

Une critique sera certainement adressée à ce Bulletin : celui d'avoir effectué un classement très arbitraire des articles qu'il réunit. La critique ne sera jamais plus justifiée que dans ce chapitre 4 où sont réunis des études ou des articles ou des notes illustrant l'un ou l'autre des thèmes qui forment l'essentiel du « programme ». Mais on a dit (et bien dit) qu'il ne fallait pas traiter l'un de ces grands thèmes, les relations par exemple, indépendamment des autres. Nous affronterons donc sans inquiétude l'accusation de confusion.

La réalité est qu'il a bien fallu faire un choix parmi les contributions très variées qui nous ont été adressées. La Rédaction présente ses excuses aux Collègues dont les notes ont été mises en réserve pour d'autres Bulletins.

Trois études...

- 376 M. DUMONT : Notion de partition; intersection; différence symétrique; complémentarité; fonction caractéristique.
 392 M^{me} M. MOTTE : Initiation à la déduction en Sixième et en Cinquième.
 402 J.-M. CHEVALLIER : La physique mathématique en Sixième.

suivies de notes diverses...

- 408 M^{me} CHOUCAN : Jeux avec un alphabet de 4 lettres.
 408 B. DESTAINVILLE : Propriétés de graphes.
 411 LE CLERC DE LA HERVERIE : Commutativité et associativité.
 414 P. JACQUEMIER : Quel jour sommes-nous?
 416 H. BAREIL : Une approche de $(\mathbb{Z}, +)$.
 420 M^{me} CHOUCAN : Symétrie droite.

encore des lettres, encore des bribes

et enfin

- 424 H. BAREIL : Liaisons entre les thèmes.

pour bien affirmer que nous ne préconisons pas un ordre mais que savons apprécier des ordres.

Notions de partition; intersection; différence symétrique; complémentaire; fonction caractéristique

M. DUMONT

Lycée international, Saint-Germain-en-Laye

L'introduction de nouvelles notions dans notre enseignement, introduction rendue nécessaire pour diverses raisons dont l'une, pédagogique, est souvent méconnue, ne peut se faire valablement que par un choix raisonné et une longue expérimentation de pédagogies diverses. Malheureusement, ces notions sont trop souvent retransmises aux élèves, quel que soit le niveau de ceux-ci, sous des formes pratiquement identiques à celles sous lesquelles les maîtres les ont reçues. Or l'élaboration d'une pédagogie concernant ces notions ne peut se faire en un an, voire plusieurs années. Nous assisterons donc, dans les années qui viennent, à une floraison d'ouvrages, de méthodes, de matériels plus ou moins valables. Il importe que chaque maître reste conscient de ce phénomène et sache faire un choix entre des matériels souvent coûteux, parfois insuffisamment analysés et une foule de matériels réalisables en classe, imaginés par le maître lui-même et de ce fait parfaitement adaptés à sa pédagogie.

Remarques préliminaires.

De toute évidence, un matériel ne vaut que par l'usage qu'on en fait. L'essentiel est : 1° d'en connaître les avantages et les inconvénients; 2° de savoir que ceux-ci n'ont pas un caractère absolu mais sont relatifs à un objectif bien déterminé. D'ailleurs, à la limite, un danger décelé à temps peut devenir un avantage pédagogique puisqu'il stimule l'attention, la maintient en éveil du fait de la connaissance de l'existence de ce danger. Inversement, l'absence de danger endort la méfiance, encourage l'automatisme, c'est-à-dire l'inconscience et... risque de devenir un danger sur le plan éducatif. C'est donc au maître et à lui seul que revient le choix d'un matériel, d'une stratégie adaptés à sa classe, à son style d'enseignement.

Il est absurde de croire qu'une notion puisse être analysée définitivement à un niveau donné et être utilisée sans autre analyse dans les niveaux supérieurs. C'est pourtant ce que la lecture de nos programmes (automatismes exclus) laisse à penser. Une étape préliminaire de familiarisation facilite toujours l'analyse d'une notion. Cette première analyse, d'ailleurs, peut et doit être reprise et approfondie au fur et à mesure que la familiarisation est meilleure. Cette familiarisation, trop souvent confondue avec une activité inconsciente, c'est-à-dire un automatisme, consiste à se trouver en présence de situations variées contenant ou ne contenant pas le concept à étudier, et à agir sur ces situations. C'est au cours de ces diverses activités que l'on prend conscience d'une similitude de démarches dues à la présence du concept et c'est seulement à partir de cet instant que l'on peut tenter un début d'analyse, puis, plus tard, de formalisation.

Les situations présentées à l'élève peuvent appartenir à deux classes différentes :

1° Une classe de situations naturelles, extraites du champ d'expérience de l'élève. Ces situations ont un énorme avantage : d'une part elles fournissent une motivation quasi certaine aux activités, d'autre part elles permettent des transferts indispensables pour assurer une bonne compréhension. Mais ces situations ont un inconvénient d'ordre scolaire : appartenant souvent à des domaines extrascolaires, l'élève ne peut agir directement sur elles, soit pour des raisons d'encombrement, soit parce qu'elles sont éphémères. Son action n'a lieu que sur une description de ces situations et exige déjà un certain stade de formalisation.

2° Une classe de situations artificielles, conçues par le maître non pour isoler le concept mais pour permettre une activité réelle précédant avant toute chose la description. C'est à cette classe qu'appartient le matériel décrit plus loin. Une telle situation a en outre l'avantage suivant : ses objets n'ont pas de valeur sémantique et peuvent représenter les objets d'une situation réelle ayant même structure. C'est en quelque sorte la matérialisation de la structure commune aux situations de la première classe.

L'étude unique d'une telle situation est évidemment dangereuse puisqu'elle ne permet pas les transferts. Si l'on crée d'autres situations artificielles de même structure, alors leurs objets prennent une valeur sémantique et l'avantage obtenu sur le plan des transferts est un inconvénient sur le plan de la formalisation. Un autre moyen de provoquer les transferts est de choisir une situation artificielle suffisamment riche, pour que l'on puisse présenter à l'élève des « sous-situations » extraites de la précédente, ce qui présente un double avantage : 1° permettre des transferts; 2° habituer à restreindre, élargir ou varier l'univers dans lequel il travaille.

Un concept pris isolément n'a pas grande signification. C'est toujours par rapport à d'autres concepts ou mieux par rapport à une ou des structures bien déterminées qu'il prend son caractère propre. Il en est ainsi du concept « ensemble ». La prise de conscience de ce concept ne peut se faire que dans des structures assez riches qui feront sentir la nécessité de ce concept. Trop souvent nous voulons définir un ensemble avant d'avoir provoqué ce besoin de penser aux ensembles. Puis, presque immédiatement, nous voulons analyser les diverses définitions : en extension (liste exhaustive des éléments), en compréhension (citation d'une propriété commune aux éléments et à eux seulement), et autres modes (citation d'une loi de construction des éléments par exemple une loi de récurrence), etc. Et l'on est ainsi conduit inévitablement aux symbolisations maintenant classiques $a \in \{a, b, c, d\}$ ou $a \in \{x : \mathcal{F}(x)\}$ si $\mathcal{F}(a)$ est vraie, et combien dangereuses sur le plan pédagogique à ce premier stade.

Il s'ensuit que nous ne pouvons proposer aux élèves, à ce niveau, que des exercices de définition, de symbolisation dans lesquels il n'y a pratiquement aucune autre activité que cette symbolisation. Cette activité, cette analyse, se fait ainsi sous la contrainte du maître alors qu'elle devrait se faire, *a posteriori*, sous la pression des expériences.

La plupart des activités humaines extra-scolaires ou scolaires peuvent se ramener, entre autres, aux types suivants :

- 1° Organisation (d'objets, d'activités, de souvenirs, etc.).
- 2° Invention, c'est-à-dire combinatoire.
- 3° Décision ou choix.
- 4° Description ou expression.
- 5° Simulation ou répétition.

Ce dernier type de problèmes est évidemment sur le plan éducatif le plus dangereux tout en restant important sur un certain plan social. C'est presque uniquement ce type d'activité que nous développons consciemment ou non chez nos élèves. En fait, chaque type d'activités fait intervenir d'autres types : par exemple un problème de description fait intervenir des activités d'organisation, d'invention, de choix, de répétition au niveau du discours.

Mais pour susciter un besoin d'organisation chez l'élève, il faut le mettre devant des situations suffisamment riches pour que ce besoin se fasse sentir.

Construction ou présentation du matériel.

Toutes ces raisons, parmi d'autres, ont provoqué le choix du type de matériel décrit ci-dessous, matériel qui n'a rien d'original et se situe dans la lignée des blocs logiques de Dienes.

Les élèves sont invités à découper dans du carton 120 objets ayant :

- 1° l'une des 5 formes suivantes : disque, carré, triangle, fer de lance, hexagone, notées respectivement D, C, T, F, H, leur ensemble étant noté \mathcal{F} ;
- 2° l'une des 4 couleurs : rouge, jaune, vert, bleu R, J, V, B, leur ensemble étant noté \mathcal{C} ;
- 3° l'une des 3 tailles : diamètre ou côté 8, 5, 3 centimètres, notées G, M, P, leur ensemble étant noté \mathcal{G} ;
- 4° l'une des 2 marques suivantes : non barré d'une croix, barré d'une croix, notées 0,1, leur ensemble étant noté \mathcal{M} .

L'ensemble des 120 objets ou univers sera noté \mathcal{U} , mais il est bien évident que ces notations n'interviendront devant les élèves que lorsqu'elles seront nécessaires. Il importe dans un tel choix de ne pas utiliser : 1° des objets pour lesquels la terminologie usuelle sera en contradiction avec une terminologie ultérieure (par exemple la « forme » d'un objet dépend de son épaisseur, de son aspect « intérieur » aussi bien qu'« extérieur », etc.); 2° une organisation qui sera en contradiction avec des organisations ultérieures et pourtant attachées à un même vocabulaire (par exemple présenter l'ensemble des carrés et l'ensemble des rectangles comme disjoints alors que plus tard il faudra prendre conscience qu'un carré a toutes les propriétés d'un rectangle, donc est un rectangle particulier, et présenter alors l'ensemble des carrés comme une partie de l'ensemble des rectangles).

Ce seul exercice de découpage exige déjà une organisation implicite de l'Univers, permettant de choisir un ordre de description, puis un ordre de découpage. Par conséquent, il appartient à une classe d'exercices déjà faits par l'élève et consistant : 1° à construire des « arbres »; 2° à jouer sur des « claviers » (en fait, définir en extension des produits d'ensembles). Rappelons ce genre d'exercices à propos de cet exemple particulier :

a) Un ordre est choisi entre les claviers, et parallèlement entre les « étages » de l'arbre :

1 ^{er} clavier	1 ^{er} étage	les formes
2 ^e »	»	les couleurs
3 ^e »	»	les tailles
4 ^e »	»	les marques

Cet ordre étant arbitraire.

b) Un ordre est choisi entre les « touches » de chaque clavier, entre les branches de chaque étage, par exemple l'ordre adopté dans la description au paragraphe ci-dessus.

Ceci étant fait, l'élève « tape » sur une touche de chaque clavier et dessine : a) les différents chemins entre les touches des claviers; b) l'arbre ou une partie de l'arbre sur lequel il chemine. Ceci revient à définir en extension les éléments des

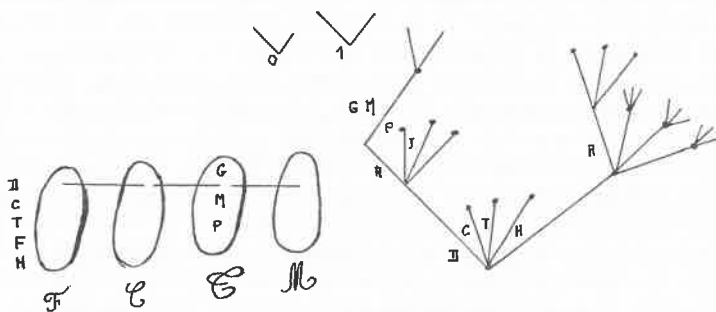


Schéma visiblement très incomplet; si le lecteur veut bien repasser en rouge une suite de choix sur l'arbre, il traduira celle-ci par une suite de flèches sur le diagramme sagittal, à gauche.

FIG. 1.

ensembles produits \mathcal{F} , $\mathcal{F} \times \mathcal{C}$, $\mathcal{F} \times \mathcal{C} \times \mathcal{T}$, $\mathcal{F} \times \mathcal{C} \times \mathcal{T} \times \mathcal{M}$, c'est-à-dire des couples, des triplets, des quadruplets de propriétés. Dans cette étape de construction de l'univers, le seul ensemble qui nous intéresse est le dernier. Il importe de remarquer qu'un ensemble produit d'ensembles est *a priori* non ordonné. C'est la nécessité de définir en extension cet ensemble, c'est-à-dire de distinguer les objets, de les désigner successivement, qui impose le choix d'un ordre entre les éléments de chacun des ensembles facteurs. Par contre, le choix d'un ordre entre les ensembles facteurs est indispensable au concept de produit d'ensemble. Si tel était notre objectif, alors il faudrait immédiatement proposer de meilleures situations. Car ici le choix d'un autre ordre, par exemple $\mathcal{C} \times \mathcal{M} \times \mathcal{T} \times \mathcal{F}$, nous conduit au même univers, ce qui met déjà en évidence le danger de confusion entre l'univers \mathcal{U} des 120 objets et l'ensemble produit $\mathcal{F} \times \mathcal{C} \times \mathcal{T} \times \mathcal{M}$.

