

Aucune préoccupation n'est plus vive, chez les maîtres, que celle du choix d'un bon vocabulaire. Malheureusement, les mots ont une vie ; donc ils changent, certains naissent, d'autres meurent. Pour la langue elle-même, c'est une bonne chose qu'elle soit vivante. Pour l'enseignement, cela présente des difficultés.

Le sujet n'est pas nouveau. C'est une des raisons qui animent la Commission du Dictionnaire de l'A.P.M.E.P., responsable de la rédaction des notices insérées dans chaque Bulletin et dont la réunion forme ce recueil « La Mathématique parlée par ceux qui l'enseignent » en perpétuelle évolution. On trouvera d'ailleurs dans ce Bulletin deux de ces notices : « fraction », « quotient ».

Le problème du vocabulaire se pose-t-il de façon particulièrement aiguë à propos de la réforme en Sixième ? Si nous en croyons nos correspondants, la réponse est « oui ».

En tout cas, toutes les occasions sont bonnes d'étudier le sens des mots, la vie des mots. Et ce que nous ferons pour la Sixième, nous en profiterons tous, élèves et professeurs.

- 347 J.-M. CHEVALLIER : Ne dites pas..., mais dites...
 352 E. DEHAME : Notions et vocabulaire modernes en Sixième.
 363 M^{me} M.-A. TOUYAROT : Enquête sur les significations du mot « relation ».
 369 G.-H. CLOPEAU : Verbalisme.
 371 *Bribes* par H. BAREIL, P. JACQUEMIER, W. MOUNTEBANK.

Ne dites pas... mais dites...

J.-M. CHEVALLIER,

Secrétaire de la Commission du Dictionnaire de l'A.P.M.E.P.

Ce petit « Guide du langage » ne vise, en dépit de son titre, ni à interdire, ni à imposer ; d'ailleurs la langue mathématique, comme toutes les langues, ne connaît pour maître que l'usage, et c'est une coupable imprudence de légiférer contre lui. C'est pourquoi dans la plupart des cas les « conseils » donnés seront en fait de simples

constatations; parfois on a essayé de dégager un choix ou une tendance lorsque l'usage hésite ou évolue; c'est seulement lorsqu'il risque de créer des confusions graves qu'on a cru devoir en faire la critique. La même ligne de conduite a été adoptée en ce qui concerne les notations. Sous ces réserves, nous croyons cependant nécessaire d'attirer l'attention des collègues sur les inconvénients qui résultent, surtout au niveau élémentaire, d'une trop grande dispersion du vocabulaire et des notations : si l'on multiplie l'individualisme des auteurs de manuels par l'individualisme des enseignants, le « produit » sera la confusion chez nos élèves. Pensons à eux!

1. Ensembles.

1.1. Lien d'*appartenance* entre un élément et un ensemble : \in , lu « est élément de » ou « appartient à »; *non-appartenance* : \notin .

1.2. Définition des ensembles dite *en extension*: l'ensemble constitué des trois éléments a, b, c se note $\{a, b, c\}$, l'ordre des lettres n'intervenant pas. Proscrire comme *fautive* une écriture telle que $\{a, b, a\}$ est sévère, mais il faut absolument éviter de dire qu'elle représente un ensemble à *trois* éléments, c'est en réalité la *paire* $\{a, b\}$. On rappelle par ailleurs la distinction entre l'élément a et le *singleton* $\{a\}$; l'écriture $a \in \{a\}$ est correcte.

1.3. Définition des ensembles dite *en compréhension* par une « propriété caractéristique » de leurs éléments : notations $\{x; x \text{ a la propriété } p\}$, $\{x \mid x \text{ a la propriété } p\}$, le plus souvent abrégées en $\{x; p\}$ ou $\{x \mid p\}$. Rejeter les écritures telles que $\{\text{les doigts de la main droite}\}$ qui n'ont d'ensembliste que l'accolade.

1.4. *Ensemble vide* : \emptyset ; quel que soit l'élément a , $a \notin \emptyset$.

1.5. On rappelle qu'il est impossible de considérer « l'ensemble de tous les ensembles » sans tomber dans des paradoxes. Élémentairement, il sera sage de se placer d'emblée dans un *univers* (ou *référentiel*) dont on s'interdira de sortir, afin d'éviter des difficultés de langage qui, à ce niveau, seraient des subtilités.

2. Parties d'un ensemble, sous-ensembles.

(Pour l'inclusion, voir § 7.)

2.1. *Intersection*: $A \cap B$, lu « A inter B »; on dit que deux ensembles sont *disjoints* si leur intersection est l'ensemble vide. Se rappeler que l'intersection est elle-même un ensemble, éventuellement un singleton, *jamais* un élément a : on peut écrire $A \cap B = \{a\}$, mais non $A \cap B = a$.

2.2. *Réunion*: $A \cup B$, lu « A union B ».

2.3. La *différence ensembliste*, la *différence symétrique*, le *complémentaire* ne sont pas explicitement au programme; leurs notations respectives les plus usuelles sont :

\setminus (de préférence à $-$ pour éviter toute confusion avec la soustraction), Δ , et \complement ou le

surlignage : $A \setminus B$, $A \Delta B$, $\bigcap A$ ou \overline{A} . (On croit parfois devoir préciser \bigcap en \bigcap_B : ce n'est pas absolument recommandable si l'on veut garder le parallélisme entre la complémentarité ensembliste et la négation logique; on dispose d'ailleurs de $E \setminus A$ pour la nuance qu'on souhaite exprimer ainsi.)

3. Produit cartésien; couple.

3.1. Le produit cartésien ne figure pas explicitement au programme; si le mot et la notation $A \times B$ risquent de créer des confusions avec le produit de deux nombres, l'expérience semble prouver que la notion « passe » bien chez les élèves.

3.2. *Couple* : notation (a, b) . A distinguer rigoureusement de la paire $\{a, b\}$ en ce sens que (a, b) diffère de (b, a) et que (a, a) est un véritable couple. Éviter d'appeler a et b les « éléments » du couple (a, b) ; on peut dire *première et deuxième composantes*. Généralisation : triplet (a, b, c) , etc.

4. Ensembles numériques.

4.1. L'ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ est l'ensemble des *naturels*; si les élèves ont été habitués à dire « entiers » dans l'enseignement primaire, l'expression « entiers naturels » semble tout indiquée pour faciliter la transition.

4.2. L'ensemble \mathbb{Z} est l'ensemble des *entiers*; l'expression « entiers relatifs », actuellement pléonastique, ne présente pas grand intérêt; elle peut être conservée à titre transitoire.

4.3. On peut désigner par \mathbb{D} l'ensemble des décimaux, par $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, \dots$, l'ensemble des décimaux ayant 1, 2, ... décimales (décimaux d'ordre 1, 2, ...).

4.4. Une convention assez générale consiste à marquer d'un astérisque les symboles des ensembles précédents (ainsi d'ailleurs que \mathcal{Q} et \mathbb{R}) lorsque ces ensembles sont privés de l'élément zéro; par exemple $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$. On a également coutume de les marquer d'un + pour indiquer le sous-ensemble de leurs éléments positifs ou nuls, par exemple \mathbb{Z}^+ .

5. Ensembles géométriques.

5.1. Les mots *droite, demi-droite, segment, plan, demi-plan, cercle, disque* ne prêtent pas à controverse au niveau élémentaire, non plus que les adjectifs *fermé, ouvert, semi-ouvert* qui les précisent en cas de besoin.

5.2. Le mot *secteur* (auquel « angulaire » n'ajoute rien) ne sert guère que dans les énoncés de caractère très général; il peut donner lieu — suivant la définition adoptée — à quelques difficultés lorsque les bords sont confondus. De toute façon il est réservé à la désignation d'ensembles ponctuels (les anciens « angles saillants »

et « angles rentrants »); dans la plupart des cas pratiques les mots *saillant* et *rentrant*, employés seuls (substantivement), le remplacent avantageusement. Par exemple : si deux saillants aigus sont adjacents, leur réunion est un saillant (on évitera naturellement de parler de « somme »).

L'ancienne expression *secteur circulaire* — ou *secteur de disque* — reste utilisable mais l'abrégé en « secteur » comme on le faisait fréquemment ne peut plus être admis.

5.3. Le mot *angle* — dont le programme *tolère* assez malencontreusement la synonymie avec *secteur* — est en fait employé par les manuels avec des acceptions discordantes; un sondage fait par l'A.P.M. auprès des professeurs n'a pas donné de résultats nets; dans l'état *actuel* des choses, c'est un mot dont il convient de se défier. On peut parler de « classe angulaire » de secteurs; le mot « amplitude » est également controversé.

5.4. Le sens du mot *bande* — partie du plan comprise entre deux parallèles — était devenu classique depuis plusieurs années. Le changement de vocabulaire introduit par certains auteurs (« bande » pour la réunion des bords, et « ruban » pour l'ancienne « bande ») est d'un intérêt très discutable.

5.5. *Notations*. Il subsiste des divergences notables d'un manuel à l'autre; un essai d'harmonisation tenté par le *Bulletin* a été adopté localement par certains collègues. Nous le donnons à titre indicatif :

Droite : (AB) , (xy) ;

Demi-droite : $[AB)$, $[Ax)$;

Segment : $[AB]$, de « longueur » AB ;

Saillant : $[\widehat{xOy}]$, de « classe angulaire » \widehat{xOy} ;

Rentrant : $[\widetilde{xOy}]$, de « classe angulaire » \widetilde{xOy} ;

Arc : $[\widehat{AB}]$ ou $[\widetilde{AB}]$, de classe \widehat{AB} ou \widetilde{AB} ;

Bande : $[D, D']$.

