A propos des symboles

Leur cause paraissait entendue! Aussi lors d'une réunion de la régionale de l'A.P.M. ai-je été fort étonné d'apprendre que des maîtres éminents de l'Enseignement Supérieur considéraient l'emploi des symboles mathématiques dits modernes comme du « snobisme » et de la « fumisterie ». Modeste mais fervent utilisateur de ces symboles j'ai été très sensible à ces accusations qui, en raison de la compétence de leur auteur, ont réussi à ébranler mes convictions et m'ont amené à faire un sérieux examen de conscience.

Du snobisme! Peut-on parler de snobisme quand les prétendus snobs constituent la grande majorité? Et la cohorte des professeurs de mathématiques qui devrait être un bastion de l'esprit critique serait-elle atteinte d'une banale crise de suivisme?

De la fumisterie! C'est plus grave. En quoi l'emploi des symboles ferait-il des professeurs des fumistes? J'avoue ne pas avoir trouvé d'explication, mais je suppose qu'à un certain niveau de connaissances on doit disposer d'éléments d'appréciation permettant d'étayer d'aussi catégoriques affirmations.

Les symboles mathématiques modernes sont-ils indispensables? Il est certain qu'on a fait des mathématiques avant l'emploi des symboles $\Rightarrow$ ou $\cap$, et même avant l'emploi du signe $=$. Mais les faisait-on mieux du temps de Viète quand on écrivait : A in X*q* + B in X *æq*C pour $AX^2 + BX = C$? Il est naturel qu'au fur et à mesure que s'est affinée la pensée mathématique on ait été amené à créer des symboles nouveaux. Certes il ne s'agit pas de confondre mathématique moderne et symbolisme, mais on conçoit mal la mathématique moderne sans un symbolisme approprié. Pédagogiquement les symboles modernes constituent un auxiliaire précieux pour atteindre le double but que nous poursuivons : développer chez les élèves les qualités intellectuelles et même morales, et rendre les éléments de mathématique accessibles au plus grand nombre tout en donnant à chacun la possibilité d'exploiter au mieux ses aptitudes. Ne serait-ce que parce qu'ils permettent d'expliciter des choses autrefois sous entendues, on peut espérer grâce à eux, récupérer certains de ceux qui étaient réputés ne pas avoir la « bosse », peut-être parce qu'on leur laissait trop d'étapes à franchir seuls. Ils ont permis aussi de préciser des nuances de sens, d'améliorer la rigueur des raisonnements, de mieux en dégager l'ossature logique et ont contribué de ce fait à accroître la valeur formatrice de notre discipline. Mais ils présentent aussi un intérêt technique non négligeable car, au prix d'une minutieuse préparation, ils rendent possible une meilleure présentation au tableau des notions mathématiques et les élèves peuvent sans précipitation et sans copier de longues phrases, prendre, non des notes éparses, mais un cours qui sera un instrument de travail.

Certes on se heurte à quelques obstacles. Il faut en particulier éviter l'excès de formalisme. Mais c'est là une question d'équilibre et de bon sens. D'autre part les élèves, réticents pour certains symboles, se livrent pour d'autres à un emploi abusif et sans doute sommes-nous nombreux à relever dans les copies et à déplorer les mêmes horreurs. N'est-ce pas une des raisons qui ont pu pousser des collègues, écœurés, à proscrire l'emploi des symboles modernes? Mais cette solution, radicale, est-elle la bonne? Si les symboles eux-mêmes ne sont pas en cause, mais seulement le mauvais usage qui en est fait, ne convient-il pas, au lieu de renoncer, de lutter avec patience et ténacité contre la négligence et les incorrections. Il incombe aux professeurs et aux auteurs de manuels chargés de l'apprentissage de donner le bon exemple en ne se permettant aucune liberté et en commençant par donner la signification précise des symboles, car bien des déboires proviennent de leur emploi empirique, générateur d'habitudes néfastes et même d'idées fausses.

