2

F.P.M.

F.P.M. = Formation Permanente des Maîtres.

De même que l'A.D.N., l'acide désoxyribonucléique est porteur, dans la cellule vivante, de toute l'information génétique, la F.P.M. est le nerf de la réforme.

Ce qu'elle a été, ce qu'elle est devenue, ce qu'elle deviendra : G. W. en avait amorcé la présentation aux Journées d'études de Besançon (5 juin 1969).

Des informations sur les I.R.E.M.

Des exemples du travail qu'on y fait, même quand l'administration de l'Éducation Nationale n'a pas les crédits pour en créer.

321 G. Walusinski : Passé et avenir des I.R.E.M.
325 L. Duvert : A l'I.R.E.M. de Lyon.
327 A. Myx : Monoïdes.
330 J. Dautrevaux : A Belfort.
333 Le colloque de Sèvres (21-22 juin 1969).

335 P. Buisson : Mesure et géométrie.
342 G. W. : Une approche de la mesure.

Passé et avenir des I.R.E.M.

Gilbert Walusinski

Pour corriger deux propositions fausses qui ont été formulées, savoir : 1° après quatre mois de fonctionnement, les I.R.E.M. sont en déficit ; 2° la seule tâche des I.R.E.M. est de recycler les professeurs, pour corriger ces deux propositions d'actualité (*), il faut revenir brièvement sur le passé.

(*) Exposé prononcé aux Journées d'étude de Besançon, le 5 juin 1969.

1. Le passé.

Quand l'A.P.M.E.P. reprit son activité, après 1945, des conférences organisées par notre collègue CROZES, au lycée Henri-IV, sous la dénomination générale « Axiomatique et Redécouverte » permirent à des mathématiciens tels que H. CARTAN et G. CHOQUET de présenter des exposés qui, en général, ont été publiés dans le Bulletin. En même temps, un groupe de professeurs intéressés par les « classes nouvelles » se réunissait à Sèvres, sur l'initiative de M^lle^ DIONOT et se préoccupait surtout de l'enseignement au premier cycle.

Les cycles réguliers de conférences organisés en commun par la Société Mathématique de France et l'A.P.M. ont commencé en 1956, grâce à l'initiative de G. CHOQUET. Rappelons le succès, inattendu pour certains, de la première conférence de Henri CARTAN sur les structures algébriques. Les conférences, publiées dans le *Bulletin,* ont fourni la matière de plusieurs volumes. *Structures algébriques et structures topologiques* (épuisé), *Problèmes de mesure* (monographie de l'*Enseignement Mathématique*), etc.

Le cours assuré bi-mensuellement par A. REVUZ de novembre 1960 à mai 1963 a donné lieu, grâce à la précieuse collaboration de M^me^ G. REVUZ pour la rédaction, à la publication des trois volumes du *Cours de l'A.P.M.*

On notera que pendant les années correspondantes, de 1956 à 1965, l'Education Nationale, je veux dire l'administration, sans doute trop occupée par ailleurs (en particulier à mettre au courant une dizaine de ministres successifs), ne faisait *rien* pour l'information des maîtres. De là, entre nous, un conflit toujours ouvert : ou bien les maîtres attendront que l'administration se décide à consacrer des crédits et du temps, à mobiliser un certain nombre de personnes pour la formation permanente (et alors le travail de formation permanente sera légalement inséré dans le service des maîtres), ou bien les maîtres eux-mêmes organiseront à leurs frais, par leurs propres moyens, leur formation permanente. Chaque solution présentait ses dangers : la première, celui de remettre toute réforme aux calendes grecques (et les spectateurs du film « Z » savent que la dictature n'aime pas les « mathématiques modernes »), la seconde, celui de permettre à l'administration de prolonger son sommeil, le travail se faisant sans qu'elle ait à délier la bouche ni la bourse. Chaque solution présentait ses avantages : la première que nous n'avions rien à faire qu'à attendre, la seconde que nous avions tout à faire donc toute liberté d'action.

Est-ce cette dernière raison qui a poussé la majorité des collègues de l'A.P.M. à faire comme s'ils préféraient la seconde solution ? Peut-être ; il y avait aussi, j'en suis profondément persuadé, le sentiment que notre devoir pédagogique nous imposait ces efforts. Egalement l'idée astucieuse que si nous prenions l'initiative, nous aurions l'avantage d'être « bien placés » pour fournir à l'Education Nationale une ou des solutions (des principes d'organisation et des personnes qualifiées pour les mettre en pratique) lorsque celle-ci se réveillerait. Car, entre temps, l'A.P.M.E.P. essayait de la réveiller.

