2

Échanges

Matériaux pour un dictionnaire

Un curieux spécimen d'Octopus.

Le *Bulletin* 269-270 ayant été consacré à la classe de Sixième, je n'ai pu jusqu'ici rendre compte des réponses reçues soit au questionnaire sur le vocabulaire lors de l'assemblée générale de Besançon, soit au questionnaire inclus dans la notice lexicographique de l' « édition 1967 » du Dictionnaire. Je pense traiter ces questions dans le n° 272, préférant m'attacher ici uniquement à la plus urgente d'entre elles.

Il est notoire qu'en juin dernier la consultation trop hâtive des adhérents n'a pas eu toute la clarté désirable ; le nombre élevé d'abstentions déclarées, environ 30 %, l'a confirmé, ainsi que les réactions de l'assemblée. Le principe de la consultation de la « base » a été accueilli favorablement, mais les collègues ont souhaité que les questions de cette sorte soient connues à l'avance de façon qu'ils puissent y réfléchir individuellement ou en discuter dans les Régionales. En particulier certains n'ont pas caché qu'ils avaient pris position sur « angle », « ouverture », « amplitude » sans avoir pu mesurer toutes les incidences de leur choix. Or on est arrivé au point où *un choix doit être fait :* le seul conseil que j'ai pu donner dans le n° 269-270 est de se défier du mot *angle ;* si on laisse ainsi aller les choses, on ne pourra bientôt plus parler de rien. C'est pourquoi je donne aujourd'hui à cette affaire une priorité absolue.

***

L'angle est un animal étrange qui envoie, a envoyé, ou pourrait envoyer des tentacules au moins dans huit directions occupées par huit objets mathématiques, que je désignerai dans la suite par des minuscules, réservant les majuscules correspondantes pour les ensembles formés.

1° **Partie** s **du plan limitée par deux demi-droites de même origine.** — (Encore pourrait-on introduire de subtiles distinctions suivant qu'on inclut ou non un côté, deux côtés, le sommet; mais ne compliquons pas et convenons qu'il s'agit de la partie *fermée*, donc bord compris). L'ensemble S est muni des opérations usuelles de réunion et d'intersection, et d'un ordre partiel par inclusion. On peut naturellement « faire un sort » au cas intéressant où, deux parties s et s' étant *adjacentes*, leur réunion apparaît comme une opération *interne* dans S.

2° **Bord** a **d'une partie** s. — La correspondance entre a et s n'est visiblement pas biunivoque, puisqu'à un a donné correspond une *paire* (soit saillant-rentrant, soit plat-plat); on ne voit guère quelles relations intéressantes introduire dans A.

3° **Classe d'équivalence** σ **(pour l'isométrie) de parties** s. — On peut assimiler $\sum$ au segment $[0,2\pi]$ muni de son ordre total habituel, et aussi le munir d'une « addition » traduisant la réunion de deux parties s adjacentes. Suivant la définition donnée pour *adjacent*, cette « addition » pourra n'être qu'une « opération » définie seulement pour certains couples $\left(\text{ainsi on ne saura pas « additionner » } \pi \text{ et } \frac{3\pi}{2}\right)$, ou au contraire la « loi » définie comme suit :

$$\forall(\sigma, \sigma') \qquad \sigma * \sigma' = \mathit{inf}\,\{\sigma+\sigma',\ 2\pi\}$$

Cette loi est compatible avec l'ordre, mais $(\sum, *)$ n'est ni un groupe, ni même un demi-groupe.

4° Désignant par Ω une surface de Riemann à feuillets multiples, de pôle 0, on considère à présent une *partie* f *de* Ω, *limitée par deux demi-droites d'origine* 0, *et connexe dans* $\Omega-\{0\}$. Pour l'ensemble F de ces parties on peut répéter ce qu'on a dit pour S, à ceci près qu'il n'y a ici aucune hésitation sur le sens à donner au mot *adjacent*.

5° **Bord** b **d'une partie** f. — Cette fois, la correspondance entre b et f étant biunivoque, on transporte facilement les propriétés de F dans B.

6° **Classe d'équivalence** φ **(pour l'isométrie) de parties** f. — La réunion de deux parties adjacentes et l'ordre dans F se traduisent sans ambiguïté dans Φ, faisant de Φ un demi-groupe totalement ordonné, isomorphe à $(\mathbb{R}^+, +, \leqslant)$.