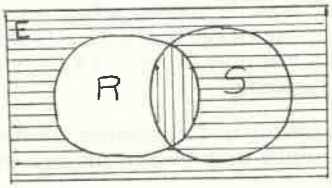
Quels sont les symboles dont l'utilisation par les élèves prête le plus à la critique? Il semble qu'il s'agisse, non de ceux qui indiquent des règles opératoires, mais de ceux, modernes ou anciens, qui concernent la logique. Cela tient sans doute à ce que la logique est plus difficile que la technique opératoire. Et cependant ces symboles s'avèrent nécessaires car les relations logiques qu'ils traduisent sont, autant que la théorie des ensembles, à la base des mathématiques et, consciemment ou non, explicitement ou non, sont utilisées dès les débuts. Ces règles logiques deviendraient-elles plus difficiles pour être précisées et symbolisées? N'est-il pas préférable, au contraire, d'introduire le plus tôt possible, sans craindre de consacrer du temps à leur assimilation pour pouvoir construire ensuite sur des bases solides, les relations fondamentales qui sont : l'égalité, R et S, R ou S, $R \Rightarrow S$, $\forall x \in E$. $R(x)$, $\exists x \in E$, $R(x)$ et leurs négations, en insistant plus particulièrement sur l'égalité, l'implication et celles comportant des quantificateurs, qui paraissent les plus délicates.

Le symbole $=$. Ce symbole n'est sans doute pas contesté! Et cependant, s'il en est un dont l'emploi, faute de définition précise, a donné lieu jadis à des abus, c'est bien lui! Sans faire de Métamathématique on peut expliquer aux élèves qu'on écrit $a = b$ uniquement pour exprimer que les symboles a et b représentent le même être mathématique (par exemple triangle ABC = triangle A'B'C' si et seulement si $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$) et que, par suite, dans toute relation, a peut être remplacé par b. Cependant certains auteurs s'évertuent encore à démontrer, parfois par récurrence, que : $a = b \Rightarrow a + x = b + x$!

Le symbole $\Rightarrow$. Il est très controversé et c'est cependant un des plus utilisés. Il est naturel qu'il ait acquis droit de cité car il répond à un besoin de rigueur logique en comblant une lacune de l'expression mathématique qui consistait à écrire les relations les unes au-dessous des autres, sans lien logique. Le symbole $\Rightarrow$, même s'il n'est pour certains qu'une précaution de style, contraint généralement les élèves à réfléchir, ou tout au moins à prendre leurs responsabilités. Qui n'a rencontré la dérobade consistant à interrompre une suite d'implications au moment délicat pour substituer au symbole $\Rightarrow$ une des expressions : « Élevons au carré », « il vient », « on a », « on peut écrire », que nous devons tous bannir pour pouvoir exiger la même chose des élèves. En ce sens le mot implique est déjà bénéfique mais il reste souvent inefficace et même dangereux, comme tous les termes non spécifiquement mathématiques tels que déplacement, rotation, élimination..., s'il est employé sans définition précise préalable. Une récente polémique révèle le malentendu provenant de ce que nous n'attribuons pas encore tous le même sens au symbole $\Rightarrow$. Et peut-être peut-on résumer ainsi les deux points de vue : Étant donné deux relations R et S définies dans un ensemble E, les uns disent : « Que signifie $R(x) \Rightarrow S(x)$? »; les autres disent : « quand est-ce que $R(x) \Rightarrow S(x)$ est vraie? ou fausse? » A en juger d'après les ouvrages consacrés à l'Enseignement Secondaire et les habitudes des élèves, c'est encore le premier point de vue qui prévaut. On rencontre dans beaucoup de manuels soit une absence totale de définition, soit des explications du genre : le symbole $\Rightarrow$ signifie « a pour conséquence », « implique », « entraîne », la meilleure étant sans doute « si $R(x)$ est vraie, $S(x)$ est vraie ». Est-il facile à partir de là de dire quand est-ce que $R(x)$ n'implique pas $S(x)$? L'usage fait de cette négation indique qu'il faut l'entendre ainsi : $R(x)$ n'implique pas $S(x)$ dès qu'il existe un x de E pour lequel $R(x)$ est vraie et $S(x)$ fausse. Donc $R(x) \Rightarrow S(x)$ concernerait tout x de E et non un x de E comme le suggère la notation. Mais alors, n'est-ce pas un progrès que de pouvoir lever toute ambiguïté en considérant $R \Rightarrow S$ comme une relation dans E, définie au même titre que R ou S par sa table de vérité

	$R(x)$	$S(x)$	$R(x) \Rightarrow S(x)$
1	V	V	V
2	V	F	F
3	F	V	V
4	F	F	V

et dont le graphe est représenté ci-dessous (partie hachurée)?