Premiers inventaires.

L'Univers \mathcal{U} étant ainsi construit, la seconde étape consiste à inventorier cet univers. Les élèves sont invités à disposer sur leur table les 120 objets répartis en 5 tas (formes), puis en 4 tas (couleurs), 3 tas (tailles), 2 tas (couleurs). Chaque partition étant réalisée matériellement, les élèves la dessinent alors sur leur cahier en la schématisant : par exemple, chaque « objet » est représenté par un point.

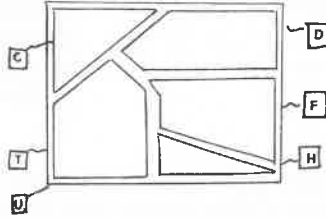


FIG. 2.

Des « étiquettes » (*) sont alors accrochées aux « tas » et à la « caisse », ce qui donne alors l'occasion de prendre conscience de l'imprécision de mots tels que « forme ». Qu'est-ce qu'une forme, sinon une classe d'une certaine partition de l'univers ?

Or, sur le dessin ci-dessus une erreur a été commise à propos des étiquettes, erreur fondamentale : laquelle ? Si U représente l'ensemble des 120 objets, il est absurde de désigner par la même étiquette le « meuble » à « 5 tiroirs » contenant les 120 objets, c'est-à-dire la partition en 5 classes. Mais cette erreur n'apparaît que lorsque nous comparons le meuble à 5 tiroirs, le meuble à 4 tiroirs, puis à 3 tiroirs, puis à 2 tiroirs. C'est seulement à ce moment que nous sentons la nécessité de distinguer ces différents meubles, ou partitions notées U_1, U_2, U_3, U_4, U_5 (U_1 est un ensemble de 5 éléments tiroirs, tas ou classes, \mathcal{U} est un ensemble de 120 éléments ; il faut alors remplacer sur le dessin précédent \mathcal{U} par U_1).

Une seconde erreur est presque inévitablement commise au cours des deux étapes. Il arrive que les élèves ou le maître ont besoin de nommer l'un des 120 objets, par exemple le carré, vert, grand et marqué d'une croix. La tentation est alors grande d'accrocher des étiquettes à chacun des 120 objets, par exemple pour l'objet précédent (CVQ1). C'est en effet l'un des codages utilisés pour désigner les chemins de l'arbre ou des claviers. Le danger d'un tel codage est évident si on ne l'aborde pas au grand jour, d'où alors les activités suivantes.

Inventaires plus « fins ».

Certains élèves ont l'idée de répartir leurs 120 objets en plus de 5 tas. Par exemple, ils le transportent dans 10 enveloppes, mais ces tas ne respectent pas nécessairement l'homogénéité des ensembles (ainsi, carrés rouges et jaunes, carrés verts et bleus, disques rouges et jaunes, disques verts et bleus, etc., pourquoi ne pas réunir les rouges et verts ?). Comment alors répartir les objets en 10 tas sans faire d'envieux parmi les

(*) N.D.L.R. — Excusez l'imperfection des dessins réalisés trop hâtivement : ici les étiquettes sont mal attachées.

formes, les couleurs, les tailles, les marques. On aboutit ainsi à la partition suivante U_6 en 10 classes notées provisoirement C0 (carrés non marqués), D1 (disques marqués), etc.

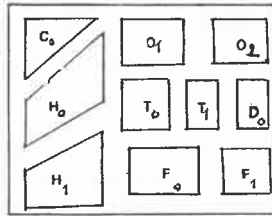


FIG. 3.

Ce problème conduit évidemment aux autres partitions utilisant 2 des 4 propriétés, par exemple : forme et couleur (20 classes), forme et taille (15 classes), couleur et taille (12 classes), etc., puis aux partitions utilisant 3 des 4 propriétés, par exemple : forme, taille, marque (30 classes). Finalement, les élèves réalisent manuellement sur la table toutes les partitions suivantes en 5, 4, 3, 2, 20, 15, 10, 12, 8, 6, 60, 40, 30, 24, 120 classes.

Deux remarques s'imposent :

1° Il ne faudrait pas, arrivés là, que les élèves croient qu'il n'y a pas d'autres partitions possibles. Il est donc indispensable de leur suggérer de répartir au hasard leurs 120 objets dans les 7 tiroirs d'un meuble par exemple. Ce faisant ils n'utilisent pas les propriétés précédentes. Mais comment alors désigner les objets? Par leurs qualités? Cette solution naturelle doit être retenue, mais seulement un temps : le temps de la réflexion. Voici pourquoi.

2° Lorsque les élèves ont dessiné les partitions, ils ont accroché à chaque classe (tiroir ou tas) une étiquette rappelant les propriétés utilisées (exemple : CRM représente la classe des objets carrés, rouges, moyens). Lors du dessin de la partition en 120 classes, ils ont ainsi désigné par l'étiquette DVPO une certaine classe. Mais cette classe ne contient qu'un objet. D'où alors la tentation de donner le nom de la classe à l'objet unique qu'elle contient. Il est temps de compenser ce cas particulier par un autre.

(Problème analogue aux problèmes de repérage.)

Enrichissement et codage des « éléments » de l'univers.

On décide alors de désigner chaque objet par un mot de deux lettres, une lettre, une voyelle, et pour unifier le vocabulaire dans la classe on choisit un ordre sur les 2 claviers de lettres, un ordre sur chacun des 4 claviers de qualités et une

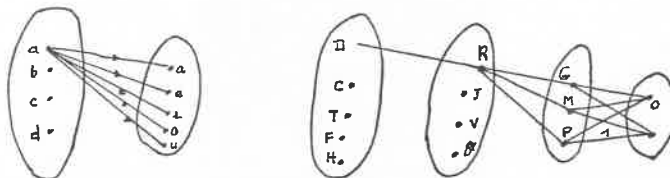


FIG. 4.

application de l'ensemble de couples de lettres dans l'ensemble des quadruplets.

$aa \mapsto \text{DRG0}$	$ao \mapsto \text{DRM1}$
$ae \mapsto \text{DRG1}$	$au \mapsto \text{DRP0}$
$ai \mapsto \text{DRM0}$	$ba \mapsto \text{DRP1}$

etc. Cette application n'est autre que la relation d'appartenance. Exemple : aa appartient à la classe DRG0 .

Les élèves dressent alors un véritable dictionnaire qui leur permettra par la suite de retrouver plus aisément les objets. (Cette application fournira plus tard un premier exemple d'application croissante ou décroissante suivant les ordres utilisés.) Mais l'ensemble des mots de deux lettres comporte 130 éléments d'où la tentation de fabriquer alors 10 objets supplémentaires désignés par les 10 derniers mots et ayant certaines des propriétés précédentes.

Cette fois la partition du nouvel univers U^0 des 130 objets en 120 classes ne nous permet plus de confondre le nom des classes avec le nom des objets puisque certaines classes contiendront 2 ou même 3 objets. Chaque classe peut ainsi être désignée, soit par le nom de l'attribut (DRM1 par exemple), soit par la liste des noms propres des objets qu'elle contient, liste qui peut être réduite à 1 seul élément. Nous avons là une occasion de faire distinguer un langage en extension d'un langage en compréhension sans définir ces mots. On peut alors se demander s'il ne serait pas bon que certaines de ces classes soient vides. Mais ce matériel trop riche est conçu pour que l'on travaille sur des sous-univers. Il sera donc possible par la suite de désigner des sous-univers où les partitions à l'aide de propriétés conduisent à des classes vides. (Attention! le mathématicien n'utilise le mot partition que pour désigner un ensemble de classes disjointes et *non vides*, dont la réunion soit l'univers.)

Remarque : On peut penser qu'à ce stade et bien que l'inclusion n'ait pas encore été abordée, il soit possible de demander aux enfants de comparer les diverses partitions afin de constater par exemple que le couple des partitions U_1 et U_2 (5 classes d'après les formes et 4 classes d'après les couleurs) n'a pas le même aspect que le couple U_1, U_6 par exemple (5 classes d'après les formes et 10 classes d'après les formes et marques). Pour ce dernier couple, U_6 est plus fin que U_1 , c'est-à-dire chaque classe de U_6 est incluse dans une classe de U_1 . Mais il est sans doute prématuré d'aborder l'analyse du treillis des partitions. Disons cependant qu'au cours de l'activité de classification, certains enfants ont fort bien compris que pour obtenir une partition en 20 classes, ils pouvaient utiliser d'abord la partition en 5 classes d'après les formes, puis partager chaque classe en 4 d'après les couleurs ou inversement. Ceci est important car il y a en germe la notion de structure quotient. Certains dessins ont d'ailleurs été ainsi réalisés et ont permis d'attirer l'attention des enfants sur le fait suivant :

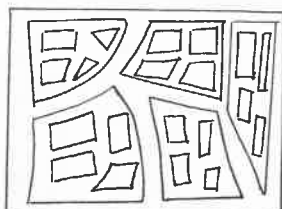


FIG. 5.

Cet ensemble n'est pas la partition U_7 de l'univers U^0 des 130 objets en 20 classes, mais une partition en 5 classes de la partition précédente, c'est-à-dire une partition en 5 classes de l'ensemble U_7 des 20 classes.

Définition en extension, en compréhension. Parties complémentaires.

Le matériel ayant été ainsi exploré globalement, on choisit pour une première étude un sous-univers U' plus maniable que l'on pourra changer plus tard : par exemple un sous-univers défini en compréhension (par exemple ensemble de tous les objets ayant la propriété suivante : (C ou D) et (R ou V) et (G ou M ou P) et (0 ou 1), ce qui permet de répéter le travail précédent à un niveau moins riche.

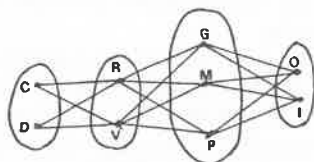
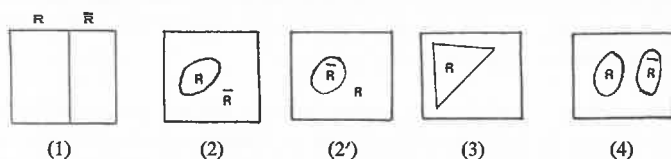


FIG. 6.

Mais d'emblée, cette fois, certaines des classes obtenues auront plus de 1 objet. Par exemple nous aurons 27 objets répartis dans les 24 classes de la partition la plus fine obtenue à l'aide des propriétés précédentes. Ce sous-univers sera isolé et utilisé pendant plusieurs leçons.

Première étape. — L'élève est invité à disposer le sous-univers sur une feuille de papier et à le séparer en 2 classes, de diverses façons, et à dessiner à chaque fois la partition correspondante en entourant directement sur la feuille les 2 tas d'objets (par exemple G et \bar{G} , grands et non grands, C et \bar{C} , carrés et non carrés, R et \bar{R} , rouges et non rouges, etc.). Il est important de penser à toutes les suggestions possibles d'un dessin.



Sur chaque dessin, on a représenté R sous-ensemble des rouges de U' et \bar{R} sous-ensemble des non-rouges de U' . En (3), on peut représenter \bar{R} par un contour d'une autre couleur dans « l'espace » laissé libre dans U' par R .

FIG. 7.

Ainsi le dessin (1) (diagramme de Carroll) suggère un équilibre entre les deux sous-ensembles, c'est-à-dire entre les deux propriétés dont l'une est la négation de l'autre, alors que le dessin (2) (diagramme de Venn) suggère la prépondérance du sous-ensemble central R . Pour rétablir, on peut évidemment faire un deuxième dessin (2') où l'on intervertira R et \bar{R} . Dans un problème où l'ensemble complémentaire n'a pas d'intérêt, le diagramme de Venn paraît plus naturel. Mais pour des raisons d'éducation logique il est préférable d'utiliser un diagramme type Carroll. Par exemple l'étude

des objets « non-moyens » peut être intéressante et le fait d'utiliser la négation pour désigner cette propriété ne doit pas faire peser sur elle une sorte de déconsidération.

Pédagogiquement, c'est le dessin du type (3) qui paraît le mieux convenir car il a les avantages simultanés de (1) et (2). En effet, les dessins (1) et (2) nous obligent à placer l'étiquette des parties à l'intérieur de celle-ci, d'où une confusion et gêne lorsqu'on placera les étiquettes des éléments de ces parties. Sur le dessin (1) on ne peut symboliser une ficelle attachant l'étiquette R à la partie car le contour de R et de U' se confondent tandis que sur le dessin (4) le point d'attache des ficelles est nettement distingué puisque les contours sont séparés. En outre, les élèves ont naturellement tendance à faire un dessin du type (4). Celui-ci est bon mais a un grave inconvénient : il suggère mal la complémentarité. L'espace entre les deux parties nous invite à y placer des objets. Au prix d'une légère convention, on adopte le dessin (3). L'importance de ces dessins décroît d'ailleurs au fur et à mesure que la compréhension est meilleure (*).

