Enquête sur les significations du mot « relation »

M.-A. TOUYAROT,
École Normale d'Instituteurs de Caen.

La pédagogie des mathématiques évolue... On se préoccupe par exemple explicitement dans les nouveaux programmes de la liaison avec l'étude du français, des significations diverses que peuvent avoir certains mots, communs au langage mathématique et au langage usuel. Le premier mot-piège, à notre avis, est ce mot magique qui sonne le renouveau des mathématiques, le mot « relation ».

Qu'est-ce qu'une « relation mathématique »? (une notion essentielle, nul n'en doute, mais encore...). Est-ce une notion primitive? On sait qu'alors il n'est pas possible d'en donner une définition. Ainsi personne n'oserait définir la notion d'ensemble, mais chacun conçoit bien quel genre d'objet est désigné sous ce nom, et tout le monde le conçoit semble-t-il de la même façon (depuis que la crise des paradoxes est passée).

Si l'on se pose cette question entre collègues, on s'aperçoit qu'elle déclenche des discussions souvent vives et même passionnées. En effet il faut avouer que le mot recouvre selon les uns ou les autres des objets mathématiques différents, non sans « relations » il est vrai des uns aux autres.

Si l'on cherche auprès des auteurs de bonne renommée un soutien pour son propre point de vue, on constate que cette notion si essentielle est rarement définie de façon claire, que tout en tournant autour du même sujet, les définitions précises ne coïncident pas et que ce sujet semble attirer plus que d'autres les abus de langage reconnus à l'avance. (Cette seule constatation suffit à ôter l'envie d'exprimer sa propre opinion d'un ton péremptoire.)

Alors se pose le problème pédagogique qui nous intéresse : comment rendre cette notion intelligible aux élèves de Sixième? Comment faire en sorte que les élèves, changeant de professeur, n'aient pas l'impression que l'anarchie (*) règne dans le langage mathématique?

Il est fréquent en effet de ne pas comprendre que les conventions de langage ne sont que des conventions et qu'une certaine discordance à ce niveau ne ternit en rien la pureté et la concordance des idées qui sont derrière les mots, et que ce sont les idées et non les mots qui font progresser la mathématique.

(*) Ou plutôt le désordre (N.D.L.R)

Voici quelques échos d'une assez large enquête à travers la littérature (mathématique) menée au mois de mars par un groupe de collègues à la recherche de ces divers sens du mot « relation ».

Les dictionnaires (Larousse, Robert) nous ont donné les sens courants que l'on connaît : le sens de « récit, narration », celui de « personnes » avec lesquelles on entretient des liens d'affaire, d'amitié, etc., et aussi le sens « philosophique » qui concerne ces liens eux-mêmes, celui de « rapport » existant entre deux objets.

En mathématique, on s'est tourné d'instinct vers les sources : BOURBAKI. Citons quelques extraits des *Éléments* ou du *Fascicule de Résultats* qui accompagne le Livre I. (Édition 1960) (F. R., p. 8) :

« Un *ensemble* est formé d'*éléments* susceptibles de posséder certaines *propriétés* et d'avoir entre eux, ou avec des éléments d'autres ensembles, certaines *relations* » (voilà le mot lâché).

Dans ce premier livre qui présente la mathématique formelle, il apparaît de façon très précise que toute théorie mathématique est constituée à partir de « termes » et de « relations ». Une remarque (Livre I, p. 16) explique :

« Intuitivement, les termes représentent des *objets*, les relations représentent des *assertions* que l'on peut faire sur ces objets. »

Dans tout l'ouvrage, BOURBAKI continue à envisager en ce sens les relations qui sont constamment en jeu. Elles sont désignées par les expressions R,R$\{x\}$, R$\{x, y\}$, montrant que les lettres x, y figurent dans les « phrases » ainsi représentées. Elles sont continuellement traitées comme des propositions logiques.

Chez BOURBAKI les relations ne sont donc pas autre chose que des énoncés (on dit parfois aujourd'hui des « formules » ou encore des « expressions bien formées ») soumis au jugement logique : un tel énoncé est vrai si c'est un axiome ou s'il a été démontré; faux, s'il est démontré que sa négation est vraie.