Nous n'y sommes pas complètement parvenus. Mais la création de la Commission Ministérielle dite « Commission Lichnérowicz » (C. L.) en janvier 1967 par M. FOUCHET n'est pas sans liaison avec le travail préparatoire depuis 1965 d'une commission « Recherche et Réforme » dont le rapport (voir *Bulletin* 257 de mars 67) proposait la création des I.R.E.M. Le premier rapport de C. L. (*Bulletin* 258 de juin 67) reprenait l'essentiel du projet A.P.M. en atténuant cependant son étendue (pour nous, il était évident qu'il devait y avoir un I.R.E.M. par académie et qu'il avait mission de gérer l'enseignement des mathématiques « de la Maternelle aux Facultés ») et son caractère démocratique (conseils d'administration élus).

La *Charte de Chambéry*, rédigée en janvier 1968 et adoptée par l'assemblée de l'A.P.M.E.P. en avril, fixait le plan-calendrier de la réforme que nous souhaitions en faisant de la création des I.R.E.M. la pièce motrice de la machine.

En fait, il était important d'obtenir une première création. Or d'avril 1967, date de rédaction du rapport C. L. à juillet 1968, le Ministère ne fit rien. Il faut donc reconnaître que la création de trois I.R.E.M. décidés en août 1968 est due au mouvement de mai 1968.

2. Les trois premiers.

Les I.R.E.M., Instituts de Recherche sur l'Enseignement Mathématique, de Paris, Lyon et Strasbourg, créés en août 1968 ont fonctionné à plein à partir de janvier 1969. Leur mise en place, de septembre à décembre 1968, a exigé de ceux qui en ont eu la charge, un travail accablant d'administration dans des conditions déplorables (et qui l'étaient d'autant plus que certains administrateurs et certains professeurs, même dans l'enseignement supérieur, ne comprenaient pas leur nécessité).

De là cette allusion, faite plus haut, à un « déficit » dans le budget des I.R.E.M. Les auteurs de cette perfidie montrent leur ignorance des conditions de travail des I.R.E.M. durant cette première année. Pensez que l'Education Nationale proposait à l'I.R.E.M. de Paris de « recycler » en 68-69 deux cents personnes, 80 % des crédits alloués étant prévus pour des remboursements de frais de voyage. C'était assimiler les I.R.E.M. à des agences S.N.C.F. pour privilégiés (200 pas plus). Alors que plus de 1 500 maîtres ont suivi, de janvier à juin 1969 plus de mille séances de trois heures d'information mathématique et de discussion pédagogique (grâce en particulier au dévouement de plusieurs dizaines d'agrégibles).

Quatre objectifs ont été fixés aux I.R.E.M. : 1° participer, en liaison étroite avec les facultés qui les hébergent, à la formation initiale des maîtres ; 2° animer, organiser la F.P.M. ; 3° animer l'expérimentation pédagogique ; 4° assurer la publication de documents utiles pour les trois premiers secteurs d'activité.

Sans pouvoir avec précision dresser le bilan pour l'I.R.E.M. de Paris aux travaux duquel j'ai participé dans la mesure de mes moyens, je peux témoigner des résultats pour le moins encourageants obtenus sur les points 1, 2 et 4. Des séminaires sur l'enseignement de la logique et celui de la mesure se sont réunis. Une création comme celle du G.E.F.E.M. (Groupe d'Etude des Futurs Enseignants en Mathématiques) est indépendante de l'I.R.E.M. mais a trouvé dans celui-ci les conditions favorables à l'initiative de ses fondateurs. Enfin si le point 3 n'a pas été traité, c'est faute de temps et d'hommes alors que les expériences continuaient à être gérées par l'I.P.N. en liaison avec l'I.R.E.M.

[Je renvoie plus loin le lecteur à la note de DUVERT sur l'I.R.EM. de Lyon].

Enfin, il ne faut pas oublier que là où l'administration n'a pas créé d'I.R.E.M., il existe soit dans le cadre des C.R.D.P., soit en étroite (très étroite) liaison avec les Régionales de l'A.P.M., des I.R.E.M. clandestins qui n'attendent que la décision ministérielle pour s'officialiser et recevoir enfin des crédits qui leur manquent cruellement. Exemples : Caen, Poitiers, Clermont, Bordeaux,... J'en oublie. Le conflit « action-revendication » rappelé ci-dessus n'a pas trouvé sa solution.