Remarques :

1. En cas d'ensembles ouverts ou semi-ouverts, changement habituel du sens des crochets.

2. Je ne maintiens pas ma suggestion du n° 268 d'appeler « arceau » l'ensemble ponctuel $[\widehat{AB}]$ ou $[\widetilde{AB}]$.

6. Relations.

6.1. L'ensemble de départ ou source étant E , l'ensemble d'arrivée ou but étant F , le graphe étant G , on dit « relation de E vers F » et l'on peut préciser « par G ».

6.2. Lorsque F se confond avec E , on peut dire « relation dans E »; on a intérêt à réserver « relation sur E » pour le cas où la relation est définie à partir de n'importe quel élément de E et aussi vers n'importe quel élément de E (par exemple, relation d'équivalence sur E , relation d'ordre total sur E , relation d'ordre partiel dans E).

6.3. Réserver la flèche strictement aux applications : $E \rightarrow F$; ne pas confondre cette flèche, écrite entre les ensembles, avec le béquillon \mapsto (beaucoup plus précis et également réservé aux applications) qu'on fait précéder de l'élément qui décrit l'ensemble de départ, par exemple l'application de \mathbb{N} dans \mathbb{N} définie par $n \mapsto 3n$.

7. Relations particulières.

(entre ensembles ou nombres).

L'attention est attirée sur le fait que le langage parlé énonce en général les symboles qui vont suivre sous une forme *adjective*; cette abréviation, tolérée bien qu'abusives, ne doit pas faire oublier que dans l'écriture ces symboles (ainsi que le symbole d'appartenance \in) ont exclusivement valeur de *verbes*.

7.1. *Égalité*: $=$ « est égal à »; *non-égalité*: \neq « est différent de ».

7.2. *Inclusion*: \subset « est inclus dans »; *non-inclusion*: $\not\subset$ « n'est pas inclus dans ». Après beaucoup d'hésitations, la tendance est nettement favorable au sens « large », c'est-à-dire que $A \subset A$; si l'on veut exprimer que l'inclusion est « stricte » on écrit : « $B \subset A$ et $B \neq A$ ».

7.3. *Supériorité et infériorité*:

$>$ « est supérieur à »; $<$ « est inférieur à »;

\geq « est supérieur ou égal à », « est au moins égal à », « n'est pas inférieur à »;

\leq « est inférieur ou égal à », « est au plus égal à », « n'est pas supérieur à ».

7.4. Les signes d'opérations dans \mathbb{N} ou \mathbb{Z} ne font pas de difficulté.

8. Symboles logiques.

On peut considérer que leur emploi n'est pas indispensable en Sixième et se contenter en particulier des mots *non* pour la négation, *et* pour la conjonction, *ou* pour la disjonction. On ne saurait trop mettre en garde les collègues contre les pièges des symboles \Rightarrow et \Leftrightarrow , imprudemment introduits par beaucoup de manuels. A ce niveau, et en l'absence de quantificateurs, le rejet pur et simple paraît une attitude sage; en tout cas, contrairement à la remarque du § 7, on notera que ces symboles *n'ont pas valeur de verbes*, si bien que leur traduction par « implique » et « équivaut à » aboutit presque régulièrement à un contre-sens. (Voir l'article de M. GLAYMANN, *Fonctions caractéristiques des connecteurs*, Bulletin 258, p. 165.)

J.-M. C.

Tout le monde sait qu'il y a des dictionnaires qui ne se mentionnent pas. Le mot *mathématique* figure-t-il parmi les notices de « mathématique parlée par ceux qui l'enseignent » ?

Réponse : p. 373; ou mieux : consultez *votre* exemplaire.

Notions et vocabulaire modernes en Sixième

E. DEHAME,

et l'équipe des expérimentateurs de Poitiers-Couhé

1. Mise en garde contre l'abus du vocabulaire et du symbolisme.

1.1. *En quoi consiste l'introduction en Sixième de mathématiques dites « modernes » ?*

Une croyance trop répandue consiste à assimiler les mathématiques modernes à un langage un peu pédant réservé à quelques initiés. S'il est vrai que le traité de N. BOURBAKI paraît plus hermétique aux non-mathématiciens que les traités de mathématiques classiques, il est absolument hors de question d'introduire en Sixième l'esprit et le langage de cet éminent mathématicien.

La réforme actuelle de l'enseignement des mathématiques dans le premier cycle ne devrait pas s'appeler « introduction des mathématiques modernes », car il n'y a pas deux sortes de mathématiques, mais une science unique — la mathématique — qui évolue avec le temps. Et personne ne peut prétendre introduire en Sixième la mathématique de 1969.

Plutôt que de « mathématiques modernes », il faudrait parler d'« enseignement moderne de la mathématique ». Contrairement à l'enseignement traditionnel qui se bornait trop souvent à dresser les élèves à des techniques opératoires et à la résolution de problèmes-types, cet enseignement moderne est une initiation à de véritables notions mathématiques à partir de situations familières :

— Un premier objectif de cet enseignement est d'amener les élèves à raisonner, à prendre des initiatives, à se poser des problèmes sur des sujets qui ne comportent aucune notion mathématique apparemment nouvelle.

— Ensuite, par le rapprochement de plusieurs situations familières comportant une analogie de structure non perçue *a priori* par les élèves, un nouveau concept mathématique s'élabore dans leur esprit.

— C'est seulement quand les élèves ont pris conscience de ce concept que se fait sentir la nécessité d'un mot pour le désigner, et éventuellement d'un symbole pour le noter.

— Ensuite, ce concept, appelé par son nom, est appliqué à l'étude d'autres situations.

Les fiches de Poitiers sur l'introduction de la notion d'application fournissent un exemple où ces quatre étapes sont nettement démarquées (voir ci-dessous : § 3).

1.2. Dangers de l'abus du vocabulaire et du symbolisme.

L'introduction prématurée d'un vocable ou d'un symbole présente, entre autres, les dangers suivants :

— Le risque qu'un contre-sens systématique sur ce vocable ou sur ce symbole s'établisse dans l'esprit de l'élève, y demeure au cours de toutes ses études et lui rende obscures toutes les phrases où figure ce vocable ou ce symbole.

— La perte d'intérêt pour une étude ultérieure du concept sous-jacent que l'enfant croit déjà posséder.

— L'incitation à jongler avec les mots ou avec les symboles en faisant abstraction de leur sens : encouragement au verbalisme, développement d'automatismes nouveaux aussi néfastes que les automatismes que nous reprochons à l'enseignement traditionnel.

L'engouement pour la mathématique des élèves des classes de Sixième expérimentales nous laisse espérer que l'enseignement moderne de cette discipline préservera un grand nombre d'entre eux de la désaffection à l'égard des études scientifiques, si fréquente dans nos actuelles classes de Quatrième et de Troisième. Cet espoir risque d'être déçu si nous cédon à la tentation d'introduire dès la Sixième un trop grand nombre de mots qui font partie du langage mathématique des adultes, mais qui, chez l'enfant de 11 ans, n'évoquent qu'une idée vague, un concept mal assimilé; le discours mathématique risquerait de n'être compris que par quelques privilégiés et de se réduire à un verbalisme vide de sens pour les autres : nous ne sortirions pas des préjugés actuels sur la « bosse des maths ».

Or une conclusion indéniable de l'expérience sur l'introduction en Sixième des nouveaux programmes est précisément la possibilité d'éliminer ces préjugés : peu d'élèves se déclarent « faibles en mathématiques », et la nouveauté de la matière et de la méthode d'enseignement a permis aux « faibles en calcul » de l'école primaire de s'épanouir.

Ne gâchons pas cet espoir de revalorisation des études scientifiques en cherchant à trop bien faire! Une certaine sobriété dans le choix des notions (et par suite des symboles et des mots) à introduire est une des meilleures garanties de succès.

1.3. Manuels ou fiches?

Or, si on ouvre l'un quelconque des manuels récemment parus sur le nouveau programme de Sixième, on y trouve un grand nombre de notions ne figurant pas explicitement au programme : réflexivité, symétrie, transitivité, associativité, commutativité, distributivité, etc., et même parfois des notions de logique : « ou non exclusif », « si et seulement si », etc.

Il est peu vraisemblable qu'un élève moyen soit capable de posséder correctement toutes ces notions en sortant de Sixième. Le professeur qui utilise le manuel devra donc faire un choix parmi toutes ces notions.

Pour chaque classe C de Sixième, on peut chercher à définir l'ensemble E_C des connaissances qu'il est raisonnable d'exiger des élèves à la fin de l'année scolaire. Cet ensemble dépend du nombre d'élèves, de leur niveau, de l'horaire et peut-être aussi du dynamisme du professeur.

Il semble que les auteurs de manuels aient choisi de présenter dans leur ouvrage la borne supérieure (la réunion) de tous les ensembles E_C . Ce choix est facilement

compréhensible (les manuels s'adressent à toutes les classes) et présente l'intérêt d'apporter aux professeurs une information sous une forme directement enseignable, ce qui complète utilement les autres formes de recyclage (livres destinés aux professeurs).

Le programme officiel — heureusement pas trop explicite — peut être considéré comme la borne inférieure (l'intersection) des ensembles E_c (1). Seul le professeur de la classe C est qualifié pour déterminer E_c , mais il ne peut le faire que par approximations successives, selon les réactions des élèves.

Comment utiliser le manuel? Le professeur pourrait recommander aux élèves la lecture de certains paragraphes (ceux qui traitent de questions appartenant à E_c) et l'étude des exercices correspondant à ces paragraphes. Mais j'avoue que cette solution n'est pas facilement réalisable : le manuel forme un tout; les notions hors-programme introduites dans un chapitre sont utilisées dans les chapitres suivants. Je crains que le seul choix effectivement réalisable consiste à conserver intégralement les deux premiers tiers du manuel et à laisser tomber le dernier tiers, ce qui n'est évidemment pas une solution satisfaisante.