On peut alors préciser, lorsque c'est nécessaire : $\forall x \in E,\ R(x) \Rightarrow S(x)$ qui est la condition nécessaire et suffisante pour que le graphe de R soit inclus dans celui de S. Reste à démontrer (ou à admettre) que l'implication est transitive. Il faut exiger des élèves une connaissance parfaite de cette définition et leur en apprendre l'emploi, c'est-à-dire, connaissant la véracité de deux des relations qui y figurent, quelle conclusion en tirer pour la troisième. En particulier bien distinguer les deux problèmes :

1º *Comment démontrer qu'une implication est vraie?* Il suffit de prouver que l'on n'est pas dans le cas 2; donc, puisque l'implication est vraie dès que $R(x)$ est fausse, de démontrer que : Si $R(x)$ est vraie $S(x)$ est vraie.

On rejoint ainsi « l'ancienne » définition.

2º *Comment utiliser une implication vraie?*

Si $R(x) \Rightarrow S(x)$ est vraie et $R(x)$ est vraie on est dans le cas 1, donc $S(x)$ est vraie. C'est le syllogisme base du raisonnement déductif.

Si $R(x) \Rightarrow S(x)$ est vraie et $S(x)$ est fausse on est dans le cas 4, donc $R(x)$ est fausse. Dans les deux autres cas on ne peut pas conclure.

Le fait que ce soient les élèves déjà habitués à utiliser le symbole $\Rightarrow$ qui assimilent le moins aisément cette définition de l'implication montre la nécessité de l'enseigner le plus tôt possible et l'avantage qu'il y aurait à l'implanter dans des esprits neufs.

Les relations $\forall x \in \mathrm{E}, \mathrm{R}(x)$ *et* $\exists x \in \mathrm{E}, \mathrm{R}(x)$. Si leur définition, naturelle, ne présente pas de difficulté, sans doute la formation de leur négation est-elle plus délicate puis, qu'elle donne lieu à de nombreuses fautes. On ne saurait trop insister sur le fait que par exemple, $\mathrm{R}(x)$ et $\forall x \in \mathrm{E}, \mathrm{R}(x)$ sont deux relations totalement distinctes; la première seulement est une relation dans E, la véracité de la seconde est indépendante de x mais peut éventuellement faire intervenir d'autres variables. Il faudra malgré tout lutter longtemps contre la tendance qu'ont les élèves à considérer les quantifications comme de simples attributs que l'on consent à écrire épisodiquement pour satisfaire les exigences d'un professeur maniaque. Ils ne seront convaincus de leur importance qu'après s'être rendus coupables, pour ne pas les avoir utilisés, de graves fautes dont quelques-unes des plus classiques sont signalées dans les exemples suivants destinés à illustrer ce qui précède.

Exemple I: Propriétés des opérations internes.

1° *Commutativité et associativité:* C'est un des rares cas où l'oubli des quantificateurs peut ne pas trop porter à conséquence... du moins lorsque l'opération est commutative ou associative! Car l'omission du quantificateur dans la définition de la commutativité par exemple conduit fatalement à traduire la non commutativité par $a * b \neq b * a$ au lieu de $\exists (a, b) \in \mathrm{E}^2, a * b \neq b * a$ (Ainsi des élèves affirment que l'opération $a * b = 2a + 3b$ définie dans $\mathbb{R}$ n'est pas commutative car

$$2a + 3b \neq 2b + 3a$$

et ils ne prennent conscience de la faute que l'orsqu'on leur demande si c'est vrai pour $a = b = 1$). On rencontre malheureusement cette incorrection dans quelques ouvrages. D'ailleurs, il est pour le moins pédagogiquement mauvais de donner la définition de la commutativité en écrivant « pour tout x et tout y » dans le corps d'une phrase pour encadrer ensuite $a * b = b * a$. N'est-ce pas : $\forall (a, b) \in \mathrm{E}^2$, $a * b = b * a$ qui doit être encadré?

2° *Élément neutre et symétrique d'un élément.* L'affirmation de l'existence d'un élément neutre et du symétrique de tout élément met en évidence l'importance de la place des quantificateurs.

L'opération admet un élément neutre $\Leftrightarrow \exists e \in \mathrm{E}, \forall x \in \mathrm{E}, x * e = e * x = x$.

Tout élément à un symétrique $\Leftrightarrow \forall a \in \mathrm{E}, \exists a' \in \mathrm{E}, a * a' = a' * a = e$. Il faut remarquer que les élèves utilisant ces relations pour la recherche d'un élément neutre éventuel ou du symétrique éventuel de a, sont condamnés à l'échec car elles ne sauraient servir à résoudre ces problèmes, la conclusion de leur étude ne pouvant être que « vrai » ou « faux ». On doit habituer les élèves à procéder ainsi :

Soit e un élément de E : e est élément neutre $\Leftrightarrow \forall x \in \mathrm{E}, x * e = e * x = x$.

