, l'Algèbre moderne et la Topologie. Il est donc intéressant d'en trouver des illustrations simples.

Bernard LEVENT,
Nantes.