8

Et avant ?
Et après ?

Il est entendu que ce Bulletin spécial est consacré à l'enseignement en Sixième. Mais cette classe n'est qu'un épisode dans la vie scolaire d'élèves qui ont un passé et mieux encore un avenir. D'ailleurs on l'a dit en commençant : nous appareillons ; après cette année scolaire 1969-70, il y aura escale et sinon changement de bateau, au moins changement de classe.

Comment enseigner en Sixième sans savoir ce qui a été étudié dans les classes précédentes (ça, ce n'est pas nouveau) et dans la complète ignorance des études futures ?

On a pu lire [7.5] *les programmes de Cinquième et les Instructions officielles concernent les deux classes de Sixième et Cinquième, première étape du cycle d'orientation. Selon nous, il est très préférable de considérer que ces deux classes forment un tout ; pratiquement, cela signifie qu'il nous paraît préférable qu'un même maître suive ses élèves de Sixième en Cinquième. Cela signifie aussi que les deux programmes ne sont pas séparés par des cloisons étanches, que les méthodes d'enseignement seront sans doute très voisines (encore que l'expérience nous ait appris que les élèves, d'une année à la suivante, ont acquis déjà une certaine maturité).*

Ce Bulletin *était déjà trop lourd pour que nous y ajoutions toutes les nombreuses études sur la Cinquième que nous avons déjà reçues. D'un autre côté, le* Bulletin *n° 267 a déjà publié un aperçu des modifications qui devraient intervenir prochainement dans l'enseignement élémentaire ; la brochure « **Première étape** » encartée dans ce* Bulletin *ouvre, sur cette réforme, des perspectives plus précises. Nous nous contentons de donner deux articles qui, portant sur des sujets voisins de ceux qui sont étudiés en Sixième, montrent bien la continuité entre les deux classes.*

500 J. CHAYÉ : L'arithmétique en Cinquième.

508 Mlle M. LIMOGE : Français *ou* mathématique.

L'arithmétique en classe de Cinquième

Jacques CHAYÉ,
Lycée de Poitiers.

Les concepts ensemblistes et relationnels introduits dans les nouveaux programmes permettent de traiter élégamment l'arithmétique de Cinquième. On peut dire inversement que les thèmes arithmétiques du programme de cette classe sont autant d'occasions d'utiliser les notions « modernes »; ils sont en outre riches en prolongements, en particulier dans $\mathbb{Z}$, et préparent à l'étude des treillis, des anneaux principaux, factoriels, euclidiens, etc.

A ce propos, remarquons qu'il pourrait être tentant de traiter tout de suite l'arithmétique dans $\mathbb{Z}$: il semble que ce serait s'écarter sensiblement de l'esprit du programme et supprimer une étape nécessaire.

Les fiches présentées ci-dessous ont été expérimentées en 1968-1969 dans deux classes de Poitiers et trois classes de Couhé-Vérac; les révisions de Sixième, les applications et les relations d'équivalence avaient été étudiées antérieurement.

1re fiche : Multiples et diviseurs d'un nombre naturel.

Exercice I : — $12 = 4 \times 3$. Le nombre naturel 12 est donc le produit du naturel 4 par un autre naturel; pour cette raison on dit que 12 est multiple de 4 (ceci ne l'empêche pas d'être multiple d'autres naturels! dites desquels).

D'une façon générale, on dit que le naturel a est un *multiple* du naturel b si et seulement si : il existe un naturel k tel que : $a = b \times k$.

Au lieu de dire : a est multiple de b,
on dit aussi : b est *diviseur* de a,
ou encore : a a pour ..... b,
ou enfin : b a pour ..... a.

Exercice II : — Complétez les phrases suivantes par « diviseur » ou « multiple » :

12 a pour ..... 4, 4 a pour ..... 12, 4 est ..... de 12
1 est ..... de tous les naturels. Pourquoi?
0 est ..... de tous les naturels. Pourquoi?
Tout naturel est ..... de lui-même. Pourquoi?

Exercice III : — 1° La relation de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ de lien verbal « ... est multiple de... » est-elle réflexive? symétrique? transitive?

2° La relation réciproque de celle-ci peut être caractérisée par le lien verbal « ..... ».

3° Il est impossible de tracer des diagrammes complets représentant ces relations; il faut se contenter de diagrammes partiels et imaginer qu'on les prolonge indéfiniment.

Remplissez la grille ci-dessous (non reproduite ici) à l'aide de points rouges pour représenter la relation de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ de lien verbal « ... a pour multiple... », puis de croix vertes pour représenter la relation de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ de lien verbal « ... a pour diviseur... ».

2e fiche : Nombres premiers.

Exercice I : — D'après le dernier exercice de la fiche précédente, on voit que :

0 admet tous les naturels comme diviseurs,
1 admet un diviseur,
2 admet deux diviseurs,
3 admet ..... diviseurs,
4 admet ..... diviseurs,
5 admet ..... diviseurs,
6 admet ..... diviseurs,
etc.

Les résultats sont très irréguliers. On peut faire une partition de $\mathbb{N}$ à l'aide de la relation de lien verbal « ... a autant de diviseurs que... »; on obtient les classes suivantes :

— $\{0\}$: 0 est le seul nombre naturel ayant une « infinité » de diviseurs,
— $\{1\}$: 1 est le seul nombre naturel ayant un seul diviseur,
— la classe des nombres ayant deux diviseurs seulement : 2, 3, 5, 7, 11, ... (trouvez-en d'autres),
— la classe des nombres ayant trois diviseurs seulement : 4, 9, ... (trouvez-en d'autres),
— la classe des nombres ayant quatre diviseurs seulement : 6, 8, 10, 14, ... (trouvez-en d'autres),
— etc.