La méthode d'enseignement par fiches est plus souple. Les fiches sont distribuées aux élèves au début de chaque séance. Même si les fiches ont été élaborées dans le même esprit d'universalité que les manuels, c'est-à-dire si elles présentent la borne supérieure des ensembles E_c , il est toujours possible au professeur de ne pas distribuer une certaine fiche, et éventuellement de la remplacer par une fiche de sa fabrication ou par des exercices dont il dicte l'énoncé.

L'utilisation d'un manuel ou de fiches ne sont pas les seules méthodes possibles. Le professeur peut, par exemple, dicter des énoncés d'exercices choisis dans les manuels ou les fiches actuellement édités, et ensuite élaborer avec la classe une synthèse d'où se dégage une nouvelle notion mathématique.

De toute façon, quelle que soit la méthode adoptée, le rôle du professeur pour la détermination des notions à introduire est primordial. Ce serait un grave danger de croire que tout ce qui figure dans les manuels constitue un bagage indispensable pour l'entrée en Cinquième.

1.4. Un minimum de vocabulaire est toutefois nécessaire.

Quand un concept est acquis, il n'y a pas lieu d'hésiter à lui donner un nom. Une notion qui n'a pas reçu de nom se fixe difficilement dans la mémoire de l'enfant.

La mémoire, dira-t-on, n'a rien à faire dans un enseignement qui se veut moderne! Personnellement, je ne suis pas de cet avis, mais je pense que la fixation dans la mémoire est simultanée à l'acquisition du concept : il ne s'agit pas de fixer une phrase ni une formule, mais un ensemble de situations où intervient le concept.

Définir dans toute sa généralité la réunion de deux ensembles au moyen d'une phrase est un exercice d'expression orale ou écrite qui a une valeur formatrice indéniable; mais tant que l'enfant n'est pas capable de bâtir lui-même cette phrase, il serait vain et même nuisible de la lui faire apprendre par cœur. Dans une première phase de l'initiation, le concept de réunion peut être mémorisé à la fois visuellement par des diagrammes de Venn et affectivement par le souvenir des exemples concrets de

(1) Sauf en ce qui concerne la mesure (voir 2.5.).

réunion qui ont de plus frappé l'enfant (la réunion de l'ensemble des internes et de l'ensemble des élèves qui font de l'anglais, etc.). Mais que resterait-il dans la mémoire de l'enfant si celui-ci ignorait que tous ces exemples illustrent une même notion qu'on appelle la réunion ?

Le symbole, comme le mot, favorise la mémorisation; il a même l'avantage d'être plus visuel. Mais est-il vraiment nécessaire que chaque notion soit accompagnée à la fois d'un mot et d'un symbole? Si la notion (hors-programme) de complémentaire peut éclairer certaines parties du programme de Sixième, je ne trouve pas que le symbole \complement_A soit particulièrement éclairant.

On pourrait penser que, pour des enfants, un vocabulaire choisi par eux ou, tout au moins puisé dans leur univers, serait préférable au vocabulaire mathématique des adultes. Ce principe me paraît défendable jusqu'à un certain âge, mais je pense qu'à partir de la Sixième il ne faut pas en abuser : tous les ans, les élèves seraient amenés à réviser leur vocabulaire; l'ensemble des mots introduits au cours de leur scolarité en serait alourdi.

Toutefois, si les notations normalisées sont des sources de confusion, on peut utiliser des notations provisoires. Ainsi, dans

$$-(-6) - (+4) = +2$$

le signe $-$ a trois sens différents; cette ambiguïté disparaît si on écrit :

$$\text{opp}(\bar{6}) - \overset{\dagger}{4} = \overset{\dagger}{2}.$$

Signalons enfin que certaines locutions qui ne correspondent pas à proprement parler à des notions mathématiques peuvent être introduites pour faciliter le dialogue avec les élèves : par exemple, il est commode de parler du « lien verbal » d'une relation, de sa représentation sagittale, etc.

2. Notions et vocabulaire introduits à Poitiers.

Les nouveaux programmes de Sixième ont été expérimentés deux années consécutives (1967-1968 et 1968-1969) par l'équipe de Poitiers-Couhé. Il s'agit ici des notions qui ont été introduites durant la deuxième année d'expérience (1968-1969).

Les notions d'ensemble et de relation intervenant tout au long du programme, il a paru naturel de les introduire en début d'année et de leur consacrer une bonne partie du premier semestre, *en alternance avec le calcul numérique qui n'a pas été négligé.*

2.1. Les ensembles. ont été introduits à partir d'exemples tirés de la vie courante. Le symbole \in a été lu « est élément de » plutôt que « appartient à », afin d'éviter la confusion entre l'appartenance et l'inclusion (et aussi entre l'appartenance mathématique et l'appartenance au sens commun : « le ballon de football appartient à l'équipe »). C'est aussi pour éviter cette confusion qu'il nous a semblé préférable de n'introduire l'inclusion qu'après l'étude des relations.

Les instructions officielles du 28 février 1969 précisent qu'il n'y a pas lieu de s'attarder sur la définition en extension et la définition en compréhension; en effet,

il n'est pas nécessaire d'introduire ces mots, mais il est intéressant de mettre en évidence ces deux façons de définir un ensemble et de proposer en exercice le passage de l'une des définitions à l'autre pour un même ensemble : c'est l'occasion de faire en même temps un exercice de mathématiques et un exercice d'utilisation de la langue française. Il est bien entendu que la définition en compréhension pour un élève de Sixième consiste à exprimer en français une propriété caractéristique (1) des éléments de l'ensemble et que l'écriture

$$\{x; x \in E, x \text{ possède la propriété } p\}$$

n'est pas à recommander en Sixième, surtout au début de l'année, les élèves n'étant pas habitués à utiliser une lettre comme variable. A défaut de variable, nous avons renoncé aux accolades pour les ensembles définis en compréhension : nous n'avons pas remplacé

$$\{x; x \in \mathbb{N}, x < 10\}$$

par l'écriture incorrecte

$$\{\text{naturels inférieurs à } 10\}$$

mais par la définition en français :

« l'ensemble des naturels inférieurs à 10 »

Les accolades ont donc été réservées exclusivement aux définitions en extension :

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

2.2. La notion de relation. (2) est une des plus faciles pour un élève de Sixième et peut être abordée dès le début de l'année à partir de situations familières.

Une relation de E vers F est tout d'abord définie par les trois données suivantes :

- un *ensemble de départ* E,
- un *ensemble d'arrivée* F,
- un *lien verbal*.

Il est ensuite possible de considérer des relations qui ne sont pas définies par un lien verbal, mais par un ensemble de couples dont le premier terme est élément de E et dont le second est élément de F. Nous n'avons pas introduit les termes « graphe » ni « produit cartésien », mais le mot « couple » demande à être précisé et bien distingué du mot « paire ».

L'élève est en général séduit par les schémas *sagittaux* et *cartésiens* utilisés pour représenter les relations, et il éprouve un sentiment de réconfort à pouvoir exprimer clairement une situation parfois compliquée sans se heurter aux difficultés que présente pour lui l'utilisation de la langue française.

La notion de *relation réciproque* d'une relation donnée est naturelle et son interprétation sur les schémas est facile. Le passage du lien verbal d'une relation au lien

(1) Ce mot n'a pas été employé devant les élèves. Estimant qu'une véritable initiation à la logique ne pouvait être entreprise qu'en Cinquième, nous avons écarté tout le vocabulaire de la logique, et nous n'avons pas utilisé de symboles tels que \Rightarrow , \Leftrightarrow , \forall , \exists .

(2) Nous avons dit « relation » et non « relation binaire ». N'ayant pas à envisager en Sixième de relations entre plus de deux éléments, ce qualificatif nous a paru encombrer inutilement le langage.

verbal de la relation réciproque donne d'ailleurs l'occasion de « cultiver chez l'élève le souci d'expression » comme le recommandent les instructions officielles.

Par l'étude des schémas sagittaux, on est conduit à s'intéresser plus particulièrement aux relations pour lesquelles, de chaque élément de l'ensemble de départ, part une flèche et une seule : ce sont les *applications* (voir § 3). Une application dont la réciproque est une application est une *bijection*.

C'est toujours à partir d'exemples tirés de la vie quotidienne que la *composition de deux relations* a été présentée : si \mathcal{R} est une relation de E vers F, \mathcal{S} une relation de F vers G, on peut définir une relation de E vers G que l'on appelle, pour les élèves de Sixième, \mathcal{R} suivie de \mathcal{S} .

2.3. Commentaires.

Dans le paragraphe 1 du programme de Sixième, on lit : « description précise de relations et de leurs propriétés ». Comment doit-on interpréter cela ? Les instructions du 28 février laissent entendre que les mots « symétrie », « réflexivité » et « transitivité » peuvent être prononcés, mais qu'il faut éviter le mot « bijection ».

Nous ne sommes pas d'accord avec cette interprétation.

— D'abord parce que les notions d'application et de bijection (surtout de bijection) sont facilement assimilées par les élèves et peuvent être utilisées tout au long du programme. S'il ne fallait conserver qu'une seule de ces deux notions, ce serait celle de *bijection* (qu'on peut présenter sans parler d'application) : on trouve des bijections partout, depuis la première leçon où on est amené à coder de deux façons différentes les éléments d'un même ensemble jusqu'à la dernière où l'on met en évidence une bijection de \mathbb{N} sur \mathbb{Z}^+ ; la notion de bijection est une source de jeux (codes secrets) qui intéressent beaucoup les élèves.