D'autres auteurs adoptent le même point de vue :

— Marc BLANC-LAPIERRE *(Mathématique moderne à l'usage du physicien et de l'ingénieur)* (p. 27) :

« Notre pensée distingue trois sortes d'énoncés :

» — ceux qui représentent des termes;

» — ceux qui représentent des relations entre les termes;

» — ceux qui représentent les propositions que l'on obtient à l'aide d'une relation, pour un système de valeurs attribuées aux termes...

» Une relation renferme un ou plusieurs termes x, y, z variables, ce que l'on note : R$\{x\}$, R$\{x, y\}$, R$\{x, y, z\}$, etc.

» Pour tout système de valeurs a, b, c,... attribuées à ces variables, on peut dire si le nouvel énoncé obtenu R$\{a\}$, R$\{a, b\}$, R$\{a, b, c\}$, etc, a un sens ou n'en a pas.

» S'il a un sens ce nouvel énoncé prend le nom de *proposition.* »

(P. 30) :

« R$\{x\}$ est une relation monaire ou fonction propositionnelle à une variable.

» R$\{x, y\}$ est une relation binaire ou fonction propositionnelle à deux variables... »

— KURATOWSKI *(Introduction à la théorie des ensembles et à la topologie)* (p. 31) :

« On appelle une fonction propositionnelle de deux variables une *relation*, au sens de la logique. »

Poursuivons notre enquête...

Lorsque les variables x, y, etc., sont des *éléments d'ensembles donnés*, un fait intéressant se produit : à toute relation (logique) R$\{x\}$, R$\{x, y\}$, R$\{x, y, z\}$, se trouve associé l'ensemble des objets x ou des couples (x, y) ou des triplets (x, y, z)... pour lesquels la relation est vraie.

— Bourbaki (F. R., p. 21) :

« Une relation R entre un élément générique x d'un ensemble E et un élément générique y d'un ensemble F est une propriété du couple (x, y) et définit par suite une partie du produit E $\times$ F appelée *graphe* de R.

» Inversement, toute partie A de E $\times$ F est le graphe de la relation « $(x, y) \in$ A » entre x et y ».

Au lieu de considérer R comme s'appliquant aux objets x, y pris séparément, on la considère comme s'appliquant à un seul objet, encore variable, le couple (x, y), d'où la notation R$\{(x, y)\}$.

Regardons, avant d'aller plus loin, les *Instructions officielles* (février 1969).

— § Ensembles et relations... : « Une relation donnée entre les éléments de deux ensembles (distincts ou non) permet de construire un sous-ensemble de l'ensemble produit... »

L'existence de ce sous-ensemble n'est pas oubliée... Mais nous allons voir ailleurs ce que l'on en dit :

— Papy (MM I, p. 90) :

« On appelle relation tout ensemble de couples. »

— Kuratowski (ouvrage cité, p. 39) :

« On entend par relation (dans le sens de la théorie des ensembles) un sous-ensemble arbitraire R du produit cartésien X $\times$ Y (de deux ensembles X, Y donnés). »

— *Instructions officielles* (à quelques lignes de l'extrait précédent).

« ... A un autre niveau de langage, la relation ... *est* un sous-ensemble du produit cartésien E $\times$ B... »

Il y aurait donc deux sens : une relation *permet de construire* un ensemble de couples, ou bien elle *est* un ensemble de couples.

A ce point de l'enquête, nous ne nous estimons pas suffisamment éclairés. Peut-être trouverons-nous d'autres lumières du côté des fonctions...

— Bourbaki (E, p. 72) :

A partir des relations (toujours logiques) on voit apparaître une autre notion : celle de correspondance. « Le triplet (G, A, B) est la correspondance entre A et B définie par la relation R de graphe G. A est l'ensemble de départ, B est l'ensemble d'arrivée de cette correspondance. »

Quelques pas, et voilà les fonctions (p. 76) :

« On dit qu'un graphe F est un graphe fonctionnel si pour tout x il existe au plus un objet correspondant à x par F. On dit qu'une correspondance (F, A, B) est une fonction si son graphe est un graphe fonctionnel et si son ensemble de départ est égal à son ensemble de définition » (ensemble des x, premiers éléments des couples qui constituent F).

On dit qu'une telle fonction f est définie dans A et prend ses valeurs dans B; on dit aussi que c'est une application de A dans B.