Parallèlement au dessin, les élèves dressent à chaque fois la liste des noms propres des éléments de chacune des deux parties (exemple $R = \{a, am, an, \dots, \text{etc.}\}$).

L'écriture de ces listes devenant très vite fastidieuse, on adopte la disposition en tableau. La liste des éléments de U est copiée une seule fois. Pour chaque partie il suffit de répondre par oui ou par non en face de chaque élément : oui si l'élément appartient à cette partie, non dans le cas contraire.

U	R	\bar{R}	G	\bar{G}	etc.
aa	0	1	1	0	
ab	0	1	1	0	
ac	0	1	0	1	
ad	0	1	0	1	
ae	1	0	1	0	

Très vite d'ailleurs les élèves adoptent les conventions des 1 et 0. Pourtant beaucoup par paresse ou par des habitudes malheureusement répandues négligent d'écrire les 0, c'est-à-dire adoptent la convention supplémentaire : « absence de réponse équivaut à réponse négative », ce qui est évidemment commode mais absurde lors des échanges d'information, car on ne saura jamais s'il s'agit d'un oubli, volontaire ou non, ou d'une réponse négative.

Deuxième étape. — Ceci nous amène alors à définir de nouvelles parties en extension. On donne la liste des éléments de A, l'élève sépare alors son univers en deux classes A et \bar{A} , dessine la partition et établit la liste des éléments de \bar{A} . On propose ainsi de nouvelles partitions B et \bar{B} , C et \bar{C} , etc., mais en prévoyant les cas particuliers : par exemple $A \cap B$ est non vide, C est inclus dans \bar{A} , etc., que l'on utilisera par la suite.

Remarques. — a) Il importe de bien s'assurer que lorsque l'élève dessine, il comprend ce qu'il dessine car les techniques de dessin comme les techniques de calcul finissent par devenir inconscientes. C'est la raison pour laquelle : 1° les élèves disposent

(*) *N.D.L.R.* — On peut aussi utiliser un diagramme de CARROLL (1) avec la convention : les éléments de R à l'ouest, ceux de \bar{R} à l'est.

les objets sur une feuille blanche et dessinent directement sur cette feuille; 2° dressent les listes; 3° complètent le tableau des 1 et 0.

b) Dans toutes ces activités l'élève prend conscience de ce que signifie partie complémentaire « partie qui complète », mais il est extrêmement important de lui donner le plus tôt possible le sentiment que ce fait dépend de l'univers choisi. On peut alors choisir un autre sous-univers U'' contenant U' et faire constater que la partie \bar{A} qui complète A dans U' n'est pas là même que la partie \bar{A}'' qui complète A dans U'' . La notation $\bar{\bar{A}}$ paraît alors illogique et on peut à ce moment lui préférer la notation $\bigcup_{U'} A$, mais celle-ci est trop lourde à manier et les enfants préfèrent la première notation.

Mais avant d'aborder des changements de sous-univers on peut préférer l'étude de l'intersection, réunion, etc., d'où les activités suivantes :

Intersection; réunion; différence symétrique.

a) L'élève est invité à disposer sur une feuille le sous-univers U' et à séparer les sous-ensembles A et B par exemple précédemment définis en extension. Il découvre que ceci est impossible puisque A et B ont des éléments communs d'où l'idée de « mélanger le moins possible » les objets de A et ceux de B (c'est-à-dire en fait de constituer une partition plus fine que la partition A, \bar{A} , et plus fine que la partition B, \bar{B}). L'élève est naturellement porté à constituer un tas spécial ne contenant que les objets communs A et B . Il dispose alors 4 piles d'objets sur la feuille et dessine les contours de A, \bar{A}, B, \bar{B} avec leurs étiquettes attachées aux contours par exemple en rouge A , rouge pointillé \bar{A} , vert B , vert pointillé \bar{B} . C'est l'instant d'introduire les étiquettes $(A \cap B), (A \cap \bar{B}), (\bar{A} \cap B), (\bar{A} \cap \bar{B})$ que les élèves écrivent sur des papiers et disposent sur les 4 tas.

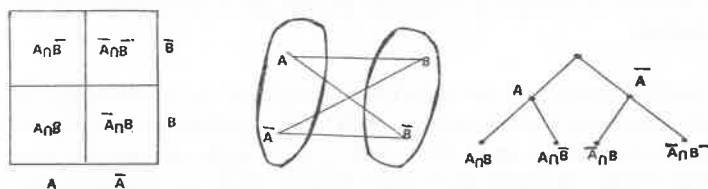
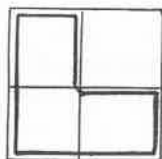


FIG. 8.

Remarques. — 1° L'idée essentielle ici est de montrer comment deux partitions en deux classes « engendrent » une partition en quatre classes.

2° A ce stade on peut avoir l'idée de répéter les mêmes exercices avec 2 sous-ensembles définis cette fois en compréhension (par exemple G, \bar{G}, R, \bar{R} ; grands, non grands, rouges, non rouges) ou bien l'un défini en extension, l'autre en compréhension. Mais il semble préférable de présenter d'emblée et simultanément l'intersection, réunion, différence symétrique, afin de mieux les opposer et ainsi faciliter la distinction des concepts.

b) C'est pourquoi lorsque chacune des quatre piles ($A \cap B$), ($A \cap \bar{B}$), etc., a été constituée, étiquetée, lorsque le dessin a été fait, il est assez naturel de revenir au problème des partitions en 2 classes. Quel est le complémentaire de ($\bar{A} \cap \bar{B}$), ($A \cap \bar{B}$), etc.? D'où l'idée de réunir A et B , A et \bar{B} , \bar{A} et B , \bar{A} et \bar{B} . A chaque fois les élèves rapprochent 3 piles suffisamment pour donner l'idée d'un seul sous-ensemble, mais sans les mélanger afin de pouvoir distinguer encore les ensembles A , B ; puis ils dessinent sur la feuille-support le contour du nouvel ensemble désigné par l'étiquette $A \cup B$, d'où les 4 dessins analogues à celui-ci :



$A \cup B$

FIG. 9.

Le tableau des 1 et 0 est alors complété par 4 nouvelles colonnes représentant les 4 nouvelles parties $A \cup B$, $A \cup \bar{B}$, $\bar{A} \cup B$, $\bar{A} \cup \bar{B}$.

Remarque. — On pourrait, à ce stade, changer d'univers et s'assurer que les concepts de réunion et intersection ont été compris à l'aide d'exercices analogues permettant des transferts, mais il semble préférable d'introduire dès maintenant un concept un peu dédaigné dans l'enseignement élémentaire : celui de différence symétrique. Ce concept est pourtant très important pour la suite puisqu'il permet d'ériger une structure de groupe et même d'espace vectoriel sur n'importe quel ensemble et par là de permettre d'exprimer en langage algébrique clair certains problèmes d'ordre combinatoire. En outre, pédagogiquement, la juxtaposition de plusieurs concepts (intersection, réunion, différence symétrique) dont les traductions en langue usuelle sont très voisines et souvent confondues permet des comparaisons et facilite ainsi leur distinction.

c) Les élèves constatent sur la partition en 4 classes qu'en réunissant ces 4 classes 3 par 3, on obtient les 4 réunions ($A \cup B$, $A \cup \bar{B}$..., etc.) en les réunissant 2 par 2 on obtient les 4 intersections ($A \cap B$, $A \cap \bar{B}$..., etc.), mais ce faisant 2 paires ont été omises, d'où l'idée de réunir les 2 piles d'objets situés en diagonale sur le dessin. Il est alors difficile de dessiner les contours des nouveaux ensembles car la partition en 2 classes complémentaires n'apparaît plus.

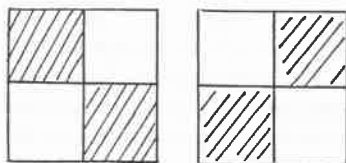


FIG. 10.

C'est à un tel moment qu'apparaît l'utilité d'un autre mode d'expression, comme le tableau des 1 et 0 (c'est-à-dire les fonctions caractéristiques des ensembles). La langue usuelle permet une explication plus aisée que dans le cas de la réunion : « ensemble des objets qui sont dans l'un et ne sont pas dans l'autre », d'où le calcul aisé des 1 et 0. Des étiquettes pour les nouveaux ensembles sont introduites du type $(A \Delta B)$. Effectivement, cette opération semble plus facile aux élèves que la réunion. Malgré le pouvoir suggestif du dessin, un grand nombre d'élèves ont alors tendance à disposer 4 colonnes dans le tableau $(A \Delta B)$, $(A \Delta \bar{B})$, $(\bar{A} \Delta B)$, $(\bar{A} \Delta \bar{B})$. Le calcul des 1 et 0 leur montre que certaines colonnes sont identiques. C'est la première fois qu'ils rencontrent 2 étiquettes différentes pour désigner le même ensemble, d'où l'introduction du signe = avec un sens correct $A \Delta B = \bar{A} \Delta \bar{B}$ et $\bar{A} \Delta B = A \Delta \bar{B}$. Ces remarques évidentes sur le dessin peuvent donner lieu à un jeu logique à l'aide de la langue usuelle : « appartenir à l'ensemble de gauche et ne pas appartenir à l'ensemble de droite » pour la première étiquette équivaut à « ne pas appartenir à l'ensemble de gauche et appartenir à l'ensemble de droite » pour la deuxième étiquette. Mais on peut évidemment réserver pour plus tard ces exercices de logique qui sont des exemples d'activité dans un groupe de KLEIN.

Finalement les élèves remplissent 10 colonnes du tableau : 4 intersections, 2 différences symétriques et 4 réunions, et font 5 dessins : l'un où sont visibles A , \bar{A} , B , \bar{B} et les 4 intersections et les 4 autres réservés chacun à une réunion et sa partie complémentaire (le dessin des différences symétriques étant abandonné).

De tels exercices sont répétés sur des sous-ensembles divers toujours définis en extension et choisis de telle sorte qu'aucun qualificatif de la langue usuelle ne puisse leur être attribué afin d'éviter les reminiscences d'expressions ambiguës. C'est seulement après s'être assuré que l'élève distingue correctement les concepts que l'on introduira les définitions en compréhension. Celles-ci sont indispensables afin de souligner les insuffisances de la langue usuelle (conjonctions et, ou, soit), mais ceci ne peut se faire que si les notions ont été comprises *indépendamment du langage*. Il est en effet fondamental d'apprendre à distinguer les concepts de réunion, intersection avec autre chose que la langue usuelle, puisque c'est celle-ci qui introduit les confusions. Une fois ces concepts distingués à l'aide du matériel, alors l'ambiguïté des conjonctions apparaîtra clairement.

Au cours de ces exercices les élèves parviennent à se dégager peu à peu de l'activité sur le matériel. Ils finissent par découvrir qu'ils peuvent « calculer » les 12 colonnes du tableau (\bar{A} , \bar{B} et les 10 précédentes) en ne connaissant que l'univers, A et B . Le fait d'avoir dessiné directement sur la feuille portant le matériel leur permet par la suite de refaire les dessins suggérant la situation sans avoir à manipuler les objets, tâche vite fastidieuse.

Remarques. — 1° Il est important que l'élève ait à sa disposition plusieurs moyens d'expression, dessins, tableaux, afin de contrôler qu'il ne s'agit pas d'une technique gratuite retenue par cœur sur un seul mode d'expression. C'est ainsi que l'on peut demander de « calculer » les éléments de chacune des colonnes du tableau et après de placer sur le dessin les points et noms représentant les éléments de l'univers. Il est important aussi de désigner les sous-ensembles par des lettres variées C , R ou \bar{H} et \bar{Q} , toujours afin de provoquer chez l'élève le besoin de prendre conscience de son activité.

2° Il est aisé de contrôler rapidement la compréhension en donnant par la suite

des univers variés mais commodes (par exemple une liste de 10 verbes, G l'ensemble des verbes du 3^e groupe, \bar{I} l'ensemble des verbes ne contenant pas la lettre i). Les élèves doivent remplir les colonnes $G \cap \bar{I}$, $G \cup \bar{I}$, $G \Delta \bar{I}$ et placer correctement les 10 verbes sur un dessin.

3° Il serait catastrophique de faire apprendre par cœur une technique de calcul des 1 et 0. C'est la découverte de ces règles par les enfants eux-mêmes qui provoquera une véritable compréhension des concepts. Des expériences au niveau des adultes confirment cette idée. L'emploi de ces règles risquant de devenir inconscient, le recours au dessin permettra si besoin est, de contrôler s'il n'y a pas eu oubli des concepts, (ou vice-versa).

4° En établissant de tels tableaux les enfants recherchent les parties complémentaires et relient par des flèches rouges les étiquettes des colonnes correspondantes, ce qui permet d'une part de calculer plus rapidement dans certains cas, d'autre part de se familiariser avec la loi de De Morgan sans l'avoir apprise verbalement.

5° Dans tous ces exercices, les enfants ont une tendance à compter les objets, ce qui les conduit naturellement à la loi fondamentale : $|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|$ (en notant cardinal $A = |A|$), mais ceci risque au début de perturber l'attention sur les concepts à étudier. Par la suite, au contraire, elle permet un quasi contrôle rapide des calculs.