Exercice II : — Parmi toutes ces classes il y en a une qui est très importante, c'est la troisième : celle des nombres qui admettent deux diviseurs seulement; ces nombres sont appelés *nombres premiers.*

Un nombre premier est donc un nombre qui admet deux diviseurs et deux seulement : 1 et lui-même.

Les nombres premiers sont les nombres : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ... Vous verrez qu'il existe une infinité de nombres premiers.

1° Pourquoi 2 est-il le seul nombre naturel à la fois pair et premier?

2° Pourquoi les nombres premiers plus grands que 5 ont-ils pour chiffre des unités dans le système décimal 1 ou 3, ou 7, ou 9?

3° Est-ce que tout naturel plus grand que 5, ayant pour chiffre des unités dans le système décimal 1 ou 3, ou 7, ou 9, est premier? Donnez des exemples.

Exercice III : — Considérons les naturels supérieurs à 1 et non premiers; on peut écrire :

$$4 = 2 \times 2$$
$$6 = 2 \times 3$$
$$8 = 2 \times 2 \times 2$$
$$9 = 3 \times 3$$
$$10 = 2 \times 5$$
$$12 = 2 \times 2 \times 3$$
etc.

On dit qu'on a écrit à droite les *décompositions en facteurs premiers* (*) des nombres non premiers.

Recherchez la décomposition en facteurs premiers des nombres suivants :

30, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 39, 40
99, 100, 1 000, 350

(On pourra s'y prendre de plusieurs façons, par exemple pour 30 on peut partir de $30 = 6 \times 5$ ou de $30 = 3 \times 10$ et décomposer les facteurs non premiers.)

Exercices IV : On peut faire des remarques intéressantes sur les décompositions en facteurs premiers des multiples et des diviseurs d'un naturel.

Exemple : considérons 2 520; on vérifie facilement que :

$$2\,520 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$$

1° Soit m un multiple de 2 520; c'est donc le produit de 2 520 par un naturel :

$$m = 2\,520 \times k$$
$$m = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times k$$

Si on écrit la décomposition de k en facteurs premiers on obtient alors aussi celle de m.

Quels sont les facteurs premiers qui apparaissent nécessairement dans cette décomposition? Combien de fois au moins chacun d'eux apparaît-il?

Donnez quelques exemples de décompositions de multiples de 2 520.

2° Soit d un diviseur de 2 520; 2 520 est donc un multiple de d.

- d peut être égal à 1.
- d peut être égal à certains nombres premiers. Lesquels?
- d peut être un nombre non premier, supérieur à 1. Quels sont alors les seuls facteurs premiers possibles de la décomposition de d?

Combien de fois au plus chacun d'eux peut-il apparaître dans cette décomposition?

Parmi les nombres suivants, dites quels sont ceux qui sont diviseurs de 2 520 :

4, 16, 20, 30, 45, 49, 50, 54, 66, 130, 140, 2 520, 5 040

(*) *N.D.L.R.* — Nous proposons l'expression implifiée et peut-être plus exacte que la dénomination traditionnelle : « factorisation primaire ».

3e fiche : Diviseurs communs à deux ou plusieurs naturels.

Dans toute cette fiche on désigne par D_a l'ensemble des diviseurs du naturel a (par exemple D_{18} désigne l'ensemble des diviseurs de 18).

Exercice I : Complétez : $D_{18} = \{ \ldots\ldots\ldots$
$D_{24} = \{ \ldots\ldots\ldots$

(Pour trouver les diviseurs de 18 et ceux de 24 vous pouvez consulter le diagramme du dernier exercice de la 1re fiche ou encore utiliser les décompositions en facteurs premiers de 18 et de 24.)

Complétez : $D_{18} \cap D_{24} = \{ \ldots\ldots\ldots$

Les éléments de $D_{18} \cap D_{24}$ sont appelés les *diviseurs communs* à 18 et 24 ou les *communs diviseurs* de 18 et 24.

Quel est le plus grand de ces diviseurs communs?

On l'appelle le *plus grand commun diviseur* de 18 et 24 (en abrégé : p.g.c.d. de 18 et 24).

Complétez : $D_6 = \{ \ldots\ldots\ldots$
Complétez : $D_{18} \cap D_{24} \ldots\ldots D_6$.

On voit que : les diviseurs communs à 18 et 24 sont les diviseurs de 6.

Ce résultat est général : *les diviseurs communs à deux naturels sont les diviseurs du* $\ldots\ldots\ldots$

Exercice II : Comment utiliser les décompositions en facteurs premiers de deux nombres pour trouver leur p.g.c.d.?

Exercice III : Complétez : $D_{12} \cap D_{20} = D_{\ldots}$
$D_{16} \cap D_{15} = D_{\ldots}$
$D_{420} \cap D_{450} = D_{\ldots}$

Exercice IV : Existe-t-il deux naturels a et b tels que :

$$D_a \cap D_b = \varnothing \, ?$$

Exercice V : Complétez : $D_6 \cap D_{18} = D_{\ldots}$
$D_4 \cap D_{16} = D_{\ldots}$
$D_5 \cap D_{20} = D_{\ldots}$

Ces résultats étaient-ils prévisibles?

Exercice VI : Sur une feuille de papier rectangulaire de 36 cm de largeur et de 48 cm de longueur, on trace un quadrillage centimétrique (les bords de la feuille faisant partie du quadrillage). On se propose de découper cette feuille en carrés de même taille en suivant des lignes du quadrillage. On peut donc, par exemple, découper la feuille en carrés de 1 cm de côté ou encore en carrés de 2 cm de côté, etc.

Quelles sont toutes les tailles possibles de carrés répondant à la question?