3. Demain et après-demain.

Deux problèmes très différents se posent à l'A.P.M.E.P. pour les I.R.E.M. :

1° *Obtenir leur multiplication.* L'objectif reste « un I.R.E.M. par académie ». Bien sûr, nous savons ne pas pouvoir tout obtenir d'un coup et tout réaliser. M. Edgar FAURE a accepté le principe de quatre nouveaux I.R.E.M. à la rentrée 69 : Besançon, Bordeaux, Marseille et Rennes. C'est un minimum ; à la cadence de trois ou quatre par an, il faut attendre encore cinq ans pour réaliser la généralisation. Ce n'est pas beaucoup, c'est trois ans de trop.

Comment l'A.P.M.E.P. pourra-t-elle faire pression sur l'E.N. pour obtenir ces créations ? Toutes les Régionales intéressées feront bien d'en discuter.

2° *Empêcher la sclérose administrative.* Il faut éviter à tout prix que les I.R.E.M. ne deviennent des machines à papier. Les Régionales A.P.M.E.P. ont certes vocations pour talonner les I.R.E.M. et leur montrer qu'ils n'auront jamais accompli toutes leurs tâches.

D'après ce que j'ai vu ou vécu au cours de cette première année, je me permets de présenter les suggestions suivantes :

a) développer, dans chaque I.R.E.M., les séminaires permettant la collaboration des maîtres en exercice avec les étudiants n'ayant pas achevé leur formation initiale ; cela permettrait d'associer plus étroitement au travail des I.R.E.M. tous ceux qui participent à des expériences (alors que l'I.P.N. s'est révélé incapable d'encadrer les Sixièmes expérimentales en 68-69 et de préparer les Cinquièmes de 69-70) ;

b) assurer une liaison entre les divers I.R.E.M., liaison d'autant plus utile qu'il est certainement préférable de laisser chaque I.R.E.M. libre de ses initiatives ;

c) prouver par toute son action que l'I.R.E.M. anime la F.P.M. et devient par conséquent le moteur permanent de la réforme : gestion et contrôle des expériences, animation des équipes de maîtres au travail dans les établissements, préparation des grands thèmes d'étude qui peu à peu remplaceront les textes de programmes au style des inventaires de PRÉVERT (avec la poésie en moins).

Car après-demain, quand les I.R.E.M. auront partout fait leurs preuves, pourquoi ne prendraient-ils pas en main la complète gestion pédagogique de notre enseignement ? Il dépend de tous ceux qui les animent aujourd'hui de préparer avec audace des réformes plus profondes que celle d'une ligne de programme.

G. W.

Chaque I.R.E.M. a été laissé libre de l'organisation de ses tâches. Louis Duvert nous donne des précisions sur les travaux de l'I.R.E.M. de Lyon. Nous donnons ensuite la liste des documents élaborés et, à titre d'exemple, l'un d'eux, sur un sujet qui intéresse tout le monde.

A l'I.R.E.M. de Lyon

La structure des I.R.E.M. n'a pas été codifiée par des textes pour l'instant; les trois premiers I.R.E.M. représentent une sorte de stade expérimental.

A Lyon, une quinzaine de formateurs (professeurs du Secondaire et assistants ou maîtres-assistants du Supérieur) ont obtenu une décharge correspondant en principe à un demi-service; ils conservent un demi-service d'enseignement habituel.

Dans l'Académie de Lyon, 450 collègues (enseignant dans les C.E.G., C.E.S., Lycées, C.E.T.) se sont inscrits et se sont engagés à suivre régulièrement les séances.

L'I.R.E.M. s'est donc fixé comme objectif prioritaire de contribuer à la F.P.M. Les séances sont hebdomadaires, durent trois heures, et ont lieu le jeudi ou le samedi après-midi selon les groupes, dans des locaux choisis de manière à imposer aux professeurs des déplacements aussi faibles que possible (un défraiement est accordé à ceux qui sont contraints à des déplacements importants). Ces locaux se trouvent à Lyon, Bron, Bourg-en-Bresse, Roanne, Saint-Étienne, Villefranche-sur-Rhône.

Trois niveaux ont été distingués : premier cycle (11 groupes) destiné à la formation théorique nécessaire pour enseigner le nouveau programme de Sixième; second cycle, 1er niveau (2 groupes) en vue du nouveau programme de Seconde; second cycle, 2e niveau.