6° On reconnaît dans ces exercices une préparation à la construction d'une algèbre d'ensembles sur une partition donnée. C'est ainsi qu'on peut faire établir des tableaux à 16 colonnes en y adjoignant l'univers et la partie vide. Mais tel n'est pas l'objectif immédiat d'autant plus qu'avant d'attaquer un treillis au niveau de l'ensemble des parties d'un ensemble donné, il vaudrait mieux l'attaquer au niveau inférieur, c'est-à-dire l'ensemble des parties d'un ensemble donné. Mais ceci sera un autre exemple d'organisation dans les souvenirs de l'élève sans qu'il soit utile ici d'insister sur cette organisation.

Inclusion.

Les exercices précédents seraient dangereux s'ils se limitaient à ces cas particuliers. Il est indispensable de présenter aux élèves des exemples où 2 partitions en 2 classes conduisent à une partition en 3 classes (et non en 4 comme précédemment). On reprend les mêmes activités en choisissant cette fois A et C tels que $C \subset \bar{A}$ par exemple (dans \bar{A} et non dans A afin que la situation soit moins évidente, la surprise en résultant en favorisera la mémorisation). L'enfant constate qu'il lui suffit de 3 piles d'objets, d'où le dessin obtenu par imitation des dessins précédents.

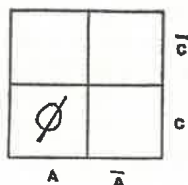


FIG. 11.

L'une des 4 classes (dans ce cas $A \cap C$) est vide. Ce dessin logiquement correct si l'on explique la signification du symbole \emptyset a deux inconvénients :

1° Il risque de suggérer un concept de partition en contradiction avec le concept correct où toutes les classes sont non-vides.

2° Il n'est pas naturel; l'enfant a envie de dessiner 3 parties seulement s'il n'a pas pris l'habitude de se laisser conditionner par les exercices précédents. C'est pourquoi les enfants utilisent un dessin du type suivant :

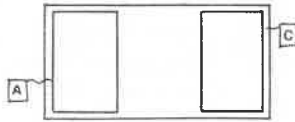


FIG. 12.

Là encore la réflexion pour être efficace ne doit pas s'effectuer seulement sur A et C , mais aussi sur les parties complémentaires \bar{A} et \bar{C} . L'élève établit alors le tableau des 14 colonnes et constate que l'une ne contient que des zéros, ($A \cap C$) une autre ne contient que des 1, ($\bar{A} \cup \bar{C}$) enfin $C = C \cap \bar{A}$, $\bar{C} = A \cup \bar{C}$.

L'essentiel ici est : 1° l'idée d'une partition en 3 classes; 2° les deux idées équivalentes $C \subset \bar{A}$ et $A \subset \bar{C}$ (codées ou non, mais si le signe \subset est introduit il convient de souligner la différence entre une étiquette de type ($A \cap \bar{C}$) représentant un terme et une étiquette de type relationnel $A \subset \bar{C}$.

Il peut paraître préférable d'attendre une prise de contact avec des relations plus familières pour introduire des signes relationnels comme \in et \subset (à opposer d'ailleurs pour mieux les distinguer).

Les exercices se poursuivent alors avec des ensembles définis en compréhension (par exemple G , \bar{G} , M , \bar{M} grands, non grands, moyens, non moyens). Ces exemples permettent de souligner l'emploi plus ou moins correct des articles partitifs dans la langue usuelle.

Conclusion.

Des exercices sur des situations réelles sont indispensables à la suite de tous ceux-ci et permettent un contrôle de la bonne compréhension du langage. Il vaut mieux sans doute réserver pour plus tard des exemples où l'on choisira 3 partitions en 2 classes, puis 4, etc. (au lieu de 2 comme ici), ce qui aura l'avantage de préciser à nouveau les concepts précédents.

En résumé, les idées essentielles de cette présentation sont :

- 1° Activité sur un matériel précédant toute explication ou définition verbale;
- 2° Création d'un nombre suffisamment grand de sous-ensembles pour motiver l'utilisation d'étiquettes et d'un langage spécial;
- 3° Passage de l'activité matérielle à l'utilisation d'un mode d'expression de type algébrique, ce qui d'un point de vue purement éducatif déconditionne l'enfant des habitudes de penser par l'intermédiaire d'une langue verbale et l'oblige à concentrer son attention sur la vue;

4° Distinction des éléments d'un ensemble soit par des qualités sensibles (ce qui est naturel mais logiquement mauvais puisqu'une qualité définit une classe d'objets et non 1 objet (même si cette classe n'en contient qu'un, cette classe n'est pas l'objet), soit par des noms propres (codage);

5° Familiarisation avec les concepts de sous-ensemble, complémentarité, partition, intersection, réunion, différence symétrique, fonction caractéristique.

Il est évident qu'une foule d'activités diverses peuvent être poursuivies à l'aide d'un tel matériel, mais il serait malhonnête à ce sujet de ne pas renvoyer le lecteur aux excellents travaux de DIENÈS.

Post-scriptum.

Cet article rédigé en janvier 1968 était destiné aux collègues participant à l'expérience organisée par l'Institut Pédagogique, concernant les classes de Sixième en 67-68. Il met en évidence, par ses carences, la lente évolution des idées chez tout individu normalement constitué, y compris l'auteur. Sa mise en garde contre la prolifération purement commerciale des matériels ne semble pas inutile actuellement, ce qui ne signifie pas qu'il ne faille pas faire agir les élèves sur du matériel.

En effet, la tendance actuelle des manuels est de mettre l'accent sur un symbolisme et des mots accompagnés de définitions. La pauvreté, sinon les erreurs de certains sujets dits « modernes » du B.E.P.C. ou des concours d'entrée aux E.N. souligne le danger de cette tendance. A quoi sert un langage raffiné lorsqu'on n'a pas d'idées à exprimer? A quoi bon dire « l'ensemble des tables de cette pièce » au lieu de « les tables de cette pièce ». Le problème fondamental est de montrer la nécessité de ce langage lorsqu'il y a risque de confusion. Et ce risque de confusion ne peut apparaître que si l'on travaille simultanément sur plusieurs sous-ensembles d'un même ensemble. Ceci, joint au fait que la volonté d'organisation est à la base de toute activité mathématique, explique pourquoi des jeux de « tri » (c'est-à-dire des partitions successives du même ensemble) sont indispensables avant l'introduction du langage et ceci quel que soit l'âge de l'élève. On pourrait peut-être aller jusqu'à dire qu'ils sont d'autant plus indispensables que l'élève est conditionné par sa langue maternelle, donc qu'il est plus âgé.

Le matériel décrit plus haut avait été choisi avec un manque parfait d'imagination. Il serait désastreux qu'un maître utilise uniquement un matériel de ce genre. C'est pourquoi des petites fiches sur carton représentant par exemple des pantins de formes, couleurs, coiffures, positions variées, des chats, des bateaux, des autos, etc., constituent autant de matériels efficaces. Malheureusement, certains ont cru pouvoir être utiles en vendant de tels matériels. Indépendamment du caractère commercial, cette politique me paraît pédagogiquement nocive. Car : 1° le fait de demander aux enfants de construire eux-mêmes un jeu de fiches est un excellent stimulant, et les prépare implicitement à mieux comprendre les notions présentées plus tard; 2° enfin, si des gens veulent rendre service à l'enseignement, ils feraient mieux de construire des matériels qui ne peuvent l'être par les élèves et seraient cependant d'une grande utilité (je pense à des jeux de type algébrique ou des modèles spatiaux).

Des matériels de type algébrique pourraient aussi être envisagés. Par exemple mes élèves de Sixième ont construit un jeu de fiches. Chaque fiche est constituée par 1 hexagone dont les 6 secteurs sont colorés de 6 couleurs différentes. Indépendam-

ment des exercices analogues à ceux décrits précédemment, on retrouve derrière cette activité combinatoire une préparation aux jeux algébriques ou simplement des jeux de différences (par exemple jouer aux dominos : 2 hexagones ne sont voisins que s'ils ne diffèrent que par l'interversion de 2 couleurs consécutives, etc.). On remarquera, qu'avec un tel matériel, les sous-ensembles seront difficilement définis en compréhension, ce qui constitue un avantage pour obliger à travailler en extension.

Enfin, la représentation des ensembles par des dessins semble présenter, après quelques années de recul, autant de dangers que d'avantages. C'est pourquoi l'utilisation de cartes perforées (décrites par nos collègues lyonnais en particulier) où chaque carte représente un élément de l'ensemble, paraît être avec la manipulation directe du matériel, une excellente préparation d'une part aux dessins, d'autre part au symbolisme.

Mais là encore, c'est le maître et lui seul qui peut décider dans quelle mesure il peut brûler les étapes, si tant est qu'il faille en brûler!

Un travail analogue peut être fait avec des ensembles de couples d'objets, c'est-à-dire matériellement parlant, avec des dominos à deux cases distinctes. L'opération « composition » peut alors être introduite sous forme de jeu. On a ainsi un moyen agréable et clair de préparer l'introduction des notions concernant les relations. Cela est une autre histoire trop longue à développer ici mais à laquelle il faudra bien s'attaquer un jour ou l'autre.

S'il fallait en tirer une morale, on rappellerait volontiers ceci : « Les mathématiques ne s'apprennent pas, elles se font ». L'oublier, c'est dénaturer complètement l'esprit même de cette discipline qui est à base de recherches. L'enseignement se heurte alors au paradoxe suivant : il faut aussi donner aux élèves les moyens de faire ces recherches, c'est-à-dire très souvent leur fournir les langages que d'autres ont élaborés, d'où ce conflit entre l'acquisition des langages exigeant un effort de mémoire et l'exercice de l'intelligence, de la curiosité et de l'imagination sans lequel il n'y a plus de mathématique. Plus les enfants sont jeunes, plus ce dernier aspect est important puisque c'est l'éducation et non la culture qui est en cause.

M. D. (Juin 1969).

**La réforme de l'enseignement mathématique
ou... le printemps de cet enseignement.**

Le printemps, par exemple les 7, 8, 9 et 10 mai 1970, pour les journées de l'A.P.M.E.P. à Clermont.

Mathématisiez l'Auvergne,
l'Auvergne vous mathématisera !

L'A.P.M.E.P. dans un Puy; sous quel aspect en sortira-t-elle?
Vous le saurez en venant à Clermont le 7 mai 1970.

Initiation à la déduction en Sixième et en Cinquième

M^{me} Magdeleine MOTTE,
Lycée Bonaparte, Toulon.

Je voudrais indiquer pourquoi le nouveau programme nous place dans de meilleures conditions d'initiation à la déduction que l'ancien (voir l'article p. 283). Je le ferai tout simplement en disant ce que j'ai fait en Sixième et en Cinquième.

Le 3 novembre, j'ai proposé, sans aucune intention au sujet de l'exploitation immédiate qui pourrait en être faite, l'exercice présenté en annexe sous le n° 1.

Le blanc a été rempli par « une » : simple exercice de mise en route et entrée dans le « dossier » de mathématiques d'un document dans lequel on reconnaîtrait plus tard une fonction.

Dès que l'exercice était achevé la même feuille était remise à l'enfant avec l'indication de remplir le blanc avec « trois ».

Pour le premier exercice plusieurs élèves demandent si elles « peuvent » expliquer pourquoi une seule flèche part de chaque bloc de A et d'autres si elles le « doivent ». Réponses : « bien sûr », « tu es libre ».

Les enfants travaillent le deuxième exercice de manières très différentes. Mais, bientôt, quelle que soit la méthode adoptée on s'inquiète : « ça va être sale si on continue ».

Je propose de travailler sur le verso de la feuille où le dessin se lit — il suffit de l'accuser — et d'examiner soigneusement ce qui se passe pour un bloc de A avant d'en prendre un autre — méthode d'ailleurs utilisée spontanément par quelques élèves.

Le même problème matériel se pose bientôt car les élèves ayant constaté que de chaque bloc examiné partent cinq flèches veulent poursuivre l'examen. Aucune n'assure qu'il est inutile de continuer : elles ne sont pas déformées. Serait-ce donc nous qui les déformerions par la suite ?

Je suggère à ces élèves que peut être notre intelligence peut nous permettre de prévoir le nombre des flèches sans qu'il soit nécessaire de les tracer.

Quelques élèves avancent vers un raisonnement qu'elles ont du mal à rédiger. Voici ce que je relève au verso de la fiche d'une élève dont j'ai par hasard le dossier chez moi aujourd'hui — et qui est une des meilleures — : « Je remarque qu'en prenant un élément de A rouge 5 flèches peuvent partir, 2 vont vers les éléments rouges, 3 vers les éléments bleus ; si je prends pour départ de flèche un élément de A bleu

3 flèches vont vers les rouges, 2 vers les bleus c'est exactement le contraire. Les dessins sont reproduits deux fois à part leur couleur dans B. C'est pourquoi un élément de A rouge a 3 flèches vers les B bleus et 2 vers les B rouges ».

Le jour de la mise en commun deux élèves se proposent pour expliquer « pourquoi cinq ? » Contraintes par mes questions elles parviennent peu à peu fort bien à expliquer « pourquoi deux » et « pourquoi trois ».