— Ensuite parce que l'expérimentation du nouveau programme de Cinquième a montré que l'étude des relations dans un ensemble présentait des difficultés, en particulier à propos de la transitivité : il faut déjà avoir une certaine formation mathématique pour admettre que l'implication :

$$\text{« si } x\mathcal{R}y \quad \text{et} \quad y\mathcal{R}z, \quad \text{alors } x\mathcal{R}z \text{ »}$$

est vérifiée quand il n'existe dans $E \times E$ aucun couple d'éléments distincts (x, y) tel que $x\mathcal{R}y$.

L'antisymétrie est aussi une notion difficile. Aussi avons-nous considéré que les relations d'équivalence et les relations d'ordre sont entièrement en dehors du programme de Sixième (en cela, nous sommes d'accord avec les instructions officielles).

Toutefois, des exercices où interviennent des relations dans un ensemble E (cas où E est à la fois ensemble de départ et ensemble d'arrivée), mais ne conduisant à aucune notion nouvelle, ont permis de préciser la notion de couple : distinction entre les couples (a, b) et (b, a) , introduction de couples du type (a, a) .

2.4. Notions sur les parties d'un ensemble.

Les notions de *sous-ensemble* (ou *partie*) et *d'inclusion*, ainsi que le symbole \subset ont été introduits plusieurs mois après le symbole \in . Plusieurs exercices avaient pour but la distinction de ces deux symboles et de ces deux notions. Cette expérience n'a

pas été très concluante : même introduites à deux époques éloignées l'une de l'autre, ces deux notions sont encore souvent confondues par les élèves; il faudra y revenir en Cinquième.

Des exercices de dénombrement (au moyen d' « arbres ») ont permis de construire toutes les parties d'un ensemble et de donner une première idée de la notion de complémentaire, mais c'est seulement en Cinquième que ces notions seront étudiées et que l'on introduira les locutions « ensemble des parties », « complémentaire » et

les symboles $\mathcal{P}(E)$, $\bigcup_B A$.

La définition de l'*intersection* (ensemble des éléments communs à A et B) et des *ensembles disjoints* ne présente pas de difficulté. Pour définir la *réunion* en évitant toute ambiguïté sur le sens du mot « ou », nous avons précisé : « les éléments qui appartiennent soit à l'ensemble A, soit à l'ensemble B, soit aux deux ensembles à la fois ».

Les exercices sur l'intersection et la réunion n'avaient pour but que de préciser ces notions en variant les exemples concrets et en variant la situation mathématique (cas de deux ensembles disjoints, de deux ensembles inclus l'un dans l'autre, de deux ensembles égaux), mais l'étude des propriétés des lois de composition \cap et \cup (associativité, commutativité, etc.) ne sera abordée qu'en Cinquième.

Les trois symboles \subset , \cap , \cup se ressemblent; mais le premier symbolise une relation entre les parties d'un même ensemble, les deux derniers des lois de composition dans l'ensemble des parties. Autrement dit, si A et B sont deux parties de E :

$A \subset B$ est l'énoncé d'une propriété vérifiée par (A, B),

$A \cap B$ est la désignation d'une troisième partie C.

Cette distinction a parfois été mal faite par les élèves : certains ont affirmé que « $A \cap B$ signifie qu'il y a des éléments communs à A et à B ».

Il semble qu'on pourrait éviter cette confusion en donnant la priorité aux mots (« est inclus dans », intersection) sur les symboles, et en prenant soin de faire souvent entrer ces mots dans des phrases :

« L'intersection de l'ensemble des blocs carrés et des blocs bleus est l'ensemble des blocs carrés bleus »; « L'ensemble des blocs carrés bleus est inclus dans l'ensemble des blocs bleus ».

Il est peut-être aussi préférable de ne pas prononcer le mot « inclusion » qui ressemble au mot « intersection ». La relation \subset peut très bien être désignée par son lien verbal « est inclus dans », de même que la relation \in a été désignée par « est élément de ».

2.5. Étude d'objets géométriques et physiques donnant lieu à mesure.

Nous avons considéré cet alinéa du programme comme une borne supérieure de ce qu'on peut traiter en Sixième : c'est une liste d'exemples parmi lesquels il faut choisir ceux qui se prêtent le mieux à l'introduction de la notion d'*encadrement* et aussi, dans la mesure où cela est possible en Sixième, à la *notion mathématique*

de mesure : une mesure est une application qui, à certaines (1) parties d'un ensemble, associe un réel positif de façon que, si A et B sont des parties mesurables disjointes, la mesure de $A \cup B$ soit la somme des mesures de A et de B.

Des exercices sur les relations numériques et leurs représentations graphiques ont fait intervenir des mesures de longueur, de vitesse, de temps, de masse et de volume. La masse volumique a été introduite, mais sans grand succès.

La pratique de la mesure des longueurs a permis de préciser la notion d'encadrement.

Les aires et les volumes ont donné lieu à des exercices de caractère plus théorique, mais sans aucune prétention. Une tentative plus poussée avait été faite dans cette direction en 1967-1968 (notion de segment ouvert, de segment fermé; de carré ouvert, de carré fermé; étude de la réunion et de l'intersection de deux carrés fermés; relation entre l'aire de chacun des carrés, l'aire de leur réunion et l'aire de leur intersection; approche de l'aire d'un polygone quelconque par des encadrements de plus en plus fins), mais ces préoccupations théoriques sont trop éloignées de l'univers de l'enfant; cette année, nous avons préféré y renoncer.

En somme, dans ce chapitre, la seule notion nouvelle qui intéresse vraiment les élèves de Sixième est celle d'encadrement, mais il s'agit de la notion physique d'encadrement (imprécision des instruments de mesure) et non de la notion mathématique (encadrements de plus en plus fins conduisant à une mesure définie comme une limite).

2.6. Naturels, décimaux, entiers.

On lit dans le programme : « Contrôle de l'acquisition de la technique et du sens des opérations sur les nombres naturels... » Nous avons séparé nettement ce qui concerne la technique et ce qui concerne le sens.

Pour la technique, des exercices de calcul numérique (calcul mental, calcul écrit, calcul à la machine), sur les naturels et les décimaux en base dix, ont été répartis sur toute l'année.

Pour le sens, il ne s'agit pas simplement, comme le dit le programme, de contrôler une acquisition. Les opérations sur les naturels s'interprètent grâce à la notion de *nombre d'éléments* (ou *cardinal*) d'un ensemble fini (les mots « fini », « infini », n'ont pas été prononcés) Cette notion est introduite à partir des bijections.

Des exercices sur la numération dans différentes bases ont permis d'introduire la notion de *système de numération* et de consolider les techniques opératoires en ne les réduisant pas à de simples mécanismes (dans les systèmes non décimaux, nous nous sommes contentés de l'addition).

Les entiers (relatifs) ont été introduits, à partir de jeux, comme classes de couples de naturels (cf. *Bulletin* 259, p. 355). Les seules notions nouvelles pour les élèves étaient les notions classiques de valeur absolue, de signe, d'opposé, de « supérieur à », d'« inférieur à ». Les notations utilisées étaient $\frac{1}{2}$, $\bar{3}$, ..., opp, \mathbb{N} , \mathbb{Z} , $>$, $<$. Nous n'avons pas introduit le symbole \leq qui semble ne pas présenter d'intérêt pour les élèves tant qu'il relie deux nombres dont on sait à l'avance s'ils sont égaux ou non;

(1) Les parties mesurables d'un ensemble E pour une mesure donnée m forment un clan (si A et B sont mesurables, il en est de même de leur réunion et de leur différence). Il n'est pas question de préciser cela en Sixième.

ce symbole ne deviendra intéressant que quand les élèves auront la notion de variable (lettre susceptible de représenter n'importe quel élément d'un ensemble).

Nous avons systématiquement laissé de côté toute la terminologie relative aux lois de composition (associativité, commutativité, élément neutre, etc.). Nous pensons en effet que la notion même de loi de composition ne peut être acquise par les élèves de Sixième que si on y consacre une longue étude que les horaires et les programmes ne permettent pas. Il vaut mieux ne pas parler de commutativité que de dire « la somme est commutative » au lieu de « l'addition est commutative ». Pour l'intersection et la réunion, il y a une difficulté supplémentaire : « intersection » désigne à la fois une loi de composition (l'intersection est commutative) et le résultat d'une opération (l'intersection de A et de B); cette subtilité du langage ne pouvant pas être perçue par un élève de Sixième, nous n'avons jamais employé le mot « intersection » dans le sens de loi de composition.

3. Exemple d'introduction d'une notion.

Dans les classes de Sixième expérimentales de Poitiers et de Couhé, la notion d'application a été introduite en début d'année, aussitôt après les ensembles et les relations. Cette introduction a fait l'objet des fiches 3 et 4 reproduites ci-dessous.

3.1. Fiche 3 : Notion d'application.

Exercice I : — Voici les représentations incomplètes de deux relations; si vous savez que les ensembles représentés sont des ensembles de personnes et si vous savez que le lien verbal de l'une est « a pour mère », de l'autre est « a pour frère », pouvez-vous placer sur chaque représentation le lien verbal qui lui correspond.

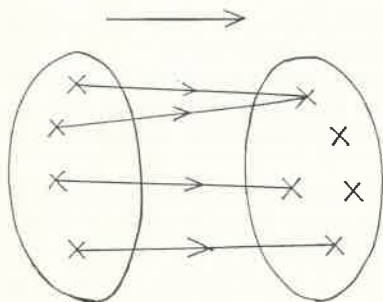


FIG. 1.