L'équipe des formateurs rédige des documents comportant des questions, des exercices, des thèmes de réflexion. Chaque document est distribué une semaine à l'avance, étudié individuellement par les collègues, commenté et discuté en séance, soit collectivement, soit par petits groupes de cinq ou six personnes, sous la conduite d'un formateur. Au cours des discussions sont abordées les questions d'ordre pédagogique. En particulier, dans les groupes du premier cycle, les formateurs sont pour la plupart engagés dans l'expérience pédagogique lancée par l'I.P.N. en 67-68 pour une durée de quatre ans dans le premier cycle (expérience que l'I.R.E.M., dans la région lyonnaise, a prise en charge). Ils peuvent donc faire état de l'enseignement qu'ils donnent dans les Sixièmes et Cinquièmes expérimentales (en particulier de la méthode par fiches).

On évite en principe le cours magistral; on travaille par équipe : équipe des formateurs, groupes de travail, parfois équipes de maîtres enseignant dans un même établissement. L'atmosphère est active, le ton est celui de la contestation amicale...

Il est prévu, pour les maîtres qui suivent les séances, une décharge de trois heures hebdomadaires. En fait, pour cette année : d'une part, le Ministère n'a pour l'instant accordé qu'un nombre de décharges inférieur au nombre des inscrits, et de plus le statut des maîtres de C.E.G. crée des difficultés en matière de décharges; d'autre part, du fait que l'I.R.E.M. n'a commencé à fonctionner qu'en janvier, il a été matériellement impossible d'assurer des décharges effectives; elles se traduiront par une rétribution en heures supplémentaires.

Bien des problèmes restent à régler :

— décharge effective de trois heures hebdomadaires pour tous les maîtres qui suivent les séances, y compris les maîtres de C.E.G.;

— augmentation du nombre des formateurs qui ont actuellement fort à faire;

— moyens matériels accrus (secrétariat, bibliothèque, etc.);

— extension à la formation continue des instituteurs;

— création de nouveaux I.R.E.M. (un par Académie) et mise au point de leur statut;

— création d'instituts analogues pour les autres disciplines, car l'A.P.M.E.P. se garde de tout « impérialisme des mathématiques ».

L. D.

Publications de l'I.R.E.M. de Lyon.

Pour obtenir ces publications, s'adresser à Mme Pieri, secrétaire de l'IREM, 43, bd du 11-Novembre-1918, 69-Villeurbanne.

Documents établis pour la formation permanente des maîtres du premier cycle :

1, 2, 3 sur les ensembles; 4, 5 les relations; 6, 7 algèbre des parties d'un ensemble; 8 équivalence et ordre; 9, 10, 11, 20 fonctions et applications; 13 lois de composition; 14 monoïdes; 15, 16 groupes et structures; 17 ($\mathbb{Z}$, $+$); 18 groupes et isomorphisme; 19, 20, 21 pour l'enseignement de quelques éléments de logique; 22 l'intérêt de la géométrie et les défauts de son enseignement actuel.

Documents pour les maîtres du second cycle :

1, 2, 3 espaces vectoriels; 4, 5 géométrie affine; 6 les angles; 7 à 13 topologie générale; 14 espaces métriques euclidiens; 15 à 18 relations; 19 lois de composition; 20 homomorphismes; 21 groupes; 22 algèbre des ensembles et application caractéristique; 23 connecteurs et quantificateurs; 24 théorie des ensembles.

Document 14 de la série 1.

Monoïdes

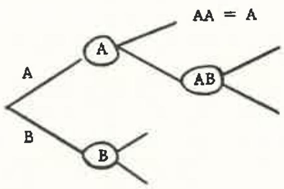
André Myx

1. Un jeu de mots.

Avec les deux lettres A et B, nous allons former des mots. Par exemple, AB, BA, AABA..., sont des mots. De même, A, B sont des mots.

Donnons-nous une règle : Deux lettres X qui se suivent peuvent être remplacées par X. Ce que nous écrivons XX = X ou encore $X^2 = X$.

Pour former tous les mots, on pourra utiliser un arbre; il est ébauché ci-contre :



Les mots d'une lettre seront dits de longueur 1; les mots de *n* lettres, de longueur *n*. Ainsi les mots de longueur 1 sont : A et B; ceux de longueur 2 sont : AB et BA. Quels sont les mots de longueur 3? de longueur 4?...

Combien a-t-on de mots d'une longueur donnée?