Exercice VII : On peut aussi rechercher les diviseurs communs à plus de deux naturels.

Complétez : $D_{20} \cap D_{24} \cap D_{32} = D_{\ldots}$
$D_{30} \cap D_{40} \cap D_{50} = D_{\ldots}$
$D_{14} \cap D_{15} \cap D_{16} = D_{\ldots}$
$D_{32} \cap D_{16} \cap D_4 = D_{\ldots}$

4e fiche : Multiples communs à deux ou plusieurs naturels.

On désigne par M_a l'ensemble des multiples de a.

Exercice I : Il est impossible de désigner en extension l'ensemble des multiples d'un nombre naturel (excepté M_0 qui est égal à : .....) car c'est un ensemble qui a une infinité d'éléments; on peut écrire quelques-uns des premiers multiples et indiquer la suite par des points de suspension; par exemple :

$$M_{18} = \{0;\ 18;\ 36;\ 54;\ 72;\ 90;\ 108;\ 126;\ 144;\ 162;\ 180;\ \ldots\}$$

De même :

$$M_{24} = \{\ldots\ldots\ldots$$
$$M_{18} \cap M_{24} = \{\ldots\ldots\ldots$$

Les éléments de $M_{18} \cap M_{24}$ sont appelés les *multiples communs à 18 et 24* ou les *communs multiples de 18 et 24.*

Quel est le plus petit de ces multiples communs?
Quel est le plus petit des multiples communs différents de 0?

On l'appelle le *plus petit commun multiple de 18 et 24* (en abrégé : p.p.c.m. de 18 et 24).

Attention! on devrait dire le plus petit commun multiple *différent de 0;* on a pris l'habitude de ne pas le préciser mais c'est sous-entendu.

Complétez : $M_{72} = \{\ldots\ldots\ldots$
Complétez : $M_{18} \cap M_{24} \ldots M_{72}$

On voit que les multiples communs à 18 et 24 sont les multiples de 72.
Ce résultat est général : *les multiples communs à deux naturels sont les multiples du* .....

Exercice II : Comment utiliser les décompositions en facteurs premiers de deux naturels pour trouver leur p.p.c.m.?

Exercice III : Complétez : $M_{12} \cap M_{20} = M_{\ldots}$
$M_{16} \cap M_{15} = M_{\ldots}$
$M_{420} \cap M_{450} = M_{\ldots}$

Exercice IV : Existe-t-il deux naturels a et b tels que :

$$M_a \cap M_b = \varnothing\ ?$$

Exercice V : Complétez : $M_6 \cap M_{18} = M_{\ldots}$
$M_4 \cap M_{16} = M_{\ldots}$
$M_5 \cap M_{20} = M_{\ldots}$

Ces résultats étaient-ils prévisibles?

Exercice VI : En plaçant les unes à côté des autres (bord à bord) des feuilles de papier rectangulaires de 36 cm de largeur et de 48 cm de longueur, on peut constituer des carrés.

Quel est en centimètres la mesure du côté du carré le plus petit ainsi obtenu? Comment sont les autres?

Exercice VII : On peut aussi rechercher les multiples communs à plus de deux naturels.

Complétez : $M_{20} \cap M_{24} \cap M_{32} = M_{...}$
$M_{30} \cap M_{40} \cap M_{50} = M_{...}$
$M_{14} \cap M_{15} \cap M_{16} = M_{...}$
$M_{32} \cap M_{16} \cap M_{4} = M_{...}$

5e fiche : Division des naturels à une unité près.

Exercice I : Pierre retire un livre de la bibliothèque un lundi; il le rendra 80 jours plus tard (*).

Dans 11 semaines, c'est-à-dire dans ... jours, ce sera un lundi.
Dans 12 semaines, c'est-à-dire dans ... jours, ce sera un .....
Donc :

- dans 80 jours ce sera un .....;
- il se sera écoulé un peu plus de ... semaines (mais un peu moins de ... semaines).

Exercice II : Un chronomètre, dont l'aiguille fait un tour par minute et dont le cadran est gradué de 0 à 60, fonctionne pendant 920 secondes.

- Combien de tours complets l'aiguille effectue-t-elle?
- Sur quel trait de la graduation s'arrête-t-elle?

(Pour répondre à ces questions, on remarquera que : $15 \times 60 = ...$ et $16 \times 60 = ...$)

Exercice III : Considérons l'ensemble $\mathbb{N}$ de tous les naturels :

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; ...\}$

1° Soulignez en rouge dans cette liste les naturels multiples de 4.

Un naturel qui n'est pas multiple de 4 est compris entre deux multiples de 4; il est égal :

— soit à la somme d'un multiple de 4 et de 1,
— soit à la somme d'un multiple de 4 et de 2,
— soit à la somme d'un multiple de 4 et de 3.

2° Que peut-on dire :

— d'un naturel qui est égal à la somme d'un multiple de 4 et de 4?
— d'un naturel qui est égal à la somme d'un multiple de 4 et de 5?
— d'un naturel qui est égal à la somme d'un multiple de 4 et de 6?
— etc.

3° Soit :

$E = \{0; 4; 8; 12; 16; 20; ...\}$
$F = \{1; 5; 9; 13; 17; 21; ...\}$
$G = \{2; 6; 10; 14; 18; 22; ...\}$
$H = \{3; 7; 11; 15; 19; 23; ...\}$

Que peut-on dire de l'ensemble $\{E; F; G; H\}$?

(*) *N.D.L.R.* — A cette cadence là, quand saura-t-il la fin de l'histoire si celle-ci s'étend sur 14 volumes?

Exercice IV : Vous avez appris à faire des « divisions à une unité près » (vous avez même appris à faire des « divisions à 1/10 près », « à 1/100 près », etc., mais nous n'en parlerons pas ici).