Soit a et a' deux éléments de E : a' est symétrique de $a \Leftrightarrow a * a' = a' * a = e$. Ceux qui, ayant compris le sens de $\forall x \in \mathrm{E}, \mathrm{R}(x)$ s'astreignent à écrire le quantificateur et aboutissent par exemple à : $\forall x \in \mathbb{R}, xe = 3$ sont moins enclins que les autres à conclure « $e = \frac{3}{x}$ si $x \neq 0$ ». De même, aboutissant à : $\forall x \in \mathbb{R}, (e - 2)(x - 3) = 0$, ils ne sont pas tentés de répondre : « 2 est élément neutre, mais si $x = 3$ tout élément est élément neutre », pour surenchérir parfois par : « donc il n'y a pas d'élément neutre car il doit être unique ». Il est vrai que certains trouvent le résultat correct après avoir commis sur la condition de nullité du produit une faute qui compense l'omission du quantificateur. Ces exemples amènent à parler de l'égalité de deux fonctions polynomes et plus généralement de deux fonctions quelconques.

Exemple II: Égalité de deux fonctions. Soit une fonction f_1 de E_1 vers F_1, une fonction f_2 de E_2 vers F_2, $\mathfrak{D}_{f1}$ et $\mathfrak{D}_{f2}$ leurs ensembles de définition respectifs. Le sens attribué au signe $=$ impose la définition : $f_1 = f_2$ si et seulement si $E_1 = E_2$, $F_1 = F_2$, $\mathfrak{D}_{f1} = \mathfrak{D}_{f2}$, $\forall x \in \mathfrak{D}_{f1}$, $f_1(x) = f_2(x)$. Faute de respecter cette définition on s'expose à commettre des fautes, surtout quand on étudie des opérations dans des ensembles de fonctions et que doivent intervenir les quantificateurs relatifs aux fonctions et ceux qui concernent les images de x. Ainsi, dans un exercice sur l'anneau des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, plusieurs élèves ont trouvé qu'il n'avait pas de diviseurs de zéro pour avoir écrit $f(x)g(x) = 0$ et non $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)g(x) = 0$. Dans le cas de deux fonctions polynomes réelles :

$$x \xrightarrow{A} A(x) = a_0 + a_1x + \ldots; \quad x \xrightarrow{B} B(x) = b + b_1x + \ldots$$

l'égalité se réduit à : $A = B \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, A(x) = B(x)$ et on démontre ensuite que : $A = B \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, A(x) = B(x) \Leftrightarrow a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots$ L'emploi du quantificateur marque la distinction entre l'égalité de deux fonctions et l'égalité des images de x mieux que ne le faisait le symbole $=$ que l'on réservait d'ailleurs aux seules fonctions polynomes, et permet de donner une solution nette de nombreux problèmes tels que ceux relatifs aux éléments neutres ou aux courbes passant par des points fixes. Par exemple, si $(D\lambda)$ est la droite d'équation $(2 + 3\lambda)x + (4 - 5\lambda)y + 1 + 2\lambda = 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $M_0(x_0, y_0) \in (D\lambda) \Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda(3x_0 - 5y_0 + 2) + 2x_0 + 4y_0 + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 3x_0 - 5y_0 + 2 = 0 \text{ et } 2x_0 + 4y_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -\frac{13}{22},\ y_0 = \frac{1}{22}$$

Exemple III: Relations Binaires. Pourquoi, dans la plupart des ouvrages, seule la réflexivité a-t-elle droit au quantificateur? N'est-ce pas parce que la symétrie et la transitivité se traduisent par des implications que l'on répugne à considérer comme des relations? La définition correcte de la symétrie n'est-elle pas :

R est symétrique si et seulement si : $\forall (x, y) \in E^2$, $xRy \Rightarrow yRx$, le quantificateur portant bien entendu, non sur xRy, mais sur l'implication avec laquelle on doit être familiarisé. Quand on propose d'étudier dans l'ensemble $E = \{a, b, c\}$ des relations du type aRa, aRb, bRa, bRb, cRc, la relation étant fausse pour les autres couples, certains élèves répondent qu'elle n'est pas transitive car « on n'a pas aRb et bRc », qu'elle n'est pas symétrique car « on n'a pas aRc ». L'interrogatoire révèle que les coupables connaissent de l'implication une définition incomplète passant sous silence les cas 3 et 4 de la table de vérité.