Mais, quelques lignes plus loin (p. 77) :

« Nous emploierons souvent le mot fonction à la place de graphe fonctionnel. »

Considérant ce qui précède comme un abus de langage, une fonction, une application (expressions d'ailleurs exactement synonymes pour cet auteur) sont non pas des relations particulières, mais des *correspondances* particulières, c'est-à-dire, rappelons-le, des triplets (G, A, B).

— Kuratowski (même ouvrage, p. 38) : « Par fonction (application, transformation), dont les arguments parcourent l'ensemble X et dont les valeurs appartiennent à l'ensemble Y, nous entendons *tout sous-ensemble* f *du produit cartésien* $X \times Y$ qui a la propriété qu'à tout x de X correspond un et un seul y tel que (x, y) soit élément de f. »

« La notion de fonction est un cas particulier de celle de relation dans le sens de la théorie des ensembles. »

— Dieudonné (*Fondements de l'analyse moderne*, éd. 1968) (p. 5) :

« Un graphe fonctionnel dans $X \times Y$ est aussi appelé une application de X dans Y ou une fonction définie dans X et prenant ses valeurs dans Y. Habituellement, on parle d'une application et d'un graphe fonctionnel comme s'il s'agissait de deux sortes d'objets distincts en correspondance biunivoque et l'on dit alors « le graphe d'une application », mais il s'agit là seulement d'une distinction psychologique... »

— Papy (MM I, p. 181) :

« Une relation est appelée fonction si... »

Il n'est pas besoin d'allonger la citation pour voir qu'une fonction est encore en ce sens un ensemble de couples, cas particulier d'une relation. (Signalons en passant que pour Papy le graphe est le dessin qui représente l'ensemble des couples et non pas l'ensemble lui-même; autre source de malentendu!)

Essayons de résumer cet inventaire et d'en dégager ce qui nous intéresse. Chez Bourbaki apparaît une chaîne de notions que l'on peut schématiser ainsi :

Ensembles $\longrightarrow$	Propositions logiques $\longrightarrow$	Ensembles de couples $\longrightarrow$	Triplet d'ensembles
A B	$R\{x, y\}$ ou xRy avec $x \in A$ et $y \in B$	G avec $G \subset A \times B$	(G, A, B)

Voici comment Bourbaki désigne ces différents objets :

A ens. de départ B ens. d'arrivée	$R\{x, y\}$ *relation* (entre un élément de A et un élément de B)	G graphe de R et de Γ ou F graphe de f (fonctionnel)	(G, A, B) ou Γ correspondance (F, A, B) ou f *fonction* *ou application*

Pour Papy, Dieudonné, Kuratowski, on aura les étiquettes suivantes :

A B	R}x, y{ ?	G *relation* (de A vers B) F *fonction* *ou application*	

Deux points de vue se dégagent de cette enquête :

— d'une part le mot « relation » possède un sens *logique :* il désigne une assertion, proposition, fonction propositionnelle, avec éventuellement plusieurs variables. Il désigne donc une « phrase » et c'est pourquoi on peut parler des *relations* : « $y = 2x$ », « x est le frère de y », « $x + y = z$ », expressions qui se trouvent parfois abrégées lorsqu'on ne veut pas utiliser explicitement les lettres x, y, z... La première expression qui peut se lire « y est le double de x » peut s'écrire ... est le double de ...; de même la deuxième expression s'écrira : ... est le frère de... Pour que ces expressions aient un sens, il faut évidemment savoir par quoi on est autorisé à remplacer les pointillés, où se placent respectivement le premier et le deuxième élément du couple (x, y).

— D'autre part, dès que les variables décrivent explicitement un ou plusieurs ensembles, des sens *ensemblistes* se superposent au sens logique précédent. On en vient à dire que la relation *est* le graphe G ou bien *est* le triplet (G, A, B).

Ne serait-il pas plus « vrai » (et plus efficace pédagogiquement) de considérer que l'on désigne alors sous le nom de *« relation de A vers B »* (ou « relation dans A ») un *objet nouveau, défini par* la donnée simultanée des ensembles A, B et de la proposition $R(x, y)$ ou par la donnée des ensembles A, B et du graphe G, c'est-à-dire par le triplet (G, A, B).