Toute la classe est très satisfaite.

Les notions de paire et de couple ayant été introduites on peut présenter de petits exercices comme :

- « Je te dis l'ensemble $\{a; 8\}$ n'est pas une paire. Que peux-tu affirmer? ».
- « Je te dis l'ensemble $\{a; 8\}$ est une paire et $\{a; 8\} = \{8; 12\}$. Que peux-tu affirmer? ».
- « Je te dis $(a; 5) = (10; b)$. Que peux-tu affirmer? ».
- « Je te dis $(a; b) = (c; d)$. Que peux-tu affirmer? ».
- « Je te dis $\{a; b\} = \{c; d\}$. Que peux-tu affirmer? ».

Plus tard l'utilisation de graphes muets, prise à Papy, m'a offert d'excellents exercices qui ont énormément plu à toutes les élèves sans exception (voir M.M.1 (102) p. 90 et 91 exercices 1, 2, 3; p. 100; p. 102, n° 2).

J'ai donné en devoir à la maison l'exercice 3 de la page 91. La plupart des devoirs — sauf deux — ne pouvaient être suspectés d'avoir reçu l'aide d'adultes. Si les enfants se tirent de manières très différentes de la rédaction, l'exercice ne dépasse pas leurs possibilités et leur plaît. La correction bien entendu exige de l'indulgence et que l'on s'attache davantage à ce qui est positif qu'à ce qui est négatif. Il y a quelques très bonnes rédactions. Les enfants ont, soit utilisé des lettres pour désigner les trois enfants, soit utilisé des lettres pour les initiales des noms et prénoms, soit les deux.

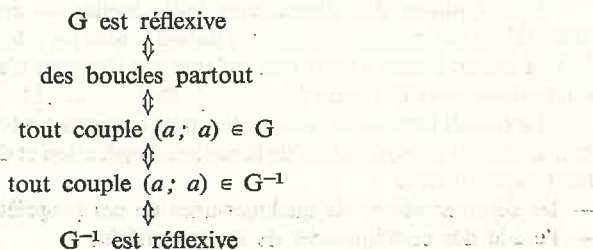
Après l'étude des notions de réflexivité, symétrie, antisymétrie, relation réciproque, on peut proposer : « Si on te dit que une relation G est réflexive peux-tu dire sans la connaître si G^{-1} est réflexive? »

Les enfants commencent par affirmer; leur conviction n'est pas établie à la légère : elles me montrent le graphe de G plein de boucles sur lequel elles ont mis les flèches, et boucles, de G^{-1} . Passer à la rédaction est difficile pour une bonne moitié de la classe. Voici ce qu'écrivit une des autres :

« Je peux sans la connaître dire que G^{-1} est réflexive si G l'est.

On me dit « G est réflexive »; cela signifie que sur tous les points de la relation G on a mis des boucles. Ces boucles représentent les couples identiques de cette relation. Ex. : Si (a, a) est le couple identique de « a » il y aura une boucle sur a. Son couple réciproque est toujours (a, a) donc il y a des boucles sur G^{-1} quand elles sont sur G ».

Cela peut être le moment d'introduire lors de la correction de l'exercice un schéma logique. C'est ce que j'ai fait en suivant de très près les affirmations des enfants :



Mais peut-être est-ce prématuré et discutable par le mélange de la langue véhiculaire et des symboles? Cependant, il faut un commencement à tout.

Nous avons traité l'exercice obtenu en remplaçant dans celui-ci « réflexive » par « symétrique ». Seules les élèves qui avaient traité rapidement le premier l'ont cherché et exposé oralement à leurs camarades. (Voir encore Papy p. 130 n° 12; p. 138 n° 13 et 17.)

Je n'ai pas pu accorder aux exercices de logique proposés par Z. P. Dienes la place que je souhaitais leur accorder. Cependant au cours de quelques séances de travaux en équipes 5 ou 6 fiches de la série 1 « disjonctions et implications » ont été étudiées avec ardeur et intérêt. On peut voir un écho à ce travail dans le travail de contrôle d'acquisitions du 3 mai (document annexé n° 2).

En Cinquième. J'ai continué à tirer parti des graphes muets au premier trimestre, avec l'étude des relations d'ordre et d'équivalence (documents annexes n° 3 et 4). Le document 3 a été proposé en travail individuel. Le document 4 a occupé les équipes environ trois heures.

La question f est l'occasion de constater que les informations « G est symétrique » « G est transitive » ne peuvent pas être exploitées dans un ordre quelconque.

Le 9 novembre j'ai proposé, en travail individuel, l'exercice suivant :

« On te donne les hypothèses :

$$\left. \begin{array}{l} G \text{ est une relation symétrique} \quad (1) \\ G \text{ est une relation transitive} \quad (2) \\ (b; a) \in G \quad (3) \\ (c; a) \in G \quad (4) \end{array} \right\}$$

Cherche les découvertes (déductions, conclusions) que tu peux obtenir. »

Toutes les élèves commencent correctement en utilisant explicitement (3) et (1), (4) et (1); presque toute la classe parvient à $(b, c) \in G$, $(c, b) \in G$ et plusieurs élèves à : $(a, a) \in G$, $(b, b) \in G$, $(c, c) \in G$. On m'a demandé des approbations, je les ai données. Mais je n'ai pratiquement pas eu à intervenir.

Quelques jours plus tard j'ai proposé :

« Tu sais $A \subset B$. Comment peux-tu trouver d'autres inclusions vraies par introduction, ou suppression d'éléments dans A et B. Peux-tu formuler des lois? ».

En posant l'exercice, oralement, j'avais écrit au tableau $A \subset B$ et, à droite :

$$\{ \dots ? \} \subset \{ \dots ? \}$$

Cet exercice était proposé pour permettre de découvrir pourquoi le cardinal des inclusions dans $\mathcal{P}(E)$ triplait lorsque le cardinal de E augmentait d'une unité. Il me paraît maintenant plus intéressant en lui-même que pour l'éclairage apporté à un exercice que je négligerai probablement à l'avenir.

Une synthèse des découvertes individuelles — après un temps de recherche assez faible (20 minutes environ) a donné toutes les « lois ». Cet exercice proposé en 2° C a été un fiasco : il est vrai qu'avec ces élèves je n'avais pas crû devoir traduire l'hypothèse sous la forme $\{ \dots \dots \} \subset \{ \dots \dots \}$!

Le travail logique est absent des mois suivants : retour sur les notions de mesure et d'application; exploration de la notion d'opération et des propriétés des opérations; mais reparaît avec :

- les démonstrations de quelques-unes de ces propriétés;
- l'étude des conséquences de ces propriétés;

— l'étude de \mathbb{Z} et de l'ensemble des décimaux relatifs : à peine amorcée en Sixième à cause des événements de Mai et de leur répercussion sur la date des vacances et par suite développée en Cinquième avec une formalisation plus poussée que celle qu'on aurait pu envisager en Sixième. (Voir documents annexe 5, 6, 7, 8, 9.)

L'emploi simultané des lettres soit pour représenter un relatif soit pour représenter son module — le relatif étant alors écrit \bar{a} ou \bar{a} — s'est révélé fructueux et sans inconvénient.

On rencontre alors un bon entraînement à la déduction d'égalités :

$$\begin{array}{l} \ll \text{si } a = b \\ \text{si } c = d \end{array}$$

alors $a + c = b + d$ et $a + d = b + c$ est employé avec aisance parce que la signification du signe « = » a été constamment présentée comme une relation entre les étiquettes.

On rencontre pas mal de véritables démonstrations dans l'étude de la propriété « l'opposé de la somme est la somme des opposés » et de ses conséquences. L'étude de nombreux cas sur la table d'addition non seulement a suggéré la propriété mais sa justification.

Bien entendu la définition :

a est un multiple de $b \Leftrightarrow$ il existe q tel que $a = bq$ est l'occasion comme autrefois de faire prouver la transitivité de la relation et la propriété de la somme de deux multiples et de représenter les schémas logiques des preuves.

L'étude des treillis des ensembles de diviseurs est encore l'occasion de preuves telle que :

Le treillis des diviseurs de n est $\dots \rightarrow \dots \rightarrow \dots$, si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} Dn = \{., ., .\} = \{1, a, n\} \\ \text{et } a \text{ premier;} \end{array} \right.$$

or $a \in Dn \Leftrightarrow n = a \times b \Leftrightarrow b \in Dn$

or $b \neq n$ et $b \neq 1$ donc $b = a$ et $n = a^2$.

Enfin l'étude de la convexité est l'occasion de contrôler si la négation de « pour tout » déjà rencontrée avec les affirmations « cette opération n'est pas commutative (associative) parce que ... » a été comprise. (Voir document annexe 10.)

Voici les réponses de 6 équipes :

— « Pour que E ne soit pas convexe il suffit qu'un segment ab ne soit pas inclus dans E les extrémités appartenant à E ».

— « ... il suffit qu'un segment ayant pour extrémités deux points de E ne soit pas inclus dans E ».

— « ... il suffit qu'un segment ayant ses extrémités dans E n'appartienne pas à E ».

— « ... il suffit que le segment rejoignant deux points appartenant à E ne soit pas inclus dans E . »

— « ... que le segment ayant pour extrémités deux points de E ne soit pas inclus dans E . »

— Une équipe a barré « ... il suffit que tout segment n'ayant pas... ne soit pas... » énergiquement mais n'a plus rien écrit.

On voit sur les exemples que j'ai examinés qu'il est possible de placer notre élève de Sixième ou Cinquième dans des situations où il a quelques informations

et un petit nombre de propositions permettant des inférences : les conditions pour qu'il apprenne à déduire sont réunies. Et les dangers et difficultés de la situation géométrique antérieure écartés :

— déduire devient maintenant une nécessité pour connaître; même si une certaine intuition propose une conviction avant que le raisonnement l'ait obtenue, l'évidence est beaucoup moins grande que celles que proposait « la figure » : la déduction n'apparaît pas comme un jeu gratuit;

— le nombre des propositions dont dispose l'élève est petit; les rapprochements entre informations et propositions en sont facilités;

— la mathématique n'est pas réduite à ce jeu logique; l'élève qui ne sait pas encore le jouer n'est pas pénalisé et a d'autres satisfactions.

A tel point qu'il nous semble qu'il serait bon de conserver en Quatrième et en Troisième les avantages de cette situation.

M. M.

Annexe 1. — 3 novembre 1967.

Voici deux ensembles de blocs A et B : observe comment j'ai distingué les minces et les épais.

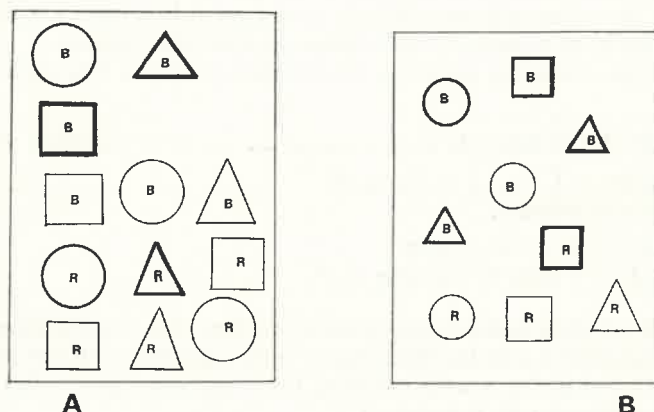


FIG. 1.

1° Place les couleurs d'après les lettres.

2° Il s'agit de placer toutes les flèches possibles allant d'un élément de A à un élément de B sachant que la flèche signifiera : «... a exactement □ différence avec...».

3° Peux-tu formuler une conclusion au sujet du nombre de flèches qui partent de chaque élément de A ?

Annexe 2. — 3 mai 1968.

1° a) Donne par énumération :

$$A = \{x/x \in \mathbb{N}, x \text{ est multiple de } 3, x < 50\}$$

$$B = \{x/x \in \mathbb{N}, x \text{ est multiple de } 4, x < 50\}$$

$$C = \{x/x \in A \text{ et } x \in B\}$$

$$D = \{x/A \in A \text{ ou } x \in B\}$$

b) En t'aidant de l'écriture par énumération que tu as trouvée pour C, donne C en compréhension d'une autre manière.

c) Relie la définition de D en compréhension.

Maintenant je te dis : je pense à un élément de D qui n'est pas un multiple de 3; peux-tu me dire quelque chose qui est certainement vrai pour cet élément?

2° a) Donne par énumération :

$$A = \{n/n \in \mathbb{N}, n \text{ est premier}, n < 17\}$$

$$B = \{n/n \in \mathbb{N}, n \text{ est premier et } n \text{ est impair}\}$$

$$C = \{n/n \in \mathbb{N}, n \text{ est premier ou impair}\}$$

b) Peux-tu écrire des inclusions avec A, B, C?

c) Relis la définition de C en compréhension.

Maintenant je te dis : je pense à un élément de C qui n'est pas premier; peux-tu me dire quelque chose qui est certainement vrai pour cet élément?

Et toi, à ton tour, tu me dis : Madame, je pense à un élément de C qui n'est pas impair; pouvez-vous me dire quelque chose qui est certainement vrai pour cet élément?