Une autre expérience concluante a été faite avec la relation « d'ordre strict » (il y a un mot à trouver car malgré les guillemets l'expression est mauvaise) définie comme une relation transitive et telle que : $\forall (x, y) \in E^2$, $xRy \Rightarrow$ non (yRx). Est-elle antisymétrique (à ne pas confondre avec non symétrique) c'est-à-dire est-ce que :

$\forall (x, y) \in E^2$, xRy et $yRx \Rightarrow x = y$? Elle est antisymétrique puisque, d'après la définition, pour tout couple (x, y) xRy et yRx est fausse, donc l'implication est vraie. C'était au début de l'année et seuls les élèves ayant déjà bien assimilé l'implication ont répondu correctement. Certains ont demandé pourquoi il était écrit dans leur livre que la relation d'ordre strict n'est pas antisymétrique.

Exemple IV: Problèmes d'élimination. Le mot éliminer fait image et les élèves l'affectionnent particulièrement mais s'obstinent à lui attribuer le sens de « faire disparaître ». (C'est d'ailleurs la définition du Larousse). Il importe donc d'en donner une définition rigoureuse ou mieux de s'abstenir de prononcer le vocable, non indispensable. Par contre, puisqu'il s'agit d'exprimer une condition nécessaire et suffisante d'existence, le quantificateur $\exists$ s'impose ici et permet de clarifier la pensée et l'expression. Par exemple, la traduction analytique de l'appartenance de $M(x, y)$ à la droite (Δ) définie par le point M_0 (1,4) et le vecteur $\vec{V}(2, -3)$ n'est pas $\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 4 - 3k \end{cases}$ mais : $\exists k \in I\!R, \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 4 - 3k \end{cases}$. Sinon, comment obtenir correctement l'équation cartésienne puisque dans tout système équivalent à $\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 4 - 3k \end{cases}$ figure le nombre k alors que l'appartenance de $M(x, y)$ à la droite est une propriété de x et y seuls. La rédaction convenable semble :

$$M(x, y) \in (\Delta) \Leftrightarrow \exists k \in I\!R,\ \overrightarrow{M_0M} = k\vec{V} \Leftrightarrow \exists k \in I\!R, \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 4 - 3k \end{cases} \Leftrightarrow 3(x-1) + 2(y-4) = 0$$

Les mêmes difficultés se présentent lorsqu'on veut trouver l'intersection de la droite (Δ) et de la droite (D) d'équation $2x + y - 8 = 0$. Les élèves qui écrivent :

$$M(x, y) \in (\Delta) \cap (D) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 4 - 3k \\ 2x + y - 8 = 0 \end{cases}$$

au lieu de :

$$M(x, y) \in (\Delta) \cap (D) \Leftrightarrow \exists k \in R, \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 4 - 3k \\ 2x + y - 8 = 0 \end{cases}$$

sont embarrassés du nombre k qui subsiste dans leurs calculs et sentent confusément une incorrection. Mais pour résoudre ce problème il est sans doute plus simple de déterminer k pour que le point M de (Δ) tel que $\overrightarrow{M_0M} = k\vec{V}$ appartienne à (D).

Bien entendu les considérations qui précèdent ne prétendent à aucune originalité. Convaincu qu'à tous les niveaux beaucoup de fautes sont imputables à la méconnaissance ou à la non observation de règles et relations fondamentales j'ai seulement voulu rassembler quelques exemples et remarques pour souligner la nécessité de les définir correctement et d'utiliser judicieusement les symboles pour les traduire.

Le fait d'avoir relevé quelques négligences ne saurait être interprété comme un réquisitoire contre les manuels dont les auteurs réalisent une tâche difficile qu'ils s'appliquent à parfaire et lors de chaque réédition on a d'ailleurs l'occasion d'apprécier les améliorations apportées. Ce n'est pas parce qu'au début il est fait état d'une boutade qu'on doit chercher à déceler dans ces lignes la moindre intention polémique. Je pense au contraire qu'il faut savoir gré aux maîtres des Facultés qui, au lieu de le décrier, consentent à s'intéresser à l'Enseignement de la Mathématique au niveau inférieur et à sacrifier une part de leur temps à éclairer les professeurs du secondaire qui s'interrogent sur le contenu, la forme et l'orientation de leur enseignement et sont soucieux de donner à leurs élèves une formation moderne solide et de leur éviter ainsi une pénible reconversion.

Maurice PAULY,
(*Lycée Fermat, Toulouse*).