On appellera M l'ensemble de tous ces mots. Sur M, on définit une loi de composition *interne* (appelée aussi juxtaposition); on juxtapose deux mots pour en former un troisième. Exemple : (ABAB) (BAB) = ABABBAB. Simplifiez cette écriture. On pourra commencer la table de Pythagore pour cette loi :

	1 \ 2	A	B	AB	BA	ABA	...
					2e mot		
1er mot	A						
	B						
	AB						
	BA						
	ABA						
	...						
	...						

Un ensemble muni d'une *loi de composition interne associative* prend le nom de monoïde. M est donc un monoïde.

Cette loi (juxtaposition) n'est pas commutative. Calculez (AB) (BA) et (BA) (AB).

On peut maintenant définir sur M une relation d'équivalence : deux mots sont équivalents s'ils commencent par la même lettre et se terminent par la même lettre; ainsi ABABAB et AB sont équivalents. Il y a quatre classes de mots :

$$\overline{ab}, \quad \overline{ba}, \quad \overline{aa} \quad \text{et} \quad \overline{ab}$$

$\overline{ab}$ est la classe des mots commençant par A, se terminant par B.

Donc $m = \{\overline{ab}, \overline{ba}, \overline{aa}, \overline{bb}\}$ est l'ensemble quotient de M par cette relation d'équivalence.

Peut-on structurer l'ensemble quotient m?

Exemple : un mot de la classe $\overline{ab}$ suivi d'*un* mot de la classe $\overline{bb}$ donne un mot de la classe $\overline{ab}$.

Examinez tous les cas possibles en complétant la table ci-dessous :

1 \ 2	$\overline{aa}$	$\overline{ab}$	$\overline{ba}$	$\overline{bb}$
$\overline{aa}$				
$\overline{ab}$				
$\overline{ba}$				
$\overline{bb}$				

Obtient-on un nouveau monoïde?

A-t-on, pour ce nouveau monoïde, $\bar{x}\bar{x} = \bar{x}$ pour tout $\bar{x}$ de m?

Sous-monoïde : Considérons le singleton $\{\overline{ab}\}$.

$\overline{ab}\,\overline{ab} = \overline{ab}$.

$\{\overline{ab}\}$ a une structure de monoïde; on dit que c'est un sous-monoïde de m.

$\{\overline{ab}, \overline{bb}\}$, $\{\overline{ab}, \overline{aa}\}$, $\{\overline{ba}, \overline{aa}\}$ et $\{\overline{ba}, \overline{bb}\}$ sont-ils des sous-monoïdes de m?

Même question pour $\{\overline{ab}, \overline{ba}\}$?

Quels sont tous les sous-monoïdes de m?

2. Thème de réflexion : un autre monoïde.

Avec les lettres O, A et B écrivons des mots en convenant que :

$$\text{OA} = \text{AO} = \text{A}; \quad \text{OB} = \text{BO} = \text{B} \quad ;$$
$$\text{AA} = \text{A} \quad ; \quad \text{BB} = \text{O} \quad \text{et} \quad \text{OO} = \text{O}$$

Soit M′ l'ensemble de tous les mots que l'on peut écrire avec cet alphabet en appliquant les règles imposées.

Commencez l'arbre.

Quels sont les mots de longueur donnée?

Peut-on définir un monoïde associatif quotient m'? Pour quelle relation?

3. Monoïde muni d'un élément neutre.

Le monoïde M′ (cf. 2) a pour la loi de composition interne un élément neutre, le mot O.

Très souvent, on s'intéressera à de tels monoïdes (loi interne, associative et munie d'un élément neutre).

Application : Précisez si les ensembles suivants, munis de la loi de composition interne indiquée, sont ou non des monoïdes. Précisez aussi s'ils ont un élément neutre.

a) $(\mathcal{P}(E), \cap)$ avec $(X, Y) \mapsto X \cap Y$.

b) $(\mathcal{P}(E), \cup)$ avec $(X, Y) \mapsto X \cup Y$.

c) $(\mathcal{P}(E), \Delta)$ avec $(X, Y) \mapsto X \Delta Y$.

d) $(\mathbb{N}, +)$.

e) $(\mathbb{N}, \times)$.

f) Dans $\mathbb{N}$, la loi $(x, y) \mapsto x^y$.

g) Dans $\mathbb{R}$, les deux lois $(x, y) \mapsto \text{Sup}\,(x, y)$
et $(x, y) \mapsto \text{Inf}\,(x, y)$.

4. Équation dans un monoïde.

On construit un nouveau monoïde P dont les éléments seront encore des mots et la loi de composition interne, la juxtaposition de mots.

Les axiomes pour écrire ces mots sont les suivants :

1° L'alphabet utilisé contient deux lettres X et Y.