Complétez par exemple :

$200 \mid \underline{12}$ $201 \mid \underline{12}$ $202 \mid \underline{12}$ $203 \mid \underline{12}$ $204 \mid \underline{12}$ $205 \mid \underline{12}$ etc.

Ce procédé permet de trouver pour chacun des nombres 200, 201, 202, ..., etc., quel est le plus grand multiple de 12 qui lui est inférieur ou égal.

On trouve ainsi :

$$\begin{aligned} 200 &= 12 \times 16 + 8 \\ 201 &= 12 \times 16 + 9 \\ 202 &= 12 \times 16 + 10 \\ 203 &= 12 \times 16 + 11 \\ 204 &= 12 \times 17 \\ 205 &= 12 \times 17 + 1 \end{aligned}$$

etc.

On dit que pour la division à une unité près de 200 par 12 le *quotient* est 16 et le *reste* 8.

On dit aussi plus brièvement (étant sous-entendu qu'il s'agit de naturels) :

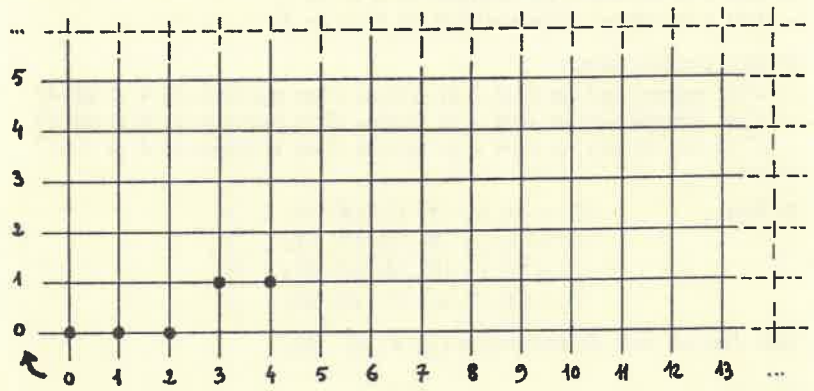
— le quotient de 200 par 12 est 16,
— le reste de 200 par 12 est 8.

1° Quels sont le quotient et le reste par 12 de 201? Quels sont le quotient et le reste par 12 de 204?

2° Pour une division à une unité près d'un nombre naturel par 12, quels sont les seuls restes possibles?

Exercice V : 1° Considérons la relation de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ qui relie chaque élément de $\mathbb{N}$ à son quotient par 3.

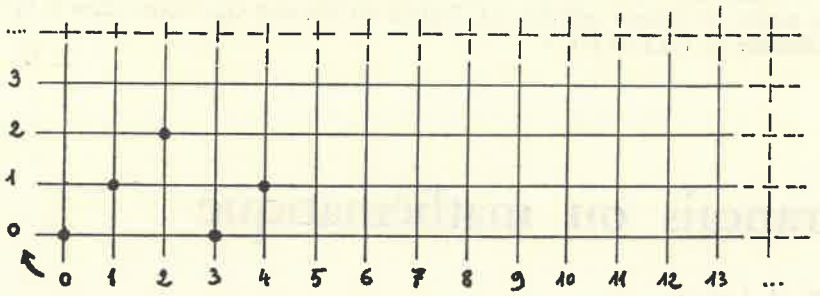
Complétez son diagramme cartésien :



Est-ce une application? Une bijection?

2° Considérons la relation de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ qui relie chaque élément de $\mathbb{N}$ à son reste par 3.

Complétez son diagramme cartésien :



Est-ce une application? Une bijection?

Eercice VI : Un nombre a 235 pour quotient par 17 et 4 pour reste. Quel est ce nombre?

Exercice VII : Complétez : $317 \times 72 = \ldots$

Déduisez-en le quotient et le reste par 72 des nombres naturels : 22 825, 22 834, 22 823.

Exercice VIII : Complétez :

$$\begin{array}{r|l} 28\,.1. & .. \\ \cline{2-2} 100 & 1\ldots \\ 10. & \\ \ldots & \\ .1 & \end{array}$$

(Les points représentent des chiffres à découvrir.)

Remarques. — Les fiches qui viennent d'être présentées n'ont pas été utilisées en classe de façon exclusive; bien souvent le professeur est intervenu :

— soit pour développer certains exercices,
— soit pour proposer ou faire proposer d'autres exemples,
— soit pour dégager ou faire dégager les idées importantes.

La difficulté, le temps consacré à la recherche ou à la rédaction, sont variables d'un exercice à l'autre.

La progression utilisée n'est pas la seule possible : le libellé du programme, en particulier, en suggère une autre.

Certains expérimentateurs ont profité des décompositions des naturels en facteurs premiers pour introduire la notation exponentielle; d'autres ont préféré pour le moment conserver par exemple l'écriture $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 7$ et réserver l'écriture $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7^2$ pour plus tard.

Ce que nous n'avons pas fait et que nous aurions aimé faire si nous avions eu davantage de temps :

— « démonter le mécanisme » de l'opération de division appris à l'école, à l'aide par exemple des machines à calculer,

— utiliser la division euclidienne, une fois la technique maîtrisée, pour la

recherche des diviseurs de nombres élevés (non connus comme multiples), pour la recherche des nombres premiers, etc.,

— introduire l'organisation en treillis de l'ensemble des diviseurs d'un naturel et la notion de diviseur primaire (cf. l'article de Maurice GLAYMANN dans le n_0 266 du *Bulletin* de l'A.P.M.E.P.).

J. C.

Français ou mathématique

M^lle M. LIMOGE,
Lycée Récamier (Lyon).