7° **Opérateur** θ **de rotation** (de centre donné), dit aussi *angle-de-vecteurs*. L'ensemble Θ, muni de la composition des rotations, est isomorphe à $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ muni de l'addition des classes, ou encore au groupe multiplicatif des complexes de module 1; ces groupes *ne sont pas ordonnés*.

8° **Angle de droites.** — Considéré le plus souvent comme une classe δ de réels modulo π; j'ai déjà exposé, trop longuement peut-être, pourquoi je préférais voir en δ une paire de classes modulo 2π. De toute façon Δ est un groupe non ordonné qu'on peut identifier à $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$.

Viennent encore se greffer sur cet « octopus » quelques tentacules supplémentaires dus à l'orientation. En orientant le plan ou la surface de Riemann, il est possible de définir deux sens pour s, σ, f, b, φ; et l'on peut généraliser les diverses « additions » afin qu'elles restent compatibles avec cette orientation, de façon très naturelle pour F, B, Φ (lequel devient alors isomorphe à $\mathbb{R}$), un peu plus artificielle pour S et Σ. Au contraire, pour les groupes non ordonnés Θ et Δ, cette compatibilité est totalement exclue, ce qui ôte tout intérêt aux prétendus « angles orientés ».

* * *

Il découle de cet inventaire que non seulement ces huit objets sont distincts, mais que les structures des ensembles qu'ils forment sont pour la plupart irréductibles les unes aux autres (les seules assimilations possibles sont entre F et B, dont l'intérêt est à peu près nul dans l'enseignement élémentaire, et entre Θ et Δ, dont l'isomorphisme serait plus gênant qu'utile en géométrie). Par conséquent, si l'on veut mettre fin à ce grouillement tentaculaire des « angles », il est indispensable d'introduire de nouveaux mots, qui éventuellement peuvent être des mots nouveaux; je ne tiens pas absolument aux néologismes (on me les a amicalement reprochés), mais un néologisme vaut sûrement mieux qu'une ambiguïté. A nous de choisir.

Faisons à présent l'inventaire des besoins et celui des mots disponibles. Pour les besoins, il semble qu'on peut éliminer immédiatement f et b (alors que φ est d'emploi courant); s a reçu un nom qui paraît satisfaire tout le monde : *secteur; a* occupe semble-t-il, la toute dernière place dans l'ordre des priorités; reste donc d'une part l'ensemble $\{\sigma, \varphi, \theta, \delta\}$. Est disponible d'autre part l'ensemble {amplitude, angle, argument, ouverture, phase, trope, ditrope} où les deux derniers mots sont des néologismes de ma fabrication. Il n'y a plus qu'à injecter le premier ensemble dans le second, soit 840 arrangements! mais heureusement la plupart s'éliminent d'eux-mêmes.

Je ne crois pas beaucoup à *argument* depuis qu'on m'a fait remarquer que le mot traînait derrière lui à peu près les mêmes ambiguïtés qu'*angle* (sans compter l'« argument d'une fonction »); d'ailleurs c'est un « angle polaire », et il est de fait que l' « argument d'un complexe » est, suivant les problèmes, tantôt un φ, tantôt un θ. On pourrait *à la rigueur* confondre σ et φ sous le même vocable en regardant φ comme un σ généralisé; je ne pense pas que ce soit recommandable, et il se trouve justement que l' « angle cinématique » φ a en physique une appellation qui lui convient parfaitement : la *phase;* pourquoi chercher ailleurs?

Finalement le choix me semble se réduire à une très étroite alternative : *Lequel des deux,* σ *ou* θ, *convient-il d'appeler angle,* et comment alors appeler l'autre? Ma position étant connue, je serais hypocrite de faire ici étalage de « neutralité ». Certes j'ai été tenté, comme beaucoup, de garder les « angles de rotation » θ; mais il faut alors reconnaître honnêtement ceci : non seulement nous irons vers un enseignement élémentaire où l'on devra parler des « amplitudes d'un triangle » ou des « ouvertures d'un triangle » dont la somme sera égale... à quoi au fait? à une « amplitude plate », à une « ouverture plate »? mais de plus nous nous écarterons du vocabulaire de la physique, de la technologie, de la géographie et même de la langue courante; ce risque, négligeable quand il s'agit d'un mot pédant, est grave quand il s'agit d'un mot vulgaire comme *angle.* C'est pourquoi — à titre personnel, mais aussi en me faisant l'écho de nombreuses inquiétudes — je reste fidèle à l'équivalence entre ce mot et la notion σ : c'est cette équivalence qui apportera le moins de perturbation dans les habitudes acquises, de pensée comme de langage, au niveau élémentaire. A un niveau un peu plus élevé les gens sont tout de même plus capables de se débrouiller.