2° $XX = X$ et $YY = Y$.

Avec ces deux règles, on construit un monoïde connu : M. Ajoutons une troisième règle.

3° Deux mots identiques juxtaposés sont remplacés par le mot lui-même, soit $mm = m$.

L'axiome 2 est-il indispensable?

a) Formez tous les mots possibles (à l'aide d'un arbre). Nous obtenons alors un ensemble fini de mots. Donnez-le en extension.

b) Construisez la table de Pythagore pour la loi de composition interne (juxtaposition). Cette loi est associative; possède-t-elle un mot neutre? Est-elle commutative?

c) Quels sont les sous-monoïdes de P?

d) Équations dans P.

Trouvez, s'ils existent, tous les éléments m de P satisfaisant à :

1. $mX = Y$.
2. $mX = X$.
3. $XYm = XY$.
4. $XmY = YX$.
5. $\begin{cases} Xm = XY \\ Ym = YXY. \end{cases}$

5. Du monoïde vers une structure plus riche...

Examinons à nouveau le monoïde ($\mathcal{P}(E)$, Δ).
Établir la table de Pythagore pour $E = \{a, b\}$.
La différence symétrique est une loi associative; vous avez montré qu'elle possédait un élément neutre $\varnothing$. Est-elle commutative? Tout élément de $\mathcal{P}(E)$ est-il symétrisable pour cette loi?

6. Thème de recherche.

Soit un ensemble E et l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ de ses parties. Dans $\mathcal{P}(E)$, on définit la loi suivante :

$$X \top Y = X \cup Y \quad \text{si} \quad X \cap Y = \varnothing$$
$$X \top Y = E \quad \text{si} \quad X \cap Y \neq \varnothing$$

Montrez que ($\mathcal{P}(E)$, $\top$) est un monoïde. La loi $\top$ est-elle commutative? Existe-t-il un élément neutre pour cette loi?
On pourra supposer dans un premier temps que l'ensemble E est fini; par exemple : $E = \{a, b\}$ et former la table de Pythagore de la loi $\top$.

Les clandestins

N'oublions pas, comme il l'a été dit plus haut, l'action efficace de toutes les sections locales ou régionales de l'A.P.M. qui ont effectivement assuré des tâches de F.P.M. en marge des I.R.E.M. J. Dautrevaux fait état du travail de la section de Belfort. Nous publions ensuite la déclaration finale adoptée par le colloque de Sèvres organisé par la Régionale Parisienne; celle-ci a organisé en 68-69 17 chantiers qui ont touché plus de 1 000 maîtres; elle a édité une série de six cahiers qui, tirée à 15 000 exemplaires, a été épuisée et réimprimé.

A Belfort.

La section locale de Belfort, animée par Mme Michau, professeur au Lycée de garçons, et M. Dautrevaux, maître-assistant à la Faculté des Sciences de Strasbourg, avec la collaboration active de MM. les Inspecteurs de l'Enseignement Primaire, a organisé entre janvier et mai une série de séances de formation et d'information destinées en premier lieu aux instituteurs et maîtres de C.E.G. amenés à enseigner lors de la prochaine rentrée les nouveaux programmes de Sixième dans les établissements du département; ont participé également à ces sessions un certain nombre de professeurs de C.E.S. et des maîtres auxiliaires. Ce stage comportait une séance hebdomadaire de deux heures, et il me faut rendre hommage aux participants qui ont fait preuve d'une assiduité remarquable, bien que nombre d'entre eux aient résidé assez loin de Belfort. Ces séances ont permis de fructueux échanges de points de vue et de réflexions, dont il est résulté la nécessité absolue :

1° du travail en équipes au sein de chaque établissement, l'équipe regroupant l'ensemble des maîtres enseignant au niveau considéré;

2° de rencontres périodiques de l'ensemble des maîtres afin de pouvoir procéder à des échanges, de mettre en commun les difficultés rencontrées, et éventuellement de recevoir le complément d'information théorique qui pourrait être nécessaire.

Nous osons espérer qu'aucun obstacle matériel n'empêchera ces projets de se réaliser ni ces résolutions de survivre aux vacances d'été...

Aux documents de travail utilisés dans le stage de cette année (*), je voudrais ajouter ces quelques réflexions qui me sont apparues non seulement dans les discussions mais encore à l'occasion de l'examen des nombreux manuels de la classe de Sixième édités récemment, peut-être un peu hâtivement pour la plupart, et sans s'être entourés des garanties nécessaires de rigueur scientifique.