Le nouveau programme de Cinquième comporte le paragraphe suivant (1. *c*) :

« En liaison avec l'étude du français et sur des exemples : sens de l'article défini *le*, différents sens de l'article indéfini *un*, sens de la conjonction *et*, les deux sens de la conjonction *ou*, sens du mot *tout*. »

Si le programme de mathématique de Sixième et de Cinquième comporte des nouveautés par rapport au programme précédent, le paragraphe 1. *c*, bien que nouveau lui aussi, a toujours été traité par le professeur de mathématique, de la Sixième à la Terminale. « le, un, tout, et, ou » ayant, même lorsque leur emploi est précisé (article défini...) plusieurs sens en français, il importe que l'élève sache bien distinguer celui que la mathématique privilégie, donc spécialise. Pour chacun des mots cités au paragraphe 1. *c*, on trouvera ci-dessous une énumération (sans doute incomplète) de ses sens les plus courants.

Les citations relatives à la grammaire et à la syntaxe notées (G) sont empruntées à : Maurice GRÉVISSE : *« Le bon usage »* (Hatier); celles notées (R) sont empruntées au « Dictionnaire alphabétique et analogique de la langue française » de Paul ROBERT (P.U.F.).

Bien que le programme ne le mentionne pas explicitement, et pour préparer l'initiation indispensable à la logique, il a semblé bon de consacrer un paragraphe au problème (car c'en est un en français) de la négation. L'expérience montre, dans les classes expérimentales et dans les autres..., que s'il est un point délicat, c'est bien celui-là.

1. a) le, l', la, les, au (à le), aux (à les), du (de le), des (de les).

L'emploi de « *le* » qui nous préoccupe est celui d'article défini. (G) : « L'article défini s'emploie devant les noms communs pris dans un sens complètement déterminé, c'est-à-dire désignant un genre, une espèce, un type, un individu, particuliers. »

la vallée *du* Rhône
le naturel 7
Jeanne est *la* mère d'André (individu précis)
le point A de coordonnées (5,1)
zéro est *l'*élément neutre de...

le lion est carnivore (espèce, type)
le carré a quatre côtés

(G) : « L'article défini s'emploie comme démonstratif, devant des noms désignant un être ou un objet déjà présenté... »

« Un savetier chantait du matin jusqu'au soir(...). *Le* savetier alors en chantant... »
Soit C un cercle de centre O et de rayon R; sur *le* cercle C on considère... D et D' se croisent en A; *le point* A...

(G) : « Le nom complément du collectif général prend l'article défini. »

la foule *des* ignorants
l'ensemble *des* réels

(G) : « Le nom complément du collectif partitif... ne prend pas l'article. »

une foule d'ignorants
un ensemble de naturels

(G) : « Mais si le nom complément du collectif partitif est bien déterminé, il doit prendre l'article. »

un grand nombre *des* élèves de cette classe font de l'anglais
l'ensemble *des* entiers pairs compris entre 13 et 27

1. b) un, une, des (article indéfini).

(G) : « L'article indéfini indique que l'être ou l'objet désigné par le nom est présenté comme *un certain être* ou *un certain objet* distinct des autres êtres ou objets particuliers de l'espèce... »

« *Un* agneau se désaltérait dans le courant d'*une* onde pure. »
Soit ABCD *un* carré dont le côté a pour mesure 9 en centimètres.
Le naturel 25 est écrit avec *des* chiffres arabes.
Zéro est *un* rationnel.

(G) : « L'article indéfini peut indiquer aussi que l'être ou l'objet désigné par le nom est, soit celui qu'on voudra dans l'espèce à laquelle il appartient, soit l'être ou l'objet représentant d'une façon tout à fait générale l'espèce; dans ces cas, un signifie *n'importe quel, tout.* »

un lion est carnivore
un carré a quatre côtés

Les phrases : *le* lion est carnivore
un lion est carnivore
les lions sont carnivores
tout lion est carnivore

ont le même sens, de même que :
le carré a quatre côtés
un carré a quatre côtés
tout carré a quatre côtés

1. c) un, une (adjectif numéral cardinal; adjectif numéral ordinal).

on m'a donné *un* bonbon; j'en voulais deux
trente et *un* francs (cardinal)

la page *un*
livre vingt et *un* (ordinal)

Remarquons que, en mathématique — et aussi en français — l'adjectif numéral cardinal s'accompagne souvent de « *et un seul* » ou encore « *unique* » pour qu'il ne soit pas pris pour un article indéfini.

L'équation $7 + x = 3$ a dans $\mathbb{Z}$ *une* solution *et une seule.*

Par l'application f de E vers F, y, élément de E, a *une* image *unique*, élément de F.

Notons enfin l'usage de « *un au moins* » pour « *un ou plus d'un* », et celui de « *un au plus* » pour « *zéro ou un* ».

Par la fonction f de E vers F, z, élément de E, a *une* image *au plus.*

Si A et B ne sont pas disjoints, ils ont *au moins un* élément commun.

1. d) tout (adjectif indéfini).

(R) : « un quelconque, n'importe lequel, un individu pris au hasard ».

« *Toute* peine mérite salaire. »

Tout élément de A est élément de B.

Il y a intérêt pour la clarté d'un énoncé mathématique à remplacer « *un* » lorsqu'il signifie « *n'importe lequel* », par « *tout* ». Ainsi la phrase : « *un* élément de A est élément de B » est équivoque, elle peut signifier :

« *tout* élément de A est élément de B »,
« il existe *un* élément *au moins* de A qui est élément de B »,
« *un seul* élément de A est élément de B ».