Et je te réponds : Cet élément...

Annexe 3. — Les relations d'ordre de $E \times E$ si $E = \{a, b\}$

Soit R_1 la relation dont voici le graphe :

a) Complète : $R_1 = \{ \quad \}$

b) Je dis : R_1 est une relation d'ordre. Justifie mon affirmation.

c) *Sans modifier* E, modifie le graphe précédent de façon à ne plus avoir une relation d'ordre. Justifie brièvement ce que tu fais.

S'il y a plusieurs manières de faire cela, fais autant de graphes qu'il faudra.

d) Modifie le graphe *initial* (graphe 1) de façon à avoir encore une relation d'ordre.



E

Grappe 1

S'il y a plusieurs manières de faire cela, fais autant de graphes qu'il faudra.

e) Conclusion. Si E est une paire, il existe... relations de E^2 qui sont des relations d'ordre.

Annexe 4. — Relations d'équivalence.


1° Recherche des exemples de relations d'équivalence : tu en as rencontrés en Sixième et tu peux certainement en trouver d'autres.

2° Si G est une relation d'équivalence sur E :


a) peut-on avoir un élément isolé ?

b) peut-on avoir ?

c) peut-on avoir ?

d) Si on a trois éléments a, b, c de E liés ainsi  et si d est l'origine qu'aura-t-on certainement aussi?

e) Si on a  qu'aura-t-on certainement aussi?

f) Si on a  qu'aura-t-on certainement aussi?

g) Si l'élément a donne des couples de G avec b, c, d , alors j'affirme :
 $(,) \in G, (,) \in G \dots$, etc. et je le prouve.

3° Ne serait-il pas naturel d'introduire :

a) un qualificatif pour deux éléments d'une relation d'équivalence échangeant deux flèches?

b) un nom pour toute partie de E dont tous les éléments échangent des flèches deux à deux?

Annexe 5. — Les avantages des opérations associatives et commutatives.

1^{er} EXEMPLE. — Soit à calculer $x = (21 \times 12) \times 5$.

a) Je *peux* faire les calculs indiqués : $x = 252 \times 5 = 1260$;

b) Mais, la multiplication étant associative, je *peux* calculer ainsi :

$$x = 21 \times (12 \times 5) = 21 \times 60 = 1260.$$

Le deuxième calcul est plus avantageux que le premier.

2^e EXEMPLE. — Soit à calculer $y = (100 - 18) - 2$.

La soustraction n'est pas associative; je *dois* effectuer les calculs comme ils sont indiqués : $y = 82 - 2 = 80$.

3^e EXEMPLE. — Soit à calculer $z = 37,5 + (69 + 2,5)$.

a) Je *peux* faire les calculs indiqués. : $z = 37,5 + 71,5 = 109$.

b) L'addition étant associative je *peux* aussi calculer ainsi :

$$z = (37,5 + 69) + 2,5 = 106,5 + 2,5 = 109.$$

c) L'addition étant commutative : $z = 37,5 + (2,5 + 69)$

L'addition étant associative : $z = (37,5 + 2,5) + 69$

$$z = 40 + 69 = 109.$$

Le troisième calcul est le plus avantageux.

En t'inspirant de ces exemples traite les calculs suivants :

$192 + (8 + 1253)$	$(13,75 + 29) + 1,25$	$(9 : 1) : 2$
$(456 - 192) - 8$	$(358 \times 0,05) \times 20$	$9 : (1 : 2)$
$(789 \times 125) \times 8$	$\left(358 \times \frac{1}{20}\right) \times 20$	$(9 \times 1) \times 0,5$
$(600 : 12) : 5$	$(217 \times 7) \times \frac{1}{7}$	$(9 \times 0,1) \times 5$
$(378 + 240) + 60$	$(217 : 7) : \frac{1}{7}$	$(9 : 10) : 0,2$
$(128 + 347) + 72$	$A \cap (A \cap B)$	$9 : (10 : 0,2)$
$456 - (192 - 8)$	$(A \cap B) \cap B$	
$15 \times (999 \times 4)$	$(B \cup A) \cup B$	
$0,3 + (12,5 + 0,7)$	$(\{1, 2, 3, 4\} \cap \{2, 3, 4, 5\}) \cap \{1, 6\}$	
$0,02 \times (100 \times 99)$	$(\{a, b, c\} \cap \{a, b, c, d\}) \cap \{d\}$	
$0,008 \times (112 \times 1000)$		

Annexe 6. — A, B, C sont des ensembles :

$$1^{\circ} \text{ Compare les ensembles : } X = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$\text{et } Y = A \times (B \cup C)$$

Tu as à ta disposition plusieurs procédés :

- a) diagramme sagittal; b) tableau cartésien;
c) écriture en compréhension :

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ et } y \in B\}$$

$$A \times C =$$

donc $X =$

ou d'après la définition de.....

$$X =$$

or $Y =$

Donc :

$$2^{\circ} \text{ Compare les ensembles : } Z = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$T = A \times (B \cap C)$$

Remarque. — Si en 1° et 2° tu as donné un raisonnement par l'écriture en compréhension une figure n'est pas indispensable. Cependant tu devrais pouvoir illustrer ton raisonnement par une figure — de type a) ou b) — qui te permettrait d'expliquer la question à quelqu'un qui ne suivrait pas le raisonnement.

3° Ajoutons l'hypothèse B et C sont disjoints et décidons de noter $a = \text{card } A$, $b = \text{card } B$, $c = \text{card } C$.

Complète, en les justifiant d'abord, les affirmations :

$$\text{card } (B \cup C) =$$

$$\text{card } Y =$$

$$\text{card } A \times B =$$

$$\text{card } X =$$

$$\text{card } A \times C =$$

Donc si a, b, c sont des entiers naturels, alors :

Annexe 7. — Interrogation écrite :

1. — $(a, b) \in \overset{\dagger}{10}$. Choisis (a, b) à ton gré : $(a, b) =$

— $(c, d) \in \bar{6}$. Choisis (c, d) à ton gré : $(c, d) =$

Complète : $(a, b) + (c, d) = (\quad) + (\quad) = (\quad) \in$

2. — Complète : $x = (2021; 2011) \in \dots$ (1);

$y = (36752; 36758) \in \dots$ (2);

$(x + y) \in$ (3).

Si tu sais ta leçon, as-tu besoin de calculer $(x + y)$ pour compléter (3)? Pourquoi? (Réponds au verso avec précision)

3. — Complète $\bar{9} + \bar{6} = \dots$

parce que :

$$\bar{7} + \bar{11} = \dots$$

parce que :

$$\bar{8} + \bar{7} = \dots$$

parce que :

4. — a, b, c, d sont des nombres. Tu sais $a = b$ (1)
 $c = d$ (2).

Écris des égalités que tu peux déduire de (1) et (2) en utilisant :

- a) seulement l'addition ;
 b) seulement la multiplication ;
 c) à la fois l'addition et la multiplication (ne cherche pas à les écrire toutes!).

Annexe 8. — Addition dans \mathbb{N}^2 .

L'addition dans \mathbb{N}^2 est-elle commutative?

Il faut comparer $(a, b) + (c, d)$ et

Je calcule $\quad = \quad$ et $\quad = \quad$.

Or

donc

Est-elle associative?

Il faut comparer $[(a, b) + (c, d)] + (e, f)$ et

$$[(a, b) + (c, d)] + (e, f) = (\quad , \quad) + (e, f) =$$

L'addition dans \mathbb{N}^2 a-t-elle un élément neutre?

L'addition dans \mathbb{N}^2 a-t-elle un élément absorbant?

Équations dans \mathbb{N}^2 :

$$(2; 3) + x = (7; 4)$$

$$(2; 3) + x = (1; 3)$$

$$x + (3; 2) = (0; 0)$$

Examine d'autres cas jusqu'à ce que tu vois se dégager une conclusion.

Annexe 9. — Addition dans \mathbb{Z} .

L'addition dans \mathbb{Z} est-elle commutative?

L'addition dans \mathbb{Z} est-elle associative?

Il faut comparer $(x + y) + z$ et

Soit un couple de x , (a, b) , un couple de y :

$$x + y \ni \quad \quad \quad \text{et} \quad (x + y) + z \ni$$

Or

L'addition dans \mathbb{Z} a-t-elle un élément neutre?

L'addition dans \mathbb{Z} a-t-elle un élément absorbant?

Équations dans \mathbb{Z} :

$$\bar{1} + x = \bar{3}$$

$$\bar{2} + x = \bar{12}$$

$$x + \bar{3} = \bar{1}$$

$$x + \bar{3} = 0_{\mathbb{Z}}$$

$$\bar{3} + x = 0_{\mathbb{Z}}$$

Annexe 10. — Approuves-tu cette définition: « Une partie E du plan ou de l'espace est convexe si, et seulement si, tout segment ayant pour extrémités deux points de E est inclus dans E »?

Peux-tu l'écrire avec les symboles?

$$[E \text{ convexe}] \Leftrightarrow [$$

Complète : « Pour que E ne soit pas convexe il suffit...

[E non convexe] \Leftarrow [

Réunion de deux ensembles convexes.

— Signale en bleu une partie A convexe.

— Signale en rouge une partie B convexe de façon que $A \cup B$ non convexe.

— Signale en vert une partie C convexe de façon que $A \cup C$ convexe.

Vrai ou faux?

« La réunion de deux ensembles convexes est convexe » V F.

« La réunion de deux ensembles convexes n'est pas convexe » V F.

« Il n'est pas vrai que la réunion de deux ensembles convexes soit un ensemble convexe » V F.

« La réunion de deux ensembles convexes n'est pas nécessairement un ensemble convexe » V F.

Les publications de l'A.P.M.E.P.

Le Bulletin, six numéros par année civile.

(conditions d'abonnement p. 266)

La Bibliothèque d'Information sur l'Enseignement Mathématique a publié trois brochures :

— La Charte de Chambéry;

— Matériaux pour l'histoire des nombres complexes par Jean ITARD;

— Première étape... vers une réforme de l'enseignement mathématique dans les classes élémentaires.

La Bibliothèque d'Enseignement Mathématique a publié trois ouvrages :

— Initiation à la statistique par L. GUERBER et P.-L. HENNEQUIN;

— Initiation aux probabilités par les mêmes auteurs;

— La mathématique parlée par ceux qui l'enseignent (voir spécialement p. 373).

Conditions de vente : voir p. 268.

La physique mathématique en Sixième

J.-M. CHEVALLIER

Lycée Marcelin-Berthelot, Saint-Maur

Ce titre n'est ni une provocation, ni une plaisanterie, mais plutôt une question que je me pose et que beaucoup d'autres doivent se poser quant au caractère de notre enseignement élémentaire.

Nous n'avons pas à rougir de nous comporter de temps à autre en physiciens; même si la mathématique actuelle a considérablement élargi le cadre dans lequel nous cherchions des « situations » pour élaborer nos « modèles », la physique continue à nous fournir de telles situations, et de plus des exemples, des problèmes auxquels nous pouvons appliquer notre outil mathématique. Personnellement, j'y ai recours en mainte occasion; cependant, dans le second cycle, nous pouvons préférer nous en abstenir au nom d'un certain idéal de « pureté », puisqu'aussi bien notre collègue physicien — le vrai — a compétence dans son domaine.

Le cas du premier cycle est totalement différent. Le nouveau programme de Sixième, reprenant d'ailleurs l'ancien sur ce point, fait obligation au professeur de « mathématiques » d'étudier « certains objets géométriques ou physiques donnant lieu à mesure ». A vrai dire ces « objets » semblent s'évanouir dans les classes suivantes, ce qui n'est pas la moindre incohérence — elle aussi traditionnelle — de notre enseignement. Ces objets reparaitraient-ils ailleurs, sous une autre forme, par exemple dans la technologie dont on a beaucoup parlé? Cela seul mériterait une étude à part; sans vouloir l'aborder ici, je ne cache pas qu'à mon avis nous serons d'autant plus à l'aise pour « purifier » notre discipline qu'il existera parallèlement un enseignement concret. De toute évidence cela pose des problèmes qui ne sont pas seulement de programmes, mais d'équipement scolaire; il faut non le dissimuler, mais le proclamer. Nous ne devons pas nous résigner à chercher, parfois assez artificiellement, des situations propres à faire ressentir le besoin d'une multiplication dans \mathbb{Z} , alors que l'étude élémentaire des moments dans le levier ou le treuil fournirait des exemples doublement éducatifs.

Mais revenons à la question posée dès la Sixième : qu'enseignons-nous exactement? La mathématique n'est absolument pas une connaissance du réel; c'est une discipline de l'esprit. En tant que telle, elle ne s'oppose pas à la connaissance, elle lui est liée, mais elle ne s'identifie pas à elle. Une « physique mathématique », c'est

une physique où l'explication au moins approchée du plus grand nombre possible de phénomènes est *déduite* à partir d'un petit nombre de *principes*; l'entre-deux, c'est-à-dire : le processus préalable d'abstraction dans l'élaboration des principes, la déduction proprement dite, l'application aux problèmes particuliers, tout cela est de caractère mathématique, mais aux deux bouts les principes et les phénomènes sont physiques. Même si la distinction n'apparaît pas du premier coup dans l'esprit de nos élèves jeunes, nous ne devons, nous, jamais la perdre de vue : faire « de la physique » est très légitime, pourvu que nous ne prétendions pas (et pis encore : n'imaginions pas) que nous faisons alors des mathématiques.