Il est essentiel que les concepts fondamentaux soient correctement assimilés par les enfants, à cet âge où toute erreur d'acquisition peut être catastrophique; et c'est tout d'abord une question de langage : les mathématiques dites « modernes » ne sont pas différentes des mathématiques dites « classiques », elles font sans doute plus volontiers appel à l'abstraction, mais elles utilisent un outil différent et plus neuf, cette nouveauté ayant permis de dégager un langage particulièrement précis, et c'est en ceci que l'enseignement des mathématiques va interférer avec celui du français, du langage ou de la linguistique : chaque mot du vocabulaire mathématique a une signification bien précise (même si tous les mathématiciens ne sont encore pas d'accord sur certains mots ou certaines notations; mais pour un mathématicien déterminé et pour ceux qui lisent ses œuvres, parce qu'ils en ont été informés, chaque mot a une signification bien précise) et il est essentiel que les enfants soient très tôt habitués à ne pas dire (ou écrire) n'importe quoi, et même rien du tout, n'importe comment; et ceci est très important car grande est la tentation du « verbalisme » qui me fait croire que j'ai tout compris et tout assimilé parce que j'utilise les mots du jargon de la mathématique « moderne ».

Un second défaut que nous rencontrons jusque dans l'enseignement supérieur est ce que j'appelle le « fixisme », c'est-à-dire l'illusion que la formulation d'un concept faite dans la classe de niveau n est définitive, ce qui entraînera, dans la classe de niveau $> n$ où on reprendra ce concept, un refus d'approfondissement ou de formulation différente. Et c'est là une seconde caractéristique qui différencie profondément la mathématique dite « moderne » des mathématiques de papa, où celle-ci était arrivée à un état de perfection tel qu'on ne rencontrait aucune surprise en passant d'un niveau au suivant, l'ensemble étant un tout cohérent non susceptible de progresser, alors que dans notre enseignement des mathématiques « modernes » (excusez-moi, j'ai oublié les guillemets, car la mathématique n'a pas d'âge) il est nécessaire de laisser une place à l'évolution, à l'approfondissement progressif des concepts, et surtout à la construction progressive de concepts nouveaux englobant d'autres concepts plus élémentaires et jusque-là distincts : la voie doit rester libre pour toute synthèse.

Enfin, et c'est là que l'information des maîtres doit être complète, afin qu'eux au moins sachent ce qu'ils disent, il faut absolument éviter de mêler des concepts qui se situent à des niveaux différents : je prendrai l'exemple, que j'ai partout vu très

(*) ... que nous nous excusons de ne pouvoir reproduire (N.D.R.L.).

mal traité, des relations et applications, faute d'idées claires sur la question. Et je me permets d'exposer ici un certain nombre d'idées de base.

Une RELATION (ou « relation binaire » si on veut préciser, ce qui va de soi' qu'elle fait intervenir deux ensembles) est, au sens le plus élémentaire et le plus concret du terme, une *assertion* d'un type particulier : elle comporte donc un premier terme qui doit être un élément d'un ensemble; un second terme qui doit être un élément d'un autre ensemble, ces deux termes étant reliés par une « forme verbale » ; si l'assertion est *vraie*, la relation est vérifiée par les deux éléments; si l'assertion obtenue est fausse, la relation n'est pas vérifiée, ou plutôt la relation contraire (ou « complémentaire ») est vérifiée. Une RELATION fonctionne donc essentiellement par « VRAI » ou « FAUX ». A ce moment on peut introduire le graphe de la relation, ainsi que les notions habituelles de « coupes » et de « projections », et s'apercevoir que les propriétés des relations qui nous seront utiles en mathématiques dépendent seulement du graphe, et non de la forme verbale, de sorte que la première étape dans l'abstraction consistera à se libérer de la forme verbale et à ne considérer, dans une relation, que les deux ensembles (« SOURCE » et « BUT ») et le graphe — autrement dit d'introduire déjà un quotient; cependant on ne pourra pas appeler *égales* deux relations ayant même source, même but et même graphe (parce qu'elles pourront différer par la forme verbale), mais seulement « équivalentes ». De toute façon, en mathématique, nous ne travaillons que sur des relations de la forme suivante :

Soient A la source, B le but, $G \subset A \times B$ le graphe : nous pouvons canoniquement associer à ce triplet la relation $\mathcal{R}$ définie par : $a \in A$, $b \in B$: $a\mathcal{R}b$ si $(a, b) \in G$. La forme verbale particulière serait ici « est élément de », et à ce moment deux relations ayant même source, même but et même graphe seront effectivement égales puisque, par convention, elles auront la même forme verbale.