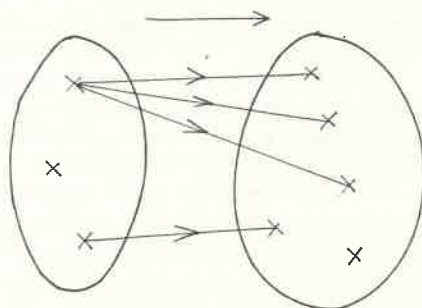


FIG. 2.

Exercice II : — Question analogue, mais vous savez que les ensembles de départ sont deux ensembles de départements et les ensembles d'arrivée deux ensembles de villes et les liens verbaux à placer sont « a pour préfecture », « a pour sous-préfecture ».

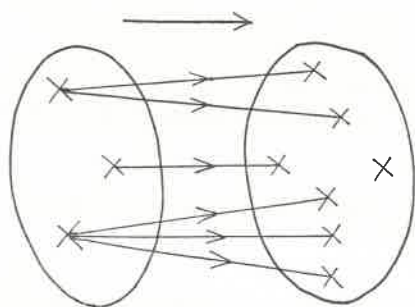


FIG. 3.

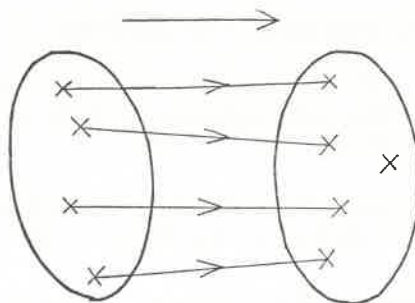


FIG. 4.

Exercice III : — 1° Question analogue. Les ensembles de départ et d'arrivée sont des ensembles de nombres et les liens verbaux à placer sont « est diviseur de », « est la moitié de ».

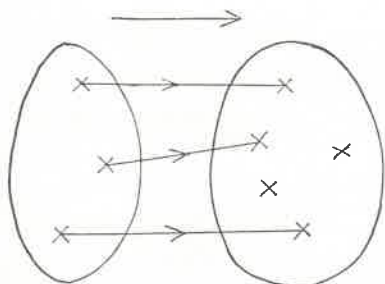


FIG. 5.

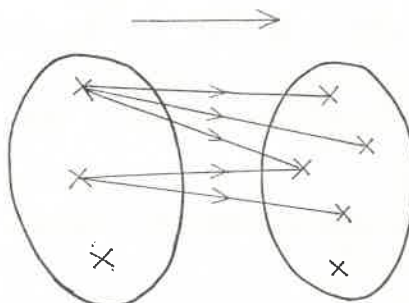


FIG. 6.

2° Complétez ces relations en attribuant à chaque élément des représentations, un nombre qui convienne.

3° Représentez par des tableaux cartésiens les deux relations que vous avez définies.

Exercice IV : — Les relations précédentes définies par « a pour mère », « a pour préfecture », « est la moitié de » possèdent une propriété commune. Énoncez-la.

3.2. Fiche 4 : Applications.

Dans la fiche précédente, vous avez remarqué qu'une personne a un père et un seul père, mais qu'une personne peut ne pas avoir de frère ou en avoir plusieurs; de même un département a une préfecture et une seule préfecture et un nombre a un double et un seul double. Ces remarques conduisent à poser la définition suivante :

On appelle *application* une relation dans laquelle chaque élément de l'ensemble de départ est en relation avec un seul élément de l'ensemble d'arrivée.

E. D.

Conséquence de cette définition.

On reconnaît qu'une relation est une application en remarquant que, dans la représentation saggitale, une flèche unique part de chaque élément de l'ensemble de départ.

Exercice I : — Comment reconnaissez-vous qu'une relation est une application lorsqu'elle est représentée par un tableau cartésien?

Exercice II : — Reprenez la première fiche sur les relations et indiquez pour chaque exercice si la relation étudiée est ou n'est pas une application.

Exercice III : — Parmi les relations suivantes, quelles sont celles qui sont certainement des applications?

ensemble de départ	lien verbal	ensemble d'arrivée
l'ensemble des élèves de la classe	a visité	un ensemble de villes de France
l'ensemble des élèves de la classe	est né à	l'ensemble des villes où sont nés ces élèves
l'ensemble des autos d'un parking	a pour numéro d'immatriculation	l'ensemble des numéros d'immatriculation de ces autos
un ensemble d'écrivains	a écrit	l'ensemble des livres écrits par ces écrivains
un ensemble de gares situées sur une même ligne de chemin de fer	est la gare où le train arrive à	l'ensemble des heures d'arrivée d'un même train dans chacune de ces gares

Exercice IV : — Vous venez dans les exercices II et III de reconnaître des relations qui sont des applications; indiquez pour chacune d'elles si la relation réciproque est aussi une application ou non.

Enquête sur les significations du mot « relation »

M.-A. TOUYAROT,
École Normale d'Instituteurs de Caen.

La pédagogie des mathématiques évolue... On se préoccupe par exemple explicitement dans les nouveaux programmes de la liaison avec l'étude du français, des significations diverses que peuvent avoir certains mots, communs au langage mathématique et au langage usuel. Le premier mot-piège, à notre avis, est ce mot magique qui sonne le renouveau des mathématiques, le mot « relation ».

Qu'est-ce qu'une « relation mathématique »? (une notion essentielle, nul n'en doute, mais encore...). Est-ce une notion primitive? On sait qu'alors il n'est pas possible d'en donner une définition. Ainsi personne n'oserait définir la notion d'ensemble, mais chacun conçoit bien quel genre d'objet est désigné sous ce nom, et tout le monde le conçoit semble-t-il de la même façon (depuis que la crise des paradoxes est passée).

Si l'on se pose cette question entre collègues, on s'aperçoit qu'elle déclenche des discussions souvent vives et même passionnées. En effet il faut avouer que le mot recouvre selon les uns ou les autres des objets mathématiques différents, non sans « relations » il est vrai des uns aux autres.

Si l'on cherche auprès des auteurs de bonne renommée un soutien pour son propre point de vue, on constate que cette notion si essentielle est rarement définie de façon claire, que tout en tournant autour du même sujet, les définitions précises ne coïncident pas et que ce sujet semble attirer plus que d'autres les abus de langage reconnus à l'avance. (Cette seule constatation suffit à ôter l'envie d'exprimer sa propre opinion d'un ton péremptoire.)

Alors se pose le problème pédagogique qui nous intéresse : comment rendre cette notion intelligible aux élèves de Sixième? Comment faire en sorte que les élèves, changeant de professeur, n'aient pas l'impression que l'anarchie (*) règne dans le langage mathématique?

Il est fréquent en effet de ne pas comprendre que les conventions de langage ne sont que des conventions et qu'une certaine discordance à ce niveau ne ternit en rien la pureté et la concordance des idées qui sont derrière les mots, et que ce sont les idées et non les mots qui font progresser la mathématique.

(*) Ou plutôt le désordre (N.D.L.R)

Voici quelques échos d'une assez large enquête à travers la littérature (mathématique) menée au mois de mars par un groupe de collègues à la recherche de ces divers sens du mot « relation ».

Les dictionnaires (Larousse, Robert) nous ont donné les sens courants que l'on connaît : le sens de « récit, narration », celui de « personnes » avec lesquelles on entretient des liens d'affaire, d'amitié, etc., et aussi le sens « philosophique » qui concerne ces liens eux-mêmes, celui de « rapport » existant entre deux objets.

En mathématique, on s'est tourné d'instinct vers les sources : BOURBAKI. Citons quelques extraits des *Éléments* ou du *Fascicule de Résultats* qui accompagne le Livre I. (Édition 1960) (F. R., p. 8) :

« Un ensemble est formé d'éléments susceptibles de posséder certaines propriétés et d'avoir entre eux, ou avec des éléments d'autres ensembles, certaines relations » (voilà le mot lâché).

Dans ce premier livre qui présente la mathématique formelle, il apparaît de façon très précise que toute théorie mathématique est constituée à partir de « termes » et de « relations ». Une remarque (Livre I, p. 16) explique :

« Intuitivement, les termes représentent des *objets*, les relations représentent des *assertions* que l'on peut faire sur ces objets. »

Dans tout l'ouvrage, BOURBAKI continue à envisager en ce sens les relations qui sont constamment en jeu. Elles sont désignées par les expressions $R, R\{x\}$, $R\{x, y\}$, montrant que les lettres x, y figurent dans les « phrases » ainsi représentées. Elles sont continuellement traitées comme des propositions logiques.

Chez BOURBAKI les relations ne sont donc pas autre chose que des énoncés (on dit parfois aujourd'hui des « formules » ou encore des « expressions bien formées ») soumis au jugement logique : un tel énoncé est vrai si c'est un axiome ou s'il a été démontré; faux, s'il est démontré que sa négation est vraie.

D'autres auteurs adoptent le même point de vue :

— MARC BLANC-LAPIERRE (*Mathématique moderne à l'usage du physicien et de l'ingénieur*) (p. 27) :

« Notre pensée distingue trois sortes d'énoncés :

» — ceux qui représentent des termes;

» — ceux qui représentent des relations entre les termes;

» — ceux qui représentent les propositions que l'on obtient à l'aide d'une relation, pour un système de valeurs attribuées aux termes...

» Une relation renferme un ou plusieurs termes x, y, z variables, ce que l'on note : $R\{x\}$, $R\{x, y\}$, $R\{x, y, z\}$, etc.

» Pour tout système de valeurs a, b, c, \dots attribuées à ces variables, on peut dire si le nouvel énoncé obtenu $R\{a\}$, $R\{a, b\}$, $R\{a, b, c\}$, etc, a un sens ou n'en a pas.