Se pose alors la question : si σ est un angle, qu'est θ? Une proposition valable a été faite : parler de l'*amplitude* d'une rotation. J'y vois, et d'autres y ont vu, un inconvénient : le mot a un tout autre sens dans un domaine dangereusement voisin, celui des mouvements pendulaires; en outre on est conduit à des locutions assez médiocres « amplitude d'un couple de vecteurs », « amplitude d'un couple de droites » où le mot aurait encore deux sens différents. Personnellement et provisoirement, même au prix d'un néologisme, je garde ma préférence à *trope* pour θ et *ditrope* pour δ, qui sont brefs et expressifs. On est tout-à-fait libre de ne pas aimer, mais pour ces mots-là comme pour les autres une critique négative ne suffit pas si elle ne s'accompagne de propositions concrètes.

Tel est, dans l'état actuel, l'exposé — non pas neutre, mais assez objectif, je crois, pour ne pas fausser le problème — de cette question; elle est complexe et délicate par nature et je crains que personne n'y puisse rien. Je supplie les collègues d'y réfléchir, de me faire part en temps utile de leurs idées, auxquelles sera donnée la plus grande publicité possible, et de se préparer à choisir *massivement* dans quelques mois entre les deux formules suivantes, dont l'une sera à rayer et l'autre à compléter :

1° *Estimant que le mot « angle » doit s'appliquer à σ, je propose que θ soit appelé .... et que δ soit appelé ....*

2° *Estimant que le mot « angle » doit s'appliquer à θ, je propose que σ soit appelé .... et que δ soit appelé ....*

Il ne restera plus ensuite — ce ne sera pas le plus facile — qu'à appliquer avec discipline la décision de la majorité. Le vieux Caton avait une idée fixe : détruire Carthage; nous devons, nous, être dominés par cette pensée : couper sept pattes à l'octopus.

J.-M. CHEVALLIER,
Secrétaire de la Commission du Dictionnaire.

Commission du dictionnaire.

Les projets de notices suivants : ALPHABET, CHAÎNE (BIEN FORMÉE), LANGAGE, SYNTAXE ont été élaborées par l'équipe grenobloise du Dictionnaire. Vu le caractère très spécifique de ces notices et la compétence particulière que requiert leur discussion, la Commission préfère les publier d'abord dans le *Bulletin* — avant la publication sur fiches — dans l'espoir de provoquer ainsi des remarques propres à élargir le cadre de la discussion. Prière d'adresser ces remarques à : J.-M. CHEVALLIER, 37, av. Anatole-France, 94-Saint-Maur.

Alphabet

Ensemble, fini ou non, de symboles destinés à former un langage mathématique [LANGAGE]. Certains symboles peuvent être constitués par des assemblages de caractères $\left(\text{sin, cos, } \frac{2}{3}\text{, par exemple}\right)$.

L'explication des règles de syntaxe [SYNTAXE] nécessite, en général, le partitionnement de l'alphabet en les sous-ensembles suivants, dont certains peuvent être vides :

1° L'ensemble des « variables » ou « constantes ». Elles sont habituellement désignées par les lettres, latines ou grecques, majuscules et minuscules, éventuellement indicées, par les chiffres, ou par des symboles spéciaux tels que ∞, $\varnothing$.

2° L'ensemble des « opérateurs » ou « foncteurs » : les signes d'opérations, les symboles des fonctions trigonométriques, etc.

3° L'ensemble des « prédicats » : ils traduisent généralement des relations : l'égalité, l'inégalité, l'appartenance, l'inclusion, etc.

4° L'ensemble des signes auxiliaires : ce sont essentiellement des séparateurs : parenthèses, signes de ponctuation, etc.

Chaîne

On appelle « chaîne construite sur un alphabet A » [ALPHABET] toute suite finie, éventuellement vide, d'éléments de A, ou encore : tout élément du monoïde libre [MONOÏDE] engendré par les éléments de A et ayant pour loi de composition la concaténation (c'est à dire la mise bout à bout).