Il ne semble pas que la mathématique donne à « *le* » (article défini), « *un* » (article indéfini) et « *tout* » (adjectif indéfini) un sens plus spécialisé que le français. Tout au plus, le contexte n'étant généralement pas soumis à contestation, l'usage de ces mots est-il plus précis en mathématique qu'en français.

C'est dès la Sixième que l'enfant doit être familiarisé avec l'usage de « le », « un », « tout ». Cela lui est indispensable en mathématique (et en français...). En effet, en Sixième, il faut savoir passer de la « langue des ensembles » à la langue française et vice versa.

Ainsi, si C désigne l'ensemble des carnivores et A le lion Arthur :

le lion Arthur est *un* carnivore s'écrit $A \in C$

Si L désigne l'ensemble des lions :

Tout lion est *un* carnivore s'écrit $L \subset C$

En « langue des logiciens » la dernière phrase s'écrit encore :

$$\forall x \, (x \in L \Rightarrow x \in C)$$

ou $\forall x \in L, \; x \in C$ notation abusive

ou $\forall_L \, x, \; x \in C$

C'est la dernière écriture qui nous semble, d'un point de vue pédagogique, la plus satisfaisante. A ce propos, y a-t-il lieu, en Sixième et en Cinquième, d'introduire les quantificateurs? Quant à nous, nous ne l'avons pas fait et nous hésitons même à le faire en Quatrième. Nous pensons que la bonne utilisation du français en mathématique et la traduction en « langue des logiciens » sont deux étapes qui ne doivent pas être franchies simultanément. Le risque qu'on courrait alors serait de voir utiliser les quantificateurs comme des abréviations. L'introduction de variables muettes

ou de lettres muettes, qui, elle, est indispensable en Cinquième, ne se fait déjà pas sans mal. Elle s'est trouvée facilitée dans nos classes par l'utilisation de « moules à phrases mathématiques » (ou encore moules à énoncés). Par exemple :

$$\text{« } \square + 7 = 11{,}2 \text{ »}$$

En mettant 4,2 à la place de $\square$ on obtient une phrase vraie (un énoncé vrai); en mettant 71 à la place de $\square$, on obtient une phrase fausse.

Pour terminer ce paragraphe, donnons un exemple de phrase dont la traduction en « langue des ensembles » n'est pas aussi simple que celle de « le lion Arthur est un carnivore » ou « tout lion est un carnivore ».

Supposons que dans une société sportive A on pratique, entre autres sports, le ski et la natation. On désigne par S le sous-ensemble de A constitué par l'ensemble des skieurs et par N le sous-ensemble de A constitué par l'ensemble des nageurs.

On veut traduire la phrase : « Dans la société A *il y a des* nageurs qui font du ski » (on dirait plus volontiers en français « *certains* nageurs font du ski »). Dans cette phrase, « *des* » est le pluriel de « *un* » (un certain).

On est tenté de traduire :

« *certains nageurs font du ski* » par $N \cap S \neq \varnothing$

Or $N \cap S \neq \varnothing$ signifie « *il y a au moins un nageur qui fait du ski* ». Les deux écritures (ou la phrase et l'écriture) ne sont donc pas équivalentes.

« *Certains nageurs font du ski* » signifie « *il y a au moins deux nageurs* qui font du ski » (puisque certains est au pluriel) et « *il y a au moins un nageur qui ne fait pas de ski* » (s'il n'en était pas ainsi, on aurait dit « tous les nageurs font du ski »).

Si on traduit la situation par un diagramme de Venn on obtient (fig. 1) *avec* card $(N \cap S) \geqslant 2$:

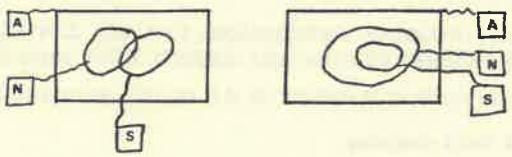


FIG. 1.

Avec un diagramme de Venn pour $N \cap S \neq \varnothing$ on obtient

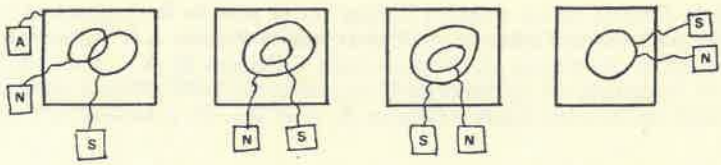


FIG. 2.

La bonne traduction de « certains font nageurs font du ski » ou de « il y a des nageurs qui font du ski » est donc :

$$\begin{cases} N - S \neq \varnothing \\ \text{card } (N \cap S) \geqslant 2 \end{cases}$$

Cette traduction n'est pas accessible aux élèves de Sixième et de Cinquième qui ne connaissent pas la différence N — S de N et S. Par contre un exercice à leur portée consiste à faire dessiner le diagramme de Venn de A et de ses sous-ensembles N et S, sachant par exemple que « certains nageurs font du ski » et « tout skieur ne nage pas »

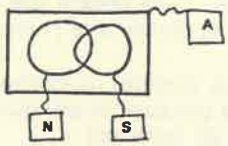


FIG. 3.

2. a) et (conjonction de coordination).

(G) : « Les conjonctions de coordination servent à joindre, soit deux propositions de même nature, soit deux parties semblables d'une même proposition. Ces conjonctions peuvent donc unir des mots, des propositions ou des phrases. »

Parmi les différents sens de la conjonction *et* :

« addition » : « Trois *et* deux font cinq *et* cinq font dix » (Molière).
« adjonction » : « J'ai acheté des cerises *et* des fraises. » Considérons les entiers pairs *et* les entiers multiples de cinq compris entre 1 et 21.

« conséquence » : « J'évite d'être long *et* je deviens obscur. »
« opposition » : « Je plie *et* ne romps pas. »
« énumération » : « Le meunier, son fils *et* l'âne. » Considérons les points A, B *et* C.