» S'il a un sens ce nouvel énoncé prend le nom de *proposition*. »

(P. 30) :

« $R\{x\}$ est une relation monaire ou fonction propositionnelle à une variable.

» $R\{x, y\}$ est une relation binaire ou fonction propositionnelle à deux variables... »

— KURATOWSKI (*Introduction à la théorie des ensembles et à la topologie*) (p. 31) :

« On appelle une fonction propositionnelle de deux variables une *relation*, au sens de la logique. »

Poursuivons notre enquête...

Lorsque les variables x, y , etc., sont des *éléments d'ensembles donnés*, un fait

intéressant se produit : à toute relation (logique) $R\{x\}$, $R\{x, y\}$, $R\{x, y, z\}$, se trouve associé l'ensemble des objets x ou des couples (x, y) ou des triplets (x, y, z) ... pour lesquels la relation est vraie.

— BOURBAKI (F. R., p. 21) :

« Une relation R entre un élément générique x d'un ensemble E et un élément générique y d'un ensemble F est une propriété du couple (x, y) et définit par suite une partie du produit $E \times F$ appelée *graphe* de R .

» Inversement, toute partie A de $E \times F$ est le graphe de la relation « $(x, y) \in A$ » entre x et y ».

Au lieu de considérer R comme s'appliquant aux objets x, y pris séparément, on la considère comme s'appliquant à un seul objet, encore variable, le couple (x, y) , d'où la notation $R\{(x, y)\}$.

Regardons, avant d'aller plus loin, les *Instructions officielles* (février 1969).

— § Ensembles et relations... : « Une relation donnée entre les éléments de deux ensembles (distincts ou non) permet de construire un sous-ensemble de l'ensemble produit... »

L'existence de ce sous-ensemble n'est pas oubliée... Mais nous allons voir ailleurs ce que l'on en dit :

— PAPY (MM I, p. 90) :

« On appelle relation tout ensemble de couples. »

— KURATOWSKI (ouvrage cité, p. 39) :

« On entend par relation (dans le sens de la théorie des ensembles) un sous-ensemble arbitraire R du produit cartésien $X \times Y$ (de deux ensembles X, Y donnés). »

— *Instructions officielles* (à quelques lignes de l'extrait précédent).

« ... A un autre niveau de langage, la relation ... *est* un sous-ensemble du produit cartésien $E \times B$... »

Il y aurait donc deux sens : une relation *permet de construire* un ensemble de couples, ou bien elle *est* un ensemble de couples.

A ce point de l'enquête, nous ne nous estimons pas suffisamment éclairés. Peut-être trouverons-nous d'autres lumières du côté des fonctions...

— BOURBAKI (E, p. 72) :

A partir des relations (toujours logiques) on voit apparaître une autre notion : celle de correspondance. « Le triplet (G, A, B) est la correspondance entre A et B définie par la relation R de graphe G . A est l'ensemble de départ, B est l'ensemble d'arrivée de cette correspondance. »

Quelques pas, et voilà les fonctions (p. 76) :

« On dit qu'un graphe F est un graphe fonctionnel si pour tout x il existe au plus un objet correspondant à x par F . On dit qu'une correspondance (F, A, B) est une fonction si son graphe est un graphe fonctionnel et si son ensemble de départ est égal à son ensemble de définition » (ensemble des x , premiers éléments des couples qui constituent F).

On dit qu'une telle fonction f est définie dans A et prend ses valeurs dans B ; on dit aussi que c'est une application de A dans B .

Mais, quelques lignes plus loin (p. 77) :

« Nous emploierons souvent le mot fonction à la place de graphe fonctionnel. »

Considérant ce qui précède comme un abus de langage, une fonction, une application (expressions d'ailleurs exactement synonymes pour cet auteur) sont non pas des relations particulières, mais des *correspondances* particulières, c'est-à-dire, rappelons-le, des triplets (G, A, B) .

— KURATOWSKI (même ouvrage, p. 38) : « Par fonction (application, transformation), dont les arguments parcourent l'ensemble X et dont les valeurs appartiennent à l'ensemble Y , nous entendons *tout sous-ensemble f du produit cartésien $X \times Y$ qui a la propriété qu'à tout x de X correspond un et un seul y tel que (x, y) soit élément de f .* »

« La notion de fonction est un cas particulier de celle de relation dans le sens de la théorie des ensembles. »

— DIEUDONNÉ (*Fondements de l'analyse moderne*, éd. 1968) (p. 5) :

« Un graphe fonctionnel dans $X \times Y$ est aussi appelé une application de X dans Y ou une fonction définie dans X et prenant ses valeurs dans Y . Habituellement, on parle d'une application et d'un graphe fonctionnel comme s'il s'agissait de deux sortes d'objets distincts en correspondance biunivoque et l'on dit alors « le graphe d'une application », mais il s'agit là seulement d'une distinction psychologique... »

— PAPY (MM I, p. 181) :

« Une relation est appelée fonction si... »

Il n'est pas besoin d'allonger la citation pour voir qu'une fonction est encore en ce sens un ensemble de couples, cas particulier d'une relation. (Signalons en passant que pour PAPY le graphe est le dessin qui représente l'ensemble des couples et non pas l'ensemble lui-même; autre source de malentendu!)

Essayons de résumer cet inventaire et d'en dégager ce qui nous intéresse. Chez BOURBAKI apparaît une chaîne de notions que l'on peut schématiser ainsi :

Ensembles	Propositions logiques	Ensembles de couples	Triplet d'ensembles
A B	$R\{x, y\}$ ou xRy avec $x \in A$ et $y \in B$	G avec $G \subset A \times B$	(G, A, B)

Voici comment BOURBAKI désigne ces différents objets :

A ens. de départ B ens. d'arrivée	$R\{x, y\}$ <i>relation</i> (entre un élément de A et un élément de B)	G graphe de R et de Γ ou F graphe de f (fonctionnel)	(G, A, B) ou Γ correspondance (F, A, B) ou f <i>fonction</i> ou <i>application</i>
--------------------------------------	--	---	---

Pour PAPY, DIEUDONNÉ, KURATOWSKI, on aura les étiquettes suivantes :

A B	$R\{x, y\}$?	G <i>relation</i> (de A vers B) F <i>fonction</i> <i>ou application</i>
--------	------------------	--

Deux points de vue se dégagent de cette enquête :

— d'une part le mot « relation » possède un sens *logique* : il désigne une assertion, proposition, fonction propositionnelle, avec éventuellement plusieurs variables. Il désigne donc une « phrase » et c'est pourquoi on peut parler des *relations* : « $y = 2x$ », « x est le frère de y », « $x + y = z$ », expressions qui se trouvent parfois abrégées lorsqu'on ne veut pas utiliser explicitement les lettres $x, y, z...$ La première expression qui peut se lire « y est le double de x » peut s'écrire ... est le double de ...; de même la deuxième expression s'écrira : ... est le frère de... Pour que ces expressions aient un sens, il faut évidemment savoir par quoi on est autorisé à remplacer les pointillés, où se placent respectivement le premier et le deuxième élément du couple (x, y) .

— D'autre part, dès que les variables décrivent explicitement un ou plusieurs ensembles, des sens *ensemblistes* se superposent au sens logique précédent. On en vient à dire que la relation *est* le graphe G ou bien *est* le triplet (G, A, B) .

Ne serait-il pas plus « vrai » (et plus efficace pédagogiquement) de considérer que l'on désigne alors sous le nom de « *relation de A vers B* » (ou « *relation dans A* ») un *objet nouveau, défini par* la donnée simultanée des ensembles A, B et de la proposition $R(x, y)$ ou par la donnée des ensembles A, B et du graphe G, c'est-à-dire par le triplet (G, A, B) .

C'est cet objet nouveau que l'on note \mathcal{R} , d'un signe en principe distinct du R figurant dans le $R(x, y)$ ou dans le xRy de la relation au premier sens.

Dans le cas particulier où \mathcal{R} est une fonction, on la note f . L'expression $R(x, y)$ (ou l'expression xRy) est alors remplacée par $y = f(x)$. Étudier les propriétés de la relation, ou de la fonction, ce sera étudier \mathcal{R} , ou f . La phrase $R(x, y)$ elle-même n'a pas d'autre propriété que d'être vraie ou fausse (si elle a un sens) pour les objets x, y donnés.

Cette notion de relation, liée à un ou plusieurs ensembles, se *détache* ainsi de ses diverses composantes; elle apparaît par exemple comme une *propriété du triplet* (G, A, B) ou comme une propriété du triplet $(A, B, R(x, y))$. C'est par un processus d'abstraction analogue que l'on conçoit le nombre naturel comme propriété d'un ensemble fini (1).

(1) Une autre question à propos du langage : On parle de relation d'un ensemble vers un autre ou dans lui-même, mais que dire lorsqu'on considère plus de deux ensembles, ou bien un seul ensemble et une relation logique à une seule variable?

Le langage proposé par KAUFMANN-PRÉCIGOUT (Mathématique pour le recyclage des ingénieurs et des cadres) répond de façon satisfaisante à cette question (p. 36) :

- Une proposition $R(x)$ à une variable décrivant un ensemble E définit une *relation monaire dans E*.
- Une proposition $R(x, y)$ à deux variables, décrivant séparément deux ensembles E, F (ou le même ensemble E), définit une *relation binaire dans $E \times F$* (ou dans $E \times E$). ... (l'ordre E, F indique que E est l'ensemble de départ, F l'ensemble d'arrivée).
- Une proposition à n variables, décrivant n ensembles E_1, E_2, \dots, E_n définira alors une *relation n-aire dans le produit $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$* de ces ensembles.