C'est cet objet nouveau que l'on note $\mathcal{R}$, d'un signe en principe distinct du R figurant dans le $R(x, y)$ ou dans le xRy de la relation au premier sens.

Dans le cas particulier où $\mathcal{R}$ est une fonction, on la note f. L'expression $R(x, y)$ (ou l'expression xRy) est alors remplacée par $y = f(x)$. Étudier les propriétés de la relation, ou de la fonction, ce sera étudier $\mathcal{R}$, ou f. La phrase $R(x, y)$ elle-même n'a pas d'autre propriété que d'être vraie ou fausse (si elle a un sens) pour les objets x, y donnés.

Cette notion de relation, liée à un ou plusieurs ensembles, se *détache* ainsi de ses diverses composantes; elle apparaît par exemple comme une *propriété du triplet* (G, A, B) ou comme une propriété du triplet (A, B, $R(x, y)$). C'est par un processus d'abstraction analogue que l'on conçoit le nombre naturel comme propriété d'un ensemble fini (1).

(1) Une autre question à propos du langage : On parle de relation d'un ensemble vers un autre ou dans lui-même, mais que dire lorsqu'on considère plus de deux ensembles, ou bien un seul ensemble et une relation logique à une seule variable?

Le langage proposé par Kaufmann-Précigout (Mathématique pour le recyclage des ingénieurs et des cadres) répond de façon satisfaisante à cette question (p. 36) :

— Une proposition $R(x)$ à une variable décrivant un ensemble E définit une *relation monaire dans E.*

— Une proposition $R(x, y)$ à deux variables, décrivant séparément deux ensembles E, F (ou le même ensemble E), définit une *relation binaire dans* $E \times F$ (ou dans $E \times E$).

... (l'ordre E, F indique que E est l'ensemble de départ, F l'ensemble d'arrivée).

— Une proposition à n variables, décrivant n ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$ définira alors une *relation* n-*aire dans le produit* $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ de ces ensembles.

De quelle façon traduire cela en Sixième? En présentant (comme beaucoup le font) toute relation d'un ensemble vers un autre (ou dans lui-même) comme *définie par :*

— l'ensemble de départ E,

— l'ensemble d'arrivée F,

— une expression (proposition, lien verbal, propriété) notée R ou $x\mathrm{R}y$, ou $\mathrm{R}(x, y)$ qui indique le mode de liaison;

ou bien :

— un ensemble G de couples, formés chacun d'un élément de E et d'un élément de F.

La proposition $\mathrm{R}(x, y)$, relation au sens logique, joue dans la définition de $\mathcal{R}$ le même rôle que l'ensemble G. Aucune de ces deux données ne suffit seule à préciser la relation $\mathcal{R}$ dont il s'agit.

Les propriétés de $\mathcal{R}$ sont fondées soit sur l'étude logique des propositions $\mathrm{R}(x, y)$, soit sur l'étude du graphe associé à R (ce deuxième point de vue est le plus accessible aux débutants).

Si l'on choisit par exemple un ensemble de personnes E et la proposition « x est le frère de y », les propriétés de la relation entre les éléments de E ainsi définie dépendent tout autant du choix de cet ensemble que du choix du mode de liaison... « est le frère de... »

On saura aussi que l'expression formelle $x\mathrm{R}y$, utilisée à la place de $\mathrm{R}(x, y)$ ne signifie pas qu'il existe obligatoirement un « lien verbal » qui peut se mettre à la place de R entre x et y...

Lorsqu'on se donne au départ le graphe, il peut être intéressant de rechercher *« un »* lien verbal permettant d'exprimer *« une »* proposition $\mathrm{R}(x, y)$ associée à ce graphe, mais rien n'autorise à prétendre rechercher *« le »* lien verbal (c'est-à-dire sous-entendre qu'il existe et soit unique).

Des recherches dans le même esprit consistent à remplacer une proposition connue $\mathrm{R}(x, y)$ par d'autres propositions qui peuvent être associées au même graphe (équivalentes), donc telles que la relation établie d'un ensemble vers l'autre ne change pas. C'est une voie féconde pour l'avenir : résolution d'équations et « lieux géométriques » en particulier.