Malheureusement, la netteté de cette distinction varie beaucoup avec la branche de la physique considérée; c'est surtout une question d'habitudes d'esprit et de langage, en fait une question d'histoire. En particulier, du fait que la *science de l'espace* a été mathématisée de très bonne heure, on a tendance à croire que la « géométrie » fait partie des mathématiques, et cela ne laisse pas de créer bien des malentendus. S'il s'agit de la géométrie après Hilbert, celle où les principes ont perdu tout contenu physique pour devenir des axiomes — purement gratuits sous réserve de compatibilité logique — celle où l'on s'attache à la liberté de l'exploration intellectuelle plutôt qu'à l'adéquation au réel, ce caractère purement mathématique n'est pas discutable; mais l'étude de cette géométrie-là demande un niveau déjà un peu élevé. Ce n'est pas elle qui nous occupe ici; certes l'enseignement élémentaire peut fort bien se proposer de *préparer les voies* à cette libre construction, mais il le fera d'autant mieux que nous aurons pris une conscience plus nette de sa dualité.

Au fond nous sommes des *fabricants d'opérateurs*; il est sain qu'avant de jongler avec ces opérateurs, nos élèves aient eu l'occasion de les roder sur des objets physiques, mais il est dangereux qu'ils confondent le matériau et l'outil. A cet égard on peut se demander si la notion d'*opération externe* ne devrait pas apparaître beaucoup plus tôt comme une notion fondamentale; la suite fournira des exemples de cette idée.

*
* *

Des questions de ce genre se posent dès qu'on essaie de raccorder la partie nouvelle du programme (ensembles, relations, en particulier numériques) avec l'ancienne (longueurs, aires, vitesses, etc.); la réponse ne semble pas toujours aussi claire qu'on le souhaiterait, ni dans l'esprit de beaucoup de collègues, ni dans les manuels existants, ni dans les programmes eux-mêmes ou les instructions. Ce n'est pas une critique, mais la constatation d'un embarras assez naturel, et je n'y échappe pas plus que les autres.

Le cas du repérage — plutôt sacrifié dans bien des manuels —, celui de la mesure sont des exemples flagrants. Je n'essaierai pas de les traiter au fond, puisqu'aussi bien REVUZ l'a fait aux Journées de Besançon et en mainte autre occasion, avec une compétence que je ne lui dispute pas; je me bornerai à les examiner sous un jour légèrement différent qui fera apparaître quelques divergences : elles ne sont pas essentielles, mais elles ne sont pas non plus de simples nuances.

Bien entendu, je m'estime tout aussi incapable qu'un autre de définir proprement une *ligne continue* — droite ou courbe, plane ou gauche, peu importe — devant des élèves de Sixième. Prenons-la donc comme un donné physique, *avec ses propriétés topologiques*. Déjà nous tombons sur un premier obstacle : si cette ligne ne se « ferme » ni ne se « croise », il est aisé d'admettre sur elle l'existence d'un ordre total, dans le cas contraire l'ordre ne pourra être sauvegardé qu'au prix d'une coupure qui rompt la continuité; tel est le cas du cercle, qui annonce les difficultés futures touchant les

arcs dits orientés et rend nécessaire dès à présent la coupure des parallèles terrestres sur l'antiméridien de Greenwich.

Une fois cet ordre admis, en quoi consiste un « repérage grossier »? Essentiellement à établir une bijection croissante entre une graduation G — c'est-à-dire un sous-ensemble discret (d'ailleurs absolument arbitraire) de points de la ligne, ordonné par l'ordre induit — et un intervalle Z' de Z . Cette bijection étant entièrement déterminée dès que l'on connaît le point A choisi pour origine de la graduation, ce « repérage grossier » apparaît comme un triplet (G, A, Z) . Le même canevas fournit une mesure, soit d'un ensemble de points de la graduation, soit d'un ensemble de semi-ouverts ayant pour extrémités deux points consécutifs de G ; un « mesurage grossier » n'est autre que le couple (G, IN) , l'origine n'ayant plus besoin d'être distinguée.

« Affiner » le repérage ou la mesure revient à remplacer G par une nouvelle graduation G_1 en introduisant — toujours de façon arbitraire — entre deux points consécutifs de G des points intermédiaires en nombre $k-1$ (si l'on travaille en base k); on a alors le choix entre le repérage (G_1, A, IN) , dans lequel les anciens numéros auront été multipliés par 10, et le repérage (G_1, A, D_1) , puis (G_2, A, D_2) , (G_3, A, D_3) ... où le numérotage se fait au moyen des nombres à une, deux, trois... « décimales » ce qui offre l'avantage de conserver les anciens numéros et de frayer la voie vers l'ordre « dense » dans les ensembles numériques.

De même, acceptant comme intuitive la notion de surface continue, on tracera sur cette surface un réseau R de lignes; toujours sous certaines réserves topologiques (en particulier éviter que les lignes d'une même famille s'entrecroisent), on pourra, après choix d'un nœud origine A , repérer soit les nœuds, soit les mailles de R au moyen de $Z \times Z$ (*). Si une partie de la surface a pour bord des parties des lignes de R , sa mesure est un nombre de mailles; les mesurages de plus en plus fins sont ici (R, IN) , (R_1, D_2) , (R_2, D_4) , etc.

J'insiste sur le fait que la « forme » des mailles ne joue aucun rôle; se borner à des carrés ou même des parallélogrammes n'a aucun intérêt puisqu'on est obligé de les abandonner pour le repérage sphérique. A ce propos, sans qu'il soit question de faire une théorie de la cartographie, visiblement déplacée ici, la diversité des systèmes géographiques de représentation (orthographique, stéréographique, Mercator, Mollweide, etc.) fournit assez d'exemples de l'indépendance complète entre « forme » et repérage pour qu'on leur accorde plus d'importance que ne le font habituellement les manuels. La condition posée plus haut — que les lignes d'une même famille ne s'entrecroisent pas — trouve un magnifique contre-exemple avec les pôles géographiques où la convergence des méridiens rend illusoire toute « longitude »; et si l'on cherche à se débarrasser de cette convergence, le remède est pire que le mal, car on abolit du même coup tout repérage polaire (Mercator) : le fameux ours blanc du Pôle Nord (ou le pingouin du Pôle Sud) sont — chose étrange — écartelés d'*Est en Ouest!*

Il convient de souligner que nous trouvons dans ce qui précède, *en tant que mathématiciens*, tout ce qui nous est nécessaire au niveau considéré, et même sensi-

(*) Noter au passage que, pour la commodité, on préfère l'ordre-produit à un ordre total. On rappelle à ce propos que l'ordre dans un ensemble est *total* si, étant donné deux éléments quelconques, on peut toujours décider lequel est « antérieur » à l'autre (tel est le cas des entiers dans Z); ici, on n'indique aucun moyen de décider si un couple (a, b) est « antérieur » ou non à un autre couple (c, d) , on considère qu'il est suffisant et plus avantageux pour repérer un point ou une maille de connaître le numérotage de sa « ligne » et celui de sa « colonne ». C'est en cela que consiste l'ordre-produit.

blement plus. Une fois admises les propriétés topologiques, le rôle du support physique est réduit au minimum; ce qui apparaît au premier plan, ce sont les propriétés corrélatives des « réunions disjointes » et des sommes numériques, celles des produits cartésiens et des produits numériques (on peut même se demander si l'on n'aurait pas eu intérêt à accentuer cet aspect dans le programme). De même se trouvent dépouillés de tous éléments superflus le problème du changement d'origine par « translation » et le problème du changement d' « unité », qui n'est autre que l'affinage. La nette séparation entre le rôle physique de la graduation G et le rôle mathématique des opérateurs entiers nous met à l'aise pour introduire l'addition dans \mathbb{Z} suivant le schéma (qui donnera plus tard la construction d'un espace affine sur un espace vectoriel).

$(MTa)Tb = MT(a + b)$, où l'opération externe T est un « déplacement physique » opérant sur les points M de la graduation, alors que $+$ symbolise l'addition « pure » : il suffit d'imaginer pour G n'importe quelle ligne d'autobus découpée en sections, pour a et b un nombre de tickets, par exemple bleus ou rouges suivant le sens de parcours. Enfin nous disposons, avec l'ordre, de la notion d'encadrement; ici encore on peut juger excessive la discrétion du programme quant à la compatibilité de l'ordre avec certaines opérations dans \mathbb{N} ou \mathbb{D} , sur quoi se fondent tous les problèmes d'encadrement : il est beaucoup plus difficile d'évaluer l'aire d'une table que de faire une multiplication exacte, cela on ne l'apprendra jamais trop tôt!

* * *

Cependant nous en tenir là ne serait conforme ni au programme, ni aux besoins pratiques : nous devons nous inquiéter, *en tant que physiciens* cette fois, de savoir si les segments de la graduation, les mailles du réseau..., sont « superposables » (« isométriques », « équivalents »). C'est seulement alors que s'introduit l'idée de graduation « régulière » ou, ce qui revient au même, l'idée d'unité de longueur, d'aire, etc. Fondamentalement, rien n'est changé : un mesurage à 1 centimètre près est à présent le couple (cm, \mathbb{N}) affiné en (mm, \mathbb{N}) ou en (cm, \mathbb{D}_1) ; à la dimension 2, un mesurage à 1 mètre carré près est (m^2, \mathbb{N}) , affiné par exemple en (cm^2, \mathbb{N}) ou (dm^2, \mathbb{D}_2) , ou (m^2, \mathbb{D}_4) ; même chose pour les temps, les masses, etc.

Il subsiste cependant un malaise, une équivoque, qui apparaissent dans les notations, mais sont plus profonds : est-ce que AB signifie 3 ou bien 3 cm? J'avoue que, si nos élèves le savent après la lecture de la plupart de leurs manuels, ils sont diablement intelligents et n'ont que faire de nos conseils; souvent le même ouvrage, à quelques pages, voire à quelques lignes d'intervalle, passe d'une interprétation à l'autre sans même prévenir. Pis encore, on a la pénible surprise de lire à peu près partout (du moins dans les manuels qui donnent des exemples) des écritures bâtarde du genre de : $3 + 5 = 8$ cm; on ne saurait mieux brouiller les cervelles innocentes, les inciter à écrire plus tard : $3 + 5 = 8x$ et les « conditionner » à ne jamais savoir ce qu'est une opération externe.

Pour les « purs », la longueur est une application à valeurs numériques; elle s'identifie donc à la mesure (ou du moins une certaine mesure) et il faut écrire $AB = 3$. Mais, comme au moindre changement d'unité j'aurai $AB = 30$ ou $AB = 0,03$, cela est propre à faire naître des doutes sur la transitivité de l'égalité. Je fais l'âne, bien sûr; ce qu'on voulait me faire entendre, c'est que cm-mes $AB = 3$, mm-mes $AB = 30$, etc. D'accord, mais ce que démontre justement cette forme, c'est que AB n'était pas un nombre, et, comme de surcroît elle est fastidieuse, elle incite à revenir à l'écriture $AB = 3$, donc au fond *dans le couple (cm, \mathbb{N}) à ne considérer que \mathbb{N} .*

Franchement, $AB = 3 \text{ cm} = 30 \text{ mm}$ était plus clair. Les fanatiques du nombre pur ont d'ailleurs la ressource de transformer cela en $\frac{AB}{\text{cm}} = 3$ et $\frac{AB}{\text{mm}} = 30$ en inter-prétant les premiers membres non comme des rapports — qui leur feraient proba-blement horreur — mais comme de simples notations, tout de même plus légères que les précédentes.

Pour constater les mauvais tours que nous joue cette obsession du nombre, il n'est que de lire certains ouvrages : on y relève par exemple qu'il convient de bien distinguer la densité, « qui est un nombre » (il s'en trouve même encore pour ajouter « abstrait »!) de la masse volumique, laquelle est « la masse de l'unité de volume »; ce serait lumineux si, quelques pages auparavant, la masse n'avait été définie... comme un nombre. D'ailleurs, dès l'instant que tout est nombre (Pythagore avec nous!), on ne voit pas pourquoi cette densité, cette masse, ne seraient pas *aussi* une longueur, un temps, une vitesse... et l'âge d'un sexagénaire égal à l'angle d'un triangle équi-latéral. J'entends bien qu'il s'agit d'applications *différentes* ayant *même* ensemble de valeurs; mais, si l'on commence précisément par dissimuler la chose sous des notations insuffisamment explicites, il faudra pas mal de salive avant que l'élève de Sixième moyen en prenne une nette conscience, ... surtout dans le cas de l'eau, qui a pris la fâcheuse habitude, depuis la Révolution, d'avoir une masse et un volume de même valeur.