De quelle façon traduire cela en Sixième? En présentant (comme beaucoup le font) toute relation d'un ensemble vers un autre (ou dans lui-même) comme *définie par* :

- l'ensemble de départ E ,
- l'ensemble d'arrivée F ,
- une expression (proposition, lien verbal, propriété) notée R ou xRy , ou $R(x, y)$ qui indique le mode de liaison;

ou bien :

- un ensemble G de couples, formés chacun d'un élément de E et d'un élément de F .

La proposition $R(x, y)$, relation au sens logique, joue dans la définition de \mathcal{R} le même rôle que l'ensemble G . Aucune de ces deux données ne suffit seule à préciser la relation \mathcal{R} dont il s'agit.

Les propriétés de \mathcal{R} sont fondées soit sur l'étude logique des propositions $R(x, y)$, soit sur l'étude du graphe associé à R (ce deuxième point de vue est le plus accessible aux débutants).

Si l'on choisit par exemple un ensemble de personnes E et la proposition « x est le frère de y », les propriétés de la relation entre les éléments de E ainsi définie dépendent tout autant du choix de cet ensemble que du choix du mode de liaison... « est le frère de... »

On saura aussi que l'expression formelle xRy , utilisée à la place de $R(x, y)$ ne signifie pas qu'il existe obligatoirement un « lien verbal » qui peut se mettre à la place de R entre x et y ...

Lorsqu'on se donne au départ le graphe, il peut être intéressant de rechercher « un » lien verbal permettant d'exprimer « une » proposition $R(x, y)$ associée à ce graphe, mais rien n'autorise à prétendre rechercher « le » lien verbal (c'est-à-dire sous-entendre qu'il existe et soit unique).

Des recherches dans le même esprit consistent à remplacer une proposition connue $R(x, y)$ par d'autres propositions qui peuvent être associées au même graphe (équivalentes), donc telles que la relation établie d'un ensemble vers l'autre ne change pas. C'est une voie féconde pour l'avenir : résolution d'équations et « lieux géométriques » en particulier.

On peut aussi chercher à définir la réciproque d'une relation connue \mathcal{R} . Il va de soi qu'il ne s'agit pas de réciproque de la seule relation logique $R(x, y)$. On ne connaît de réciproque pour une proposition logique que dans le cas d'une implication... et une telle réciproque n'a rien à voir avec ce que nous cherchons ici. Il s'agit de la réciproque de cette relation \mathcal{R} au sens général (de la correspondance, selon BOURBAKI).

Elle se définit en échangeant les rôles des deux ensembles, et il n'est pas nécessaire de changer la relation $R(x, y)$. On doit considérer seulement qu'au lieu d'être une propriété du couple (x, y) , c'est maintenant une propriété du couple (y, x) . Il est donc sûr que si $R(x, y)$ est vraie pour le couple (x, y) , elle est vraie pour le couple (y, x) . C'est lorsqu'on cherche à trouver un « lien verbal » pour cette nouvelle relation que l'on peut être amené à un énoncé différent du premier, surtout si l'on veut nommer d'abord l'élément du nouvel ensemble de départ puis celui du nouvel ensemble d'arrivée (ainsi on passe d'une forme xRy à une forme $yR'x$... Si x et y désignent les mêmes objets, ces deux expressions doivent être simultanément vraies ou fausses).

Exemple : Prenons un ensemble de grandes personnes A, ensemble de départ, un ensemble d'enfants B, ensemble d'arrivée. L'énoncé : « x est le père de y » avec $x \in A$ et $y \in B$. Ceci définit une relation \mathcal{R} de A vers B.

La relation réciproque est définie par le même ensemble d'enfants B, ensemble de *départ*, le même ensemble de grandes personnes A, ensemble d'*arrivée*, le même énoncé : « x est le père de y » avec $x \in A$ et $y \in B$; *ou bien* l'énoncé : « y est fils de x » avec $x \in A$ et $y \in B$; *ou bien* l'énoncé : « x est fils de y » avec $x \in B$ et $y \in A$ (et peut-être d'autres encore).

Lorsqu'on utilise des pointillés à la place des lettres, le premier énoncé devient « ... est le père de ... » Les premiers pointillés doivent être occupés par les éléments de l'ensemble de départ. Alors, pour la relation réciproque il faut évidemment changer la tournure et adopter l'une de celles qui placent en tête les éléments du nouvel ensemble de départ, par exemple : « ... est fils de ... »

C'est le seul fait de ne pas utiliser de lettres et de sous-entendre la place occupée par les éléments des ensembles de départ et d'arrivée qui impose ce changement de tournure.

Le sujet n'est pas épuisé avec ces quelques réflexions qui ont surtout « enfoncé des portes ouvertes »... Mais nous pensons à tout ce que représente pour nos élèves de Sixième ce thème des relations, qui va pouvoir jouer à plein d'un bout à l'autre de l'année. Grâce à lui, ils vont trouver plus que jamais de quoi exercer leur réflexion dans les domaines les plus divers et cependant dans le même esprit.

Il n'est sans doute pas inutile de bien connaître tous les aspects du terrain avant de s'engager avec les enfants dans cette aventure.

M.-A. T.

Verbalisme

« Au commencement é :ait le verbe... »

(Jean I. I.)

Le Chimpanzé qui se saisit d'une perche pour décrocher une banane ne fait pas de phrases. Cela n'empêche pas son action d'être efficace, et il est peu d'esprits chagrins pour affirmer qu'il n'y comprend rien.

Dans un même ordre d'idées, il nous est tous arrivé de découvrir une solution à un problème avant d'avoir suivi une démarche verbale. Enfin et surtout, j'ai toujours eu le sentiment d'avoir bien compris une situation quand je la conçois en quelque sorte globalement, quand je peux m'y mouvoir librement sans repasser par les détours verbaux qui me l'ont fait connaître.

De là à conclure qu'on pourrait bien faire des mathématiques sans phrases, et même qu'elles en seraient plus pures et plus efficaces, il n'y a qu'un pas que j'avais allégrement franchi en octobre dernier. J'y voyais bien des avantages.

D'abord, l'algèbre pourrait ainsi être vraiment comprise alors que, le plus souvent, elle n'est pour nos élèves imprégnés de paroles, qu'un mécanisme à automatisme plus ou moins contrôlé. Et puis ce serait peut-être le moyen de donner à

chaque intelligence sa chance, sans que, toujours, l'enfant-qui-a-la-chance-d'avoir-des-parents-qui-causent-bien, supplante en toute occasion les autres.

J'ai donc proposé à mes élèves de Sixième divers exemples de situations présentant une intersection d'ensembles (blocs rouges et ronds, élèves ayant lunettes et cravate, professeurs hommes à lunettes, journées sans maths ni histoire, etc.). J'ai dit : « Voici deux ensembles..., voici leur intersection... » « Et maintenant voici deux autres ensembles... Quelle est leur intersection? » Je me doutais bien que, à la première fois, tout le monde ne réussirait pas; on construirait en commun cette intersection... et on passerait à un nouvel exemple. Et je pensais bien que les murailles tomberaient avant la septième fois.

Est-ce parce que moi-même je suis trop « verbal »? Est-ce parce que mes connaissances psychologiques insuffisantes ne m'ont pas permis de comprendre tout à fait ce qui se passait dans la tête de mes élèves? (j'aimerais bien d'ailleurs recueillir des avis, si possible contradictoires, sur ce sujet). Toujours est-il que j'ai essuyé un échec. *Chaque situation nouvelle posait un problème nouveau* et l'intersection n'était jamais spontanément construite.

Je suis alors revenu à une de mes pratiques anciennes :

1° *Faire exprimer par les élèves, en français, ce qu'ils faisaient* : « Je prends les objets qui sont éléments du premier ensemble et qui sont aussi éléments du second ensemble »... puis, plus simplement, ce qui m'a permis au passage d'insister sur le sens de « et » : « Je prends les objets, éléments du premier ensemble *et* éléments du second. »

2° *Faire élaborer un texte général* : « L'intersection de deux ensembles est l'ensemble des objets, élément du premier ensemble et élément du second ensemble. »

Dès lors, j'ai eu la satisfaction de voir la notion assimilée. Tous les élèves étaient capables, étant donné deux ensembles, de construire leur intersection. Et même, on concevait sans peine des intersections « infinies » d'ensembles « infinis » (multiples de 2 et de 3, intersections d'ensembles de points du genre segments, etc.). Le langage avait eu, incontestablement, une puissance généralisatrice.

L'écriture : $A \cap B = \{x; x \in A \text{ et } x \in B\}$ découle immédiatement du texte général élaboré, et le renforce.

A la suite de cette expérience, je me pose quelques questions : mon recours au verbal est-il aussi indispensable qu'il m'a semblé, ou bien est-ce un simple procédé pédagogique? Comment alors pourrait-on s'en dispenser? Et est-il souhaitable de s'en dispenser, compte tenu de la valeur universelle de ce moyen d'expression et de son étroite liaison avec l'expression par symbolisme écrit?

Quelles que soient les réponses à ces questions, il est clair que je ne saurais souscrire à une conclusion du genre de : « Faisons apprendre par cœur, pour commencer, la définition. » Je crois en effet que, pour nous autres primates (si évolués que nous soyons), le verbe n'est pas « au commencement ». Il faut le conquérir de haute lutte, je veux dire par l'action. C'est cette action qui se situe au commencement, si l'on veut éviter le verbalisme. Mais je crains aussi que, si on ne s'élève pas jusqu'au verbe, on ne comprenne qu'à demi, sans pouvoir généraliser.