Exemple : si l'alphabet A contient les lettres latines, les signes d'addition et d'égalité et les parenthèses.

$$(x+y+z=t) \qquad \text{et} \qquad x)+y(+z=t$$

sont des chaînes construites sur A.

Remarque: Les combinaisons usuelles de symboles mathématiques utilisées ne sont pas toutes des chaînes. Par exemple :

$$\sqrt{x^3}, \quad \frac{4x+2}{5x+3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \int_a^b f(x)dx$$

ne sont pas des chaînes, mais certaines conventions et, éventuellement, l'introduction de nouveaux foncteurs dans l'alphabet permettraient de mettre ces expressions sous forme de chaînes.

Chaîne bien formée : Notion définie au cours de l'article LANGAGE.

Langage

On appelle « langage construit sur un alphabet A » un sous-ensemble donné de l'ensemble des chaînes construites sur A [CHAÎNE].

Les chaînes construites sur A et appartenant au langage sont appelées « chaînes bien formées ». Les règles permettant de construire les chaînes bien formées ou de déterminer si une chaîne donnée est bien formée ou non constituent la syntaxe du langage [SYNTAXE].

Exemple de règle : la règle des parenthèses [PARENTHÈSES].

Syntaxe

Ensemble de règles permettant de construire les chaînes d'un langage ou de déterminer si une chaîne donnée fait partie, ou non, du langage [LANGAGE].

Exemple 1: langage des entiers naturels. L'alphabet étant constitué des chiffres (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) on appelle « entier naturel » toute chaîne de chiffres qui satisfait les conditions :

1° elle est non vide;

2° si elle comporte plus d'un élément, le premier n'est pas le chiffre zéro.

On peut présenter une telle syntaxe sous la forme suivante due à Backus :

<chiffre> : : = 0/1/2/3/4/5/6/7/8/9
<entier non nul> : : = 1/2/3/4/5/6/7/8/9/<entier non nul> <chiffre>
<entier> : : = 0/<entier non nul>

Dans chaque ligne, à gauche du symbole : : =, se trouve placé entre le signe < et le signe > le nom de l'être mathématique dont on donne à droite, les règles de formation; les diverses possibilités de définition y sont séparées par des /. Parmi elles, outre des éléments de l'alphabet, peuvent d'ailleurs se trouver des notions intermédiaires placées entre < et > (ainsi < entier non nul > et < chiffre > dans l'exemple précédent). De nombreuses définitions syntaxiques sont récursives.

Exemple 2: langage des expressions ensemblistes. L'alphabet comprend les lettres latines majuscules, les foncteurs ¬, ∩, ∪ et les parenthèses. Le langage que nous allons définir n'autorise pas à écrire : (A) ou ((A∪B)), mais autorise : ¬(¬A), ¬¬A, (A∪B)∪C, A∪B∪C.

Soit donc cette définition :

<ensemble> : : = A/B/C/.../Z
<terme> : : = <ensemble>/(<N expression>)/
(<U expression>)/(<I expression>
<N expression> : : = ¬<terme>/¬<N expression>
<I expression> : : = <terme>∩<terme>/<I expression>∩<terme>
<U expression> : : = <terme>∪<terme>/<U expression>∪<terme>
<expression> : : = <terme>/<N expression>/<I expression>/
<U expression>.

Si l'on voulait permettre les redoublements de parenthèses interdits ci-dessus, il suffirait de modifier la définition de terme :

<terme> : : = <ensemble>/(<expression>).

Exemple 3. — Langage des expressions algébriques n'utilisant que l'addition et la multiplication. L'alphabet comprend des variables représentées par les lettres latines minuscules, l'opérateur + (la multiplication est écrite sans signe opératoire) et les parenthèses.

<variable> : : = *a*/*b*/*c*/.../*z*
<somme> : : = <produit>+<produit>/<somme>+<produit>
<produit> : : = <variable>/<produit><variable>/
(<somme>)<variable>/<produit>(<somme>)/
(<somme>)(<somme>)
<expression> : : = <somme>/<produit>.

Une telle expression est écrite avec le minimum de parenthèses. Des expressions telles que

$$(a+b), \qquad a+(b), \qquad a+(bc), \qquad a+((b+c))$$

y sont interdites.