Il en est un que l'on privilégie en mathématique, c'est celui de « *à la fois* » ; il est alors placé entre deux propositions ou entre deux attributs. Ainsi, entre deux propositions :

Le triangle ABC est isocèle *et* la mesure de AB est inférieure à celle de BC.

Il pleut *et* j'ai un beau chapeau.

entre deux attributs :

Le climat est doux *et* humide.
a est pair *et* multiple de 3.

Dès la Sixième on est amené à insister sur ce sens de la conjonction « et », en particulier pour définir l'intersection de deux sous-ensembles A et B d'un ensemble E; « et » est alors placé entre les deux attributs « élément de A », « élément de B ». $A \cap B$ est l'ensemble des éléments de E qui ont la propriété d'être « élément de A » *et* « élément de B » c'est-à-dire « élément de A *et* B ». On a ainsi obtenu un nouvel attribut.

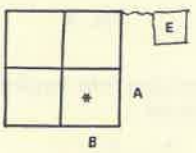


diagramme de Carroll

FIG. 4.

Au niveau des propositions, on peut préparer les enfants à recevoir des rudiments de logique par des tables de vérité du genre :

il pleut	je porte mes lunettes	il pleut *et* je porte mes lunettes
vrai	vrai	vrai
vrai	faux	faux
faux	vrai	faux
faux	faux	faux

2. b) ou (conjonction de coordination).

(R) : « Conjonction disjonctive, qui unit des termes, membres de phrases ou propositions ayant même rôle ou même fonction mais sépare les idées. »

Ne nous attardons pas sur les « *ou* » signifiant :

« c'est-à-dire, ou encore, en d'autres termes » :

Cinna *ou* la clémence d'Auguste

$\frac{6}{3}$ *ou* 2

« peut-être » : il a cueilli cinq *ou* six fleurs

...

puisque les sens privilégiés en mathématique sont ceux de la *disjonction inclusive* et de la *disjonction exclusive :*

« La douceur *ou* la violence en viendra à bout » (*ou* exclusif)
« Il faut qu'une porte soit ouverte *ou* fermée » (*ou* exclusif)
« Celui qui arrive en retard *ou* qui oublie sa convocation n'est pas admis à composer » (*ou* inclusif)
« L'idée gravée en moi, que Madame Swann, *ou* son mari, *ou* Gilberte, allaient entrer... »

Remarquons *le pluriel du verbe* qui indique que le *ou* est *inclusif* dans cette phrase de Proust.

(R) : « Lorsque les sujets joints par « ou » sont de la même personne le verbe se met au singulier ou au pluriel selon que l'esprit s'attarde à l'idée de disjonction ou à celle de coordination. »

Ma sœur *ou* mon frère viendra (*ou* exclusif)

En français c'est le contexte qui permet de dire d'un « ou » s'il est inclusif ou exclusif. En mathématique, ou plutôt en logique, on distingue indépendamment du contexte les deux « ou ». Ainsi on obtient les deux tables de vérité :

il pleut	je porte mes lunettes	il pleut *ou* (inclusif) je porte mes lunettes
v	v	v
v	f	v
f	v	v
f	f	f

il pleut	je porte mes lunettes	il pleut *ou* (exclusif) je porte mes lunettes
v	v	f
v	f	v
f	v	v
f	f	f

En Sixième le « ou inclusif » s'introduit au niveau des attributs au moment de la définition de la réunion de deux sous-ensembles A et B d'un ensemble E. $A \cup B$ est l'ensemble des éléments de E qui sont éléments de l'un au moins des ensembles A et B, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de E qui ont la propriété d'être « élément de A ou (inclusif) de B ».

A vrai dire, on peut se dispenser de soulever cette difficulté dès la Sixième en disant que $A \cup B$ est l'ensemble des éléments de E qui sont, soit « élément de A », soit « élément de B », soit « élément de $A \cap B$ ».

Le « ou inclusif » ne se conçoit bien que lorsqu'on l'oppose au « ou exclusif » qui correspond, lui, à la différence symétrique de deux ensembles; or cette dernière n'est au programme ni en Sixième, ni en Cinquième; pour notre part nous avons jugé indispensable de traiter cette notion en Cinquième, puisque les deux « ou » sont au programme.

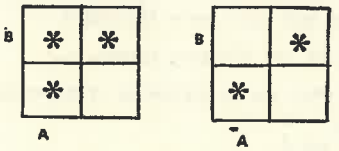


FIG. 2.

Pour le « ou inclusif » nous avons employé la notation ou, pour le « ou exclusif » (i)
la notation ou, notations provisoires puisqu'en Quatrième nous introduirons v et w (e)
(pour *et*, ∧).

Nous avons jusqu'ici toujours distingué les deux « ou » et il sera temps l'an prochain, en Cinquième, d'apprendre qu'*en mathématique un « ou » dont on ne précise pas qu'il est exclusif, est inclusif.*

A propos de la réunion de deux ensembles et des conjonctions « et » et « ou », signalons que les enfants disent volontiers que les éléments de $A \cup B$ sont les éléments de A *et* ceux de B. Ce « et » signifiant l'adjonction (voir plus haut), ils n'ont pas tort, encore faut-il leur faire remarquer qu'ils définissent ainsi $A \cup B$ en extension et non en compréhension; leur « et » porte sur les éléments et non sur les propriétés qui caractérisent ces ensembles.

3. a) La négation.