En résumé, je propose à l'examen et à la discussion la méthode pédagogique suivante : 1° agir; 2° raconter l'action; 3° élaborer une proposition générale (définition); 4° appliquer à de nouvelles actions.

G.-H. CLOPEAU,
(*Lycée Lakanal, Sceaux.*)

« On parle dans sa propre langue ; on écrit
en langue étrangère. »

J.-P. Sartre (*Les mots*).

Bribes

*Où la Rédaction s'est permis de réunir extraits de lettres et d'articles
qu'elle a reçus et qu'elle s'excuse de ne pas publier en entier.*

Sur les symboles \in et \subset .

Il est fortement recommandé par les manuels de distinguer \in et \subset . La recommandation est tellement pressante qu'on les jugerait exclusifs l'un de l'autre.

Mais si $E = \{a, b, \{a, b\}\}$, n'ai-je pas à la fois $\{a, b\} \in E$ et $\{a, b\} \subset E$?

Soit des coureurs participant à des épreuves individuelles et à des courses par équipes.

Soit E l'ensemble des éléments engagés dans ces diverses épreuves.

Nous retrouvons un ensemble analogue au précédent, pour autant que les participants d'une même équipe soient interchangeables et donc que toute équipe se présente comme un ensemble.

Dans le « modèle de SCHWARTZ » (*Bulletin* n° 261), n'avons-nous pas, par exemple, à la fois $5 \in \mathbb{N}$ et $5 \subset \mathbb{N}$, puisque $5 = \{0, 2\}$? Ici, si $a \in \mathbb{N}$, alors $a \subset \mathbb{N}$ (la réciproque n'étant pas vraie).

Ce qui ne devrait pas nous empêcher, au contraire, de bien marquer la distinction de sens entre \in et \subset ...

H. BAREIL (*Toulouse*).

Questions sans réponses.

Un enfant de Sixième déclare : « Un parallélogramme est un quadrilatère qui a ses côtés parallèles 4 à 4. »

Le professeur, gentiment : « Parallèles deux à deux. »

L'enfant : « Non, 4 à 4. » Il en voit réellement 4 qui aient une propriété intéressante.

A-t-il réellement tort? Que signifie *deux à deux*? Deux côtés (opposés) sont parallèles et les deux autres (opposés aussi) sont parallèles également? Ou bien : deux côtés (voisins) sont parallèles à deux autres (voisins aussi)?

Cet enfant, s'il avait pu expliciter sa pensée, ce que nous-mêmes adultes ne faisons pas, qui employons de telles formules stéréotypées, aurait probablement dit : « Dans un parallélogramme, les 4 côtés sont parallèles à 4 autres. »

Peut-être verra-t-on un jour la pédagogie, voulant éviter ces formules, conseiller ceci :

Soit E l'ensemble des côtés d'un parallélogramme; $\forall x \in E, \exists y \in E$ tel que x et y soient parallèles...

Un enfant déclare : « Le diamètre a deux rayons ». Le maître corrige : « Le diamètre *vaut* deux rayons »? Réussir à distinguer les phrases où l'on parle de segments et celles où l'on parle de longueurs, c'est difficile, car le vocabulaire (rayon, diamètre) confond ces deux notions. Ce serait une sorte de raffinement pédagogique, et pourtant..

Ce qui est écrit et ce qui est sous-entendu :

On imprime : « Si $b \neq 0$ est un diviseur de $a \neq 0$, alors $q = a : b \neq 0$. »

On attend que l'élève ajoute des virgules, et autres menues choses. Bref, qu'il ait compris suffisamment bien pour qu'il lise (qu'il traduise) :

« Si b , supposé différent de 0, est un diviseur de a , lui aussi supposé différent de 0, alors le quotient q de a par b est différent de 0. »

On imprime : « $[\forall x \in A, x \in B] \Rightarrow A \subset B$. »

On attend que l'élève conjugue le verbe étrange qu'est \in , c'est-à-dire qu'il ait compris suffisamment bien pour être capable de lire : « Quel que soit x appartenant à A , x appartient à B . »

A quoi sert-il de distinguer segment fermé et segment ouvert si l'élève ne pose pas de question sur la façon dont se termine, ou ne se termine pas, un segment ouvert? Lui dire qu'il n'y a pas de dernier point, qu'on ne peut pas parler d'un point qui serait juste à côté de celui qu'on enlève au segment fermé pour en faire un segment ouvert, tout cela sera verbalisme. Ces choses me paraissent hors de portée d'un élève de Sixième, de Troisième aussi, et tout juste à la portée d'un élève de Première.

— Et vous, croyez-vous que vous *comprenez* ces choses-là?

— Je ne dis pas que je les comprends (je me demande même si on peut vraiment les comprendre). Je dis que je me pose des questions à leur sujet, que je peux inviter un élève de Première à s'en poser, mais pas un élève de Sixième.

« Pour qu'un nombre soit divisible par 4... » Confusion droite-gauche; cet enfant parle du nombre formé par les deux chiffres de *gauche*.

« Je ne sais jamais; c'est à droite pour moi, mais c'est à gauche pour le nombre. » (Pour moi, qui écris; pour le nombre, qui me regarde l'écrire.)

Au théâtre, on a trouvé le moyen, côté cour et côté jardin, d'éviter cette misère.

« Lorsqu'on écrit un zéro à la droite d'un nombre, ce nombre devient 10 fois plus grand. » Ce nombre qui en devient un autre, comme ce +5 qui devient -5 en changeant de place, est probablement à l'origine d'incompréhensions diverses.

P. JACQUEMIER
(Grenoble).

Plaidoyer pour une certaine licence.

« Même si je dois heurter beaucoup de Collègues, j'avouerai mon inquiétude devant les appels répétés à l'unification du vocabulaire et du symbolisme, même s'il faut en passer par la voie autoritaire. D'abord, on oublie de préciser qui aura (qui prendra) cette autorité. Si des Collègues s'imaginent qu'une autorité qui aura pris le décret de choisir entre les significations du mot « angle » s'en tiendra là, je les trouve bien naïfs. Efforçons-nous, ça je vous l'accorde, de parler et d'écrire pour que nous nous comprenions tous, mais comme me le disait, il y a vingt ans un écrivain belge de langue française : « Laissons aux Bretons le droit de parler breton! »

Soyons également conscients des difficultés qui nous attendent si, par crainte de transgresser les règles très strictes que nous nous serions imposées, nous nous refusions tout néologisme. J'ai appris qu'un Collègue avait proposé, à Besançon, qu'à partir de maintenant l'A.P.M.E.P. décide que tout symbole ou mot nouveau serait proscrit. Si je ne me devais pas d'être fidèle au flegme traditionnel des gens de mon pays, je lâcherais un mot qui a fait la gloire d'un de vos généraux. »

W. MOUNTEBANK
(Stratford on Avon).

**la mathématique
parlée par ceux qui l'enseignent**

par la Commission du Dictionnaire de l'A.P.M.E.P.

- *L'édition 1967 (A)*, comprenant 91 fiches (parues dans le Bulletin avant 1968), une brochure de 32 pages avec notice lexicographique et index, est disponible.

Prix de souscription : 20 F, sous étui cartonné.

Utiliser le bulletin de souscription inséré dans le Bulletin 266.

- *Aux nouveaux adhérents APMEP*, inscrits avant le 1^{er} juillet 1969, et souscrivant au dictionnaire, il sera offert le recueil des douze fiches publiées en 1968 : « *Millésime 1968 (B)* » (parution prévue : décembre 1969).

- *Ce que comprend l'édition 1967 (A)*

Abrégé, abscisse, affinité, anallagmatic (-ique), anneau, anti (-commutatif, -déplacement, -logarithme, -logie, -parallèle, -podaire, -pode, -réflexif, -symétrie, -té), application (-quer, -cable), Archimède (-ien), auto (-matique, -morphisme, -polaire, -symétrie), axe (-ial, -oïde), base (-al), central, centre, classe, complémentaire (-ment, -menté), contra (-dictoire, -grédien), -pollent, -posée), cote (-er), décimal (-e), déduction (déduire), déférent (-e), déplacement, dextrorsum, diagonal (-e, -iser), Eratosthène, Euclide, euclidien, famille, flottant, fonction, fonctionnel (-le), groupe, hélice (oïde), hélicoïdal, homologue, homothétie (-ique), inverse (-ible), inversion, isométrie (-ique), module (-o), normal (-e), nul, numération, opérateur (-er), opposé, ordonnée, perspective, podaire, polaire pôle, primitif (-ive), projection (-teur, -eter), Pythagore, répétition, retournement, rompu, sinistrorsum, stéréographique, supplémentaire (-ment), symétrie, symétrique (-isable, -iser), système, taille, translation, trivial.

- *Ce que comprend le « Millésime 68 » (B)*
arrondi, cofacteur, correction, diviseur (-dende), division (-er), erreur, incertitude, mantisse, rapport.

- *Après clôture de la souscription, seront en vente :*

<i>Édition 1967 (A)</i>	25 F
<i>Millésime 1968 (B)</i>	4 F
<i>Édition 1969 (A ∪ B)</i>	27 F

- D'année en année, les recueils « *Millésime* » permettront de compléter l'édition initiale pour les *nouveaux* lecteurs.
Car il est évident que pour les lecteurs du *Bulletin*, les fiches continueront à être insérées régulièrement.

Souscrire aujourd'hui, être membre de l'APMEP ou abonné à son *Bulletin*, c'est la meilleure façon de tenir à jour son fichier-dictionnaire.

Non, il y a mieux encore : lire attentivement la brochure et utiliser les pages prévues pour écrire à la Commission du Dictionnaire, de VOTRE dictionnaire.