On peut aussi chercher à définir la réciproque d'une relation connue $\mathcal{R}$. Il va de soi qu'il ne s'agit pas de réciproque de la seule relation logique $\mathrm{R}(x, y)$. On ne connaît de réciproque pour une proposition logique que dans le cas d'une implication... et une telle réciproque n'a rien à voir avec ce que nous cherchons ici. Il s'agit de la réciproque de cette relation $\mathcal{R}$ au sens général (de la correspondance, selon Bourbaki).

Elle se définit en *échangeant les rôles des deux ensembles, et il n'est pas nécessaire de changer la relation R*(x, y). On doit considérer seulement qu'au lieu d'être une propriété du couple (x, y), c'est maintenant une propriété du couple (y, x). Il est donc sûr que si $\mathrm{R}(x, y)$ est vraie pour le couple (x, y), elle est vraie pour le couple (y, x). C'est lorsqu'on cherche à trouver un « lien verbal » pour cette nouvelle relation que l'on peut être amené à un énoncé différent du premier, surtout si l'on veut nommer d'abord l'élément du nouvel ensemble de départ puis celui du nouvel ensemble d'arrivée (ainsi on passe d'une forme $x\mathrm{R}y$ à une forme $y\mathrm{R}'x$... Si x et y désignent les mêmes objets, ces deux expressions doivent être simultanément vraies ou fausses).

Exemple : Prenons un ensemble de grandes personnes A, ensemble de départ, un ensemble d'enfants B, ensemble d'arrivée. L'énoncé : « x est le père de y » avec $x \in A$ et $y \in B$. Ceci définit une relation $\mathcal{R}$ de A vers B.

La relation réciproque est définie par le même ensemble d'enfants B, ensemble de *départ*, le même ensemble de grandes personnes A, ensemble d'*arrivée*, le même énoncé : « x est le père de y » avec $x \in A$ et $y \in B$; ***ou bien*** l'énoncé : « y est fils de x » avec $x \in A$ et $y \in B$; ***ou bien*** l'énoncé : « x est fils de y » avec $x \in B$ et $y \in A$ (et peut-être d'autres encore).

Lorsqu'on utilise des pointillés à la place des lettres, le premier énoncé devient « ... est le père de ... » Les premiers pointillés doivent être occupés par les éléments de l'ensemble de départ. Alors, pour la relation réciproque il faut évidemment changer la tournure et adopter l'une de celles qui placent en tête les éléments du nouvel ensemble de départ, par exemple : « ... est fils de ... »

C'est le seul fait ***de ne pas utiliser de lettres*** et de ***sous-entendre la place occupée par les éléments des ensembles de départ et d'arrivée*** qui impose ce changement de tournure.

Le sujet n'est pas épuisé avec ces quelques réflexions qui ont surtout « enfoncé des portes ouvertes »... Mais nous pensons à tout ce que représente pour nos élèves de Sixième ce thème des relations, qui va pouvoir jouer à plein d'un bout à l'autre de l'année. Grâce à lui, ils vont trouver plus que jamais de quoi exercer leur réflexion dans les domaines les plus divers et cependant dans le même esprit.

Il n'est sans doute pas inutile de bien connaître tous les aspects du terrain avant de s'engager avec les enfants dans cette aventure.

M.-A. T.

Verbalisme

« Au commencement était le verbe... »
(Jean I. I.)

Le Chimpanzé qui se saisit d'une perche pour décrocher une banane ne fait pas de phrases. Cela n'empêche pas son action d'être efficace, et il est peu d'esprits chagrins pour affirmer qu'il n'y comprend rien.

Dans un même ordre d'idées, il nous est tous arrivé de découvrir une solution à un problème avant d'avoir suivi une démarche verbale. Enfin et surtout, j'ai toujours eu le sentiment d'avoir bien compris une situation quand je la conçois en quelque sorte globalement, quand je peux m'y mouvoir librement sans repasser par les détours verbaux qui me l'ont fait connaître.

De là à conclure qu'on pourrait bien faire des mathématiques sans phrases, et même qu'elles en seraient plus pures et plus efficaces, il n'y a qu'un pas que j'avais allègrement franchi en octobre dernier. J'y voyais bien des avantages.

D'abord, l'algèbre pourrait ainsi être vraiment comprise alors que, le plus souvent, elle n'est pour nos élèves imprégnés de paroles, qu'un mécanisme à automatisme plus ou moins contrôlé. Et puis ce serait peut-être le moyen de donner à