C'est sur le verbe, et non sur l'attribut, que porte la négation en français. La négation de la proposition « le chapeau est bleu » est « le chapeau n'est pas bleu ». Si on sait que le chapeau n'est pas bleu, on peut seulement répondre — non — à la question : « Le chapeau est-il bleu? », on ne sait pas répondre à la question : « Le chapeau est-il rouge? »

« La négation n'est qu'une attitude prise par l'esprit vis-à-vis d'une affirmation éventuelle. Quand je dis : « cette table est noire », c'est bien de la table que je parle : je l'ai vue noire, et mon jugement traduit ce que j'ai vu. Mais si je dis : « cette table n'est pas blanche », je n'exprime sûrement pas quelque chose que j'aie perçue, car j'ai vu du noir, et non pas une absence de blanc. Ce n'est donc pas, au fond, sur la table elle-même que je porte ce jugement, mais plutôt sur le jugement qui la déclarerait blanche. Je juge un jugement, et non pas la table (...) Une proposition affirmative traduit un jugement porté sur un objet; une proposition négative traduit un jugement porté sur un jugement. La négation diffère donc de l'affirmation proprement dite

en ce qu'elle est une affirmation du second degré : elle affirme quelque chose d'une affirmation qui, elle, affirme quelque chose d'un objet. » H. BERGSON *(L'évolution créatrice)*.

Le logicien, qui ne se soucie pas des degrés différents des propositions « le chapeau est bleu » et « le chapeau n'est pas bleu », adopte un point de vue simpliste et dit, dans le deuxième cas, « le chapeau est non-bleu ». Il définit un nouvel attribut « non-bleu ». L'utilisation d'une telle expression, qui n'est pas du bon français, permet du moins de fabriquer tous les attributs possibles à partir de p et q attributs respectifs des éléments des sous-ensembles P et Q d'un ensemble E.

Ainsi par exemple :

Q \ P	ensemble	attribut		ensemble	attribut
	$\overline{P}$ (partie complémentaire de P dans E)	non-p		$P \cup Q$ ou $\overline{\overline{P} \cap \overline{Q}}$	p-ou-q (i) non ((non p) et (non q))
	$P \cap Q$ ou $\overline{\overline{P} \cup \overline{Q}}$	p et q non ((non p) ou (non q)) (i)		$\overline{P} \cap \overline{Q}$ ou $\overline{P \cup Q}$	(non p) et (non q) non (p ou q) (i)
	$\overline{P} \cup \overline{Q}$ ou $\overline{P \cap Q}$	(non-p)-ou-(non q) (i) non (p-et-q)		$\overline{P} \cup Q$ ou $\overline{P \cap \overline{Q}}$	(non p) ou q (i) non (p et (non q))
	$P \Delta Q$ ou $\overline{P} \Delta \overline{Q}$	p-ou-q (e) (non p)-ou-(non q) (e)		$\overline{P \Delta Q}$ ...	non (p ou q) (e) ...

Remarquons que parmi les attributs autres que (p-et-q), (p-ou-q), seul (non p) -et-(non-q) peut s'exprimer simplement en bon français : « ni p ni q ».

3. b) Négation d'une formule quantifiée.

1er exemple. On doit savoir reconnaître en Cinquième une relation réflexive et une relation qui ne l'est pas. On reconnaît sur le schéma sagittal d'une relation $\mathcal{R}$ dans E qu'elle est *réflexive* si *tout élément est bouclé*, qu'elle n'est *pas réflexive* si *tout élément n'est pas bouclé*, c'est-à-dire si *un élément au moins de E n'est pas bouclé.*

En seconde, peut-être, on écrira, si G désigne le graphe de $\mathcal{R}$:

$\mathcal{R}$ est réflexive signifie $\forall_E x,\ (x, x) \in G$,
$\mathcal{R}$ n'est pas réflexive signifie $\exists_E x,\ (x, x) \notin G$.

2e exemple. Si l'intersection de deux sous-ensembles A et B de F n'est pas l'ensemble vide, cela s'exprime par :

Il existe au moins un élément de A qui est élément de B ($\exists_A x,\ x \in B$).

Si l'intersection de A et B est l'ensemble vide, cela s'exprime par :

Aucun élément de A n'est élément de B ($\forall_A x,\ x \notin B$).

On voit bien l'importance de la parfaite — aussi parfaite que possible... — assimilation par les élèves de « tout », de « un au moins », de « tout » suivi d'un verbe à la forme négative et de « aucun » accompagné de la négation ne.

(R) : « Lorsque tout est sujet d'un verbe à la forme négative la négation porte sur tout » (et non sur le verbe).

« *Toute* vérité *n'est pas bonne à dire* » *(il y a au moins une vérité qui n'est pas bonne à dire)*.

Tout multiple de 6 est multiple de 3, mais *tout* multiple de 3 *n'*est *pas* multiple de 6.

(G) : « Aucun a étymologiquement la valeur positive de quelque, quelqu'un. Cette valeur positive, il l'a conservée dans des phrases interrogatives ou dubitatives ou (...). »

« Croyez-vous que le pouvoir a aucun charme pour moi? »

(G) : « Le plus souvent *aucun est accompagné de la négation ne :* c'est pourquoi par contagion il a pris la *valeur négative de nul.* »
Avec *aucun* la négation porte sur le verbe.

Aucun homme n'est parfait (il n'existe pas d'homme qui soit parfait).

Pour conclure, on ne peut que souhaiter que le professeur de français et celui de mathématique d'une même classe conjuguent aussi étroitement que possible leurs efforts et que chacun d'eux connaisse les préoccupations de l'autre.

Mauricette LIMOGE
(Lycée Récamier, Lyon).

Quand on enseigne en Sixième, comment ne pas penser à la Cinquième et au Cours Moyen.

De la Maternelle aux Facultés, faisons la chaîne.

Tous ensemble : Oh ! Hisse !