Nous a-t-on assez dit, et à bon droit, que la mathématique « moderne » allait enfin nous libérer de la tyrannie du Nombre? établir entre des ensembles tout-à-fait quelconques des relations qui ne seraient plus forcément numériques? Eh bien, voici l'occasion! Dans une collection E d'objets, une bille, un dé, un caillou, plongés dans un vase à trop-plein, font écouler exactement de quoi remplir un même récipient : c'est une relation d'équivalence sur E, et j'appelle *volume* la classe d'équivalence; d'autres objets font équilibre à une même tare sur la balance : autre classe que j'appelle *masse*; comme de toute évidence la bande de papier ou le compas ne sont pas moins « physiques » que les instruments précédents, nouvelle classe, la *longueur*, etc. Rien n'empêche d'aller jusqu'à l'ordre sur ces classes — car « plus gros », « plus massif », « plus long » sont des notions directement accessibles par l'expérience — ou jusqu'à une approche qualitative de la densité (masse supérieure à volume égal) sans qu'à aucun moment le nombre soit intervenu. C'est pourquoi donner de ces choses-là des *définitions* numériques me paraît aller à contre-sens.

Ce qui n'est pas douteux, en revanche, c'est que notre tâche consiste à *introduire* le nombre dans cet embryon de « physique mathématique », fort évidemment par le canal de la mesure et le biais des opérations externes... qui nous achemine vers les espaces vectoriels.

Pour ce qui est linéaire, nous disposons d'une « addition interne » des classes (notons-la s), qui débouche naturellement sur une « multiplication externe à opéra-teurs dans \mathbb{N} », ultérieurement dans \mathbb{D} , \mathbb{Q} ou \mathbb{R} (notée par simple juxtaposition). Cela nous permet d'écrire :

$$(1) \quad \begin{cases} (3 \text{ cm}) s (5 \text{ cm}) = (3 + 5) \text{ cm} \\ 3 \text{ cm} = 3 (10 \text{ mm}) = (3 \times 10) \text{ mm} \end{cases}$$

Un peu plus délicat, mais pas essentiellement différent, est le cas des « formes bilinéaires » — ou trilineaires — où cela se combine avec une « multiplication exté-rieure » (notons-la \perp) possédant les propriétés suivantes :

$$(2) \quad \begin{cases} (3 \text{ m}) \perp (4 \text{ m}) = (3 \times 4) (\text{m} \perp \text{m}) \\ [(3 \text{ m}) s (2 \text{ m})] \perp (4 \text{ m}) = [(3 \text{ m}) \perp (4 \text{ m})] s' [(2 \text{ m}) \perp (4 \text{ m})] \end{cases}$$

(Dans cette dernière expression, s' désigne une « somme » d'aires comme s désignait une « somme » de longueurs. Remarquer d'autre part qu'il n'est pas nécessaire que les deux « facteurs » de l'opération \perp soient les mêmes, cela serait même plus clair avec des facteurs différents comme dans le vieil exemple des tonnes-kilomètres, ici $t \perp \text{km}$.)

Visiblement les propriétés (1) et (2) sont le fidèle reflet des propriétés classiques de l'addition et de la multiplication dans les ensembles numériques. Cette analogie — plus précisément cet isomorphisme — justifie l'attitude des « purs » lorsqu'ils rejettent toute référence à des « grandeurs physiques », mais elle la justifie à terme et non d'emblée. Elle peut justifier aussi l'« abus de notation » qui consiste à remplacer s ou s' par $+$, la juxtaposition ou \perp par \times . Je sais que certains collègues sont allergiques à des écritures comme celles-ci :

$$\begin{aligned} 2 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} &= 6 \text{ cm}^2 \\ 15 \text{ km} : 3 \text{ h} &= 5 \text{ km/h} \\ 8 \text{ kg} : 4 \text{ dm}^3 &= 2 \text{ kg/dm}^3 = 2 \text{ g/cm}^3 \end{aligned}$$

Cette hostilité peut avoir des raisons pédagogiques; c'est un plan sur lequel les avis se partagent, car on peut tout aussi bien plaider que l'indication constante des unités sert de garde-fou à l'élève et le prépare aux futures « équations aux dimensions »; je l'ai fait pendant des années, d'autres le font sans dommage semble-t-il, mais enfin le débat reste ouvert. En revanche, il me paraît difficile d'invoquer des raisons *théoriques* profondes à ce refus d'employer $+$ et \times ailleurs que dans les ensembles numériques; si « abus de notation » il y a, disons qu'il est constant et inévitable, sans quoi nous serions ensevelis sous l'avalanche des notations. Et tout le reste est superstition.

**

On est libre de trouver les présentes réflexions soit « conservatrices », soit « progressistes », soit même les deux à la fois; on est même libre de n'y accorder aucune importance. Je ne fais pas de profession de foi et me bornerai en conclusion à souligner deux points :

1. Rien n'est plus absurde que d'introduire dans un programme des notions nouvelles — ici les ensembles et relations — si c'est pour ne pas s'en servir et continuer à enseigner les « surfaces » comme avant : c'est cette articulation que j'ai cherchée ici, sous une forme assez condensée, destinée (est-il besoin de le dire) aux collègues et non directement aux élèves.

2. On ne reproche pas à une synthèse d'être vaste, ou même ambitieuse, mais on peut lui reprocher d'être prématurée si elle néglige de s'appuyer sur une analyse préalable qui, elle, doit être modeste, soigneuse et patiente. La « physique », au sens large, continue à fournir un terrain de choix à cette analyse.

J.-M. C.

P.S. — Le rapport de la Commission Lichnérowicz sur l'enseignement élémentaire condamne l'écriture $12 \text{ cm} + 5 \text{ cm} = 17 \text{ cm}$. Je signale la chose par souci d'objectivité sans me déclarer couverti pour autant. D'ailleurs le rapport retombe immédiatement dans les embarras de langage : « le centimètre étant l'unité, la longueur est 17; ou, en langage courant, la longueur est 17 centimètres ». Eh bien, vivent les crocheteurs du Port-au-Foin! Si les mathématiciens veulent parler autrement, qu'ils disent : « le centimètre étant l'unité, la *mesure* est 17 »; quelle précision apporte *longueur*?

Jeu avec un alphabet de quatre lettres

C'est un jeu « de rentrée », proposé le 5 octobre en Sixième : « Nous sommes chargés de mission dans un pays lointain dont la langue s'exprime avec l'alphabet $\{a, b, c, d\}$. Nous devons établir un dictionnaire indiquant tous les mots possibles utilisant ces seules lettres » (l'énoncé ne donne aucune autre indication).

Première étape : les équipes se lancent dans la recherche, beaucoup d'enfants travaillent dans le désordre et assez fiévreusement. Une équipe : « je cherche d'abord tous les mots qui commencent par a ». Une autre : « je commence par les mots de 4 lettres ».

Deuxième étape : l'inquiétude se répand d'équipe en équipe : « on ne finira jamais ». Un enfant vient au tableau et écrit « *aaabacdaaaba* » ; une discussion s'engage : « il va falloir préciser les règles du jeu », « interdire les répétitions », « limiter le nombre de lettres des mots », « limiter les répétitions, à deux par exemple ».

Troisième étape : on choisit la règle (l'axiome), « une lettre doit être nommée au plus une fois dans un mot ». Il reste à trouver une méthode pour trouver tous les mots possibles et ne les nommer qu'une seule fois. Quelques enfants (très peu) manient les permutations circulaires avec une remarquable aisance. Je lance l'idée de l'arbre qui sera souvent reprise au cours de l'année. Remarque : deux élèves (sur 40) ont découvert le « mot vide » !

Exercices : 1° Un enfant propose un mot ; est-il dans l'arbre ? Comment l'obtient-on ? Par quel chemin ? Peut-on se tromper de chemin ? Y a-t-il deux chemins possibles ? N'y a-t-il jamais qu'un seul chemin ?

2° Est-on sûr qu'il n'y a pas deux mots identiques ? Pourquoi ?

3° A-t-on obtenu le dictionnaire complet ?

Remarques : certains enfants se proposent pour afficher dans la classe un arbre et la règle du jeu. En décembre, l'étude des parties d'un ensemble a permis une nouvelle évocation de ce jeu.

M^{me} CHOUCHAN,
(Lycée de Montreuil-sous-Bois).

Propriétés des graphes de relations remarquables dans un ensemble

Il est possible de donner une signification géométrique aux définitions classiques de réflexivité, symétrie, antisymétrie et transivité, à la condition de représenter l'ensemble deux fois (ensemble de départ et ensemble d'arrivée) sur un couple de deux demi-droites perpendiculaires ; les éléments seront régulièrement espacés, et écrits dans le même ordre sur les deux demi-droites. Nous remarquerons la bissectrice de l'angle des deux demi-droites.

1. Signification géométrique des quatre définitions de base.

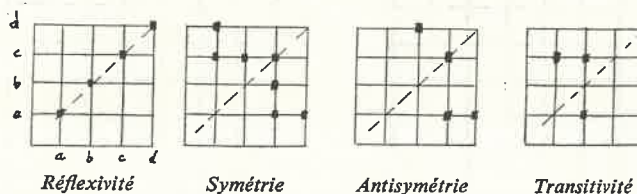


FIG. 1.

a) *Réflexivité*: $\forall a, aRa$. Tous les couples (a, a) appartiennent au graphe, c'est-à-dire que tous les points possibles de la bissectrice appartiennent au graphe.

b) *Symétrie*: $\forall a, \forall b, aRb$ implique bRa . Donc tout point du graphe est tel que son symétrique par rapport à la bissectrice appartient aussi au graphe.

c) *Antisymétrie*: $\forall a, \forall b, aRb$ et bRa impliquent $a = b$. Donc aucun point du graphe, en dehors de ceux de la bissectrice, n'a son symétrique par rapport à cette bissectrice sur le graphe.

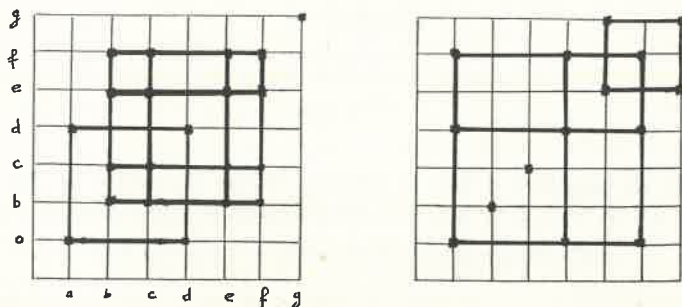
d) *Transitivité*: $\forall a, \forall b, \forall c, aRb$ et bRc impliquent aRc . Les couples (a, b) , (b, b) et (b, c) ont pour images les trois sommets d'un triangle rectangle dont le sommet de l'angle droit appartient à la bissectrice. On peut compléter le rectangle ainsi commencé. S'il y a transitivité, c'est-à-dire si les couples (a, b) et (b, c) appartenant au graphe, (a, c) lui-même appartient au graphe, alors ce couple (a, c) est le quatrième sommet du rectangle.

2. Graphes de relations d'équivalence ou de relations d'ordre, dans le cas d'ensembles finis.

Si l'on fixe la partition ou l'ordre d'avance, le graphe est facile à construire et l'on peut constater ensuite les propriétés géométriques correspondantes.

Mais il est plus délicat de compléter une relation pour que ce soit éventuellement une relation d'équivalence ou une relation d'ordre. Une étude géométrique peut permettre de conclure.

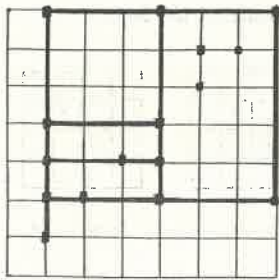
Voici quelques exemples remarquables pour un ensemble comportant 7 éléments.



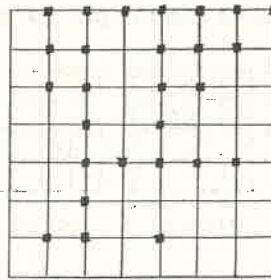
Équivalence: classes (a, d) , (b, c, e, f) , (g)

Classes (a, d, f) , (b) , (c) , (e, g)

FIG. 2.



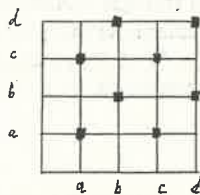
Ordre partiel: $e R f$; $a R d R c$
et $a R d R g R b$



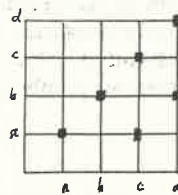
Ordre total:
 $b R d R a R e R f R c R g$

FIG. 3.

Remarques: 1° Pour que la transitivité existe, il suffit qu'elle ne soit pas contredite. Voici un exemple de relation d'équivalence et un exemple de relation d'ordre sans exemple de transitivité.



Classes: (a, c) , (b, d)



Ordre partiel: $c R a$; $d R b$

FIG. 4.

2° Une relation seulement réflexive est à la fois une relation d'équivalence et une relation d'ordre partiel!

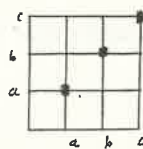


FIG. 5.

3. Exemple de problème: Soit la relation R sur l'ensemble E des nombres entiers de 1 à 8 ($E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$) définie de la façon suivante:

$$xRy \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + y^2 - 11x - 7y + 40) = 0 \quad (1)$$

Dessiner le diagramme et montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre partiel.

Le graphe a toutes les propriétés pour être celui d'une relation d'ordre partiel (6R5R2 et 7R4R3).