La notion de Relation va nous conduire, à un niveau supplémentaire d'abstraction, à celle de CORRESPONDANCE : la correspondance définie par une relation $\mathcal{R}$ est l'*opération mentale* (nous l'appellerons l' « opérateur ») qui, à un élément donné, a de la source associe ceux des éléments b du but (s'il en existe), tels que l'assertion $a\mathcal{R}b$ soit vraie. A ce stade, il nous est loisible d'introduire, ce qui ne fait aucune difficulté, la relation réciproque ainsi que la correspondance réciproque.

Alors, une APPLICATION d'un ensemble A dans un ensemble B apparaît comme une CORRESPONDANCE d'un type particulier — et non, j'insiste bien là-dessus — comme une relation particulière, faute que l'on trouve dans nombre d'ouvrages imprimés, et pas seulement à l'usage des élèves de Sixième! On verra alors que, dans ce cas, toute application admet une *correspondance réciproque*, ce qui éclaire la notion d'image réciproque d'un élément ou d'une partie du but, ainsi que les conditions auxquelles cette correspondance réciproque est elle-même une application, ce qui nous conduit tout naturellement à la notion d'application injective, puis bijective.

En passant, précisons que la notion de surjectivité est tout à fait secondaire et que, parmi les applications, l'essentiel est de bien distinguer celles qui sont injectives de celles qui ne le sont pas.

Bien entendu, rien n'empêche une *relation* d'admettre le même ensemble comme source et comme but, et d'introduire les notions de transitivité (facile, car amusante), de réflexivité (facile aussi, mais on ne pense jamais assez que $a\mathcal{R}a$ doit être vraie pour *tout* élément sans exception de l'ensemble A), puis les notions plus difficiles de symétrie et d'antisymétrie, que bien des enfants auront tendance à considérer comme contraires l'une de l'autre, alors qu'un diagramme sagittal judicieusement construit peut montrer des exemples de relations qui sont à la fois symétriques et antisymétriques, ou de relations qui ne sont ni l'une ni l'autre : on trouve toujours l'exemple de l'égalité entre nombres (entiers ou réels) comme celui d'une relation symétrique qu'elle est effectivement; mais qui pense que cette relation est également antisymétrique? On trouve aussi toujours l'exemple de l'inégalité large (: $\leqslant$) comme celui d'une relation antisymétrique, mais qui pense que l'inégalité stricte ($<$) l'est également? Ce dernier exemple repose en fait sur la définition correcte de l'implication mathématique qui s'impose évidemment dès ce niveau : si A et B sont deux assertions, l'implication $A \Rightarrow B$ est vraie, soit lorsque A et B sont vrais tous deux, soit lorsque A est faux (sans qu'on s'occupe de B); on peut d'ailleurs analyser de cette manière, pour bien illustrer cette définition, de nombreuses propositions du langage courant ou de la vie pratique.

On voit donc l'importance de la précision du langage et du vocabulaire, et de la connaissance rigoureuse de la signification des mots. Sans aller jusqu'à dire que la mathématique moderne se réduit à une linguistique un peu poussée, on peut admettre que celle-ci en est un passage obligé, et que la clé du succès se trouve dans l'observation rigoureuse de cette règle.

Jacques DAUTREVAUX.

A Sèvres.

Le colloque sur la formation permanente des maîtres réuni à Sèvres les 21 et 22 juin 1969 au Centre International d'Etudes Pédagogiques sur l'invitation de la Régionale Parisienne de l'A.P.M.E.P., a réuni 80 participants enseignant dans les divers ordres d'enseignement, de la Maternelle aux Facultés, ou parents d'élèves.

Au terme de leurs travaux, ils ont adopté la déclaration suivante.

Un vaste et profond mouvement de rénovation de l'enseignement mathématique se développe dans tous les pays du monde. Il prend vie dans notre pays et s'épanouit dans la mesure où, dépassant de simples changements de programmes ou d'horaires, il entraîne une mutation de la fonction enseignante s'inspirant des principes suivants :

a) le maître qui enseigne est de moins en moins transmetteur de connaissances et de plus en plus éveilleur de consciences ; dans le domaine mathématique, il apprend beaucoup moins des résultats qu'il n'apprend à observer, à concevoir, à déduire, à appliquer, autrement dit à appréhender la réalité pour la transformer grâce à une pensée organisatrice ;

b) pour les maîtres, ne doivent plus exister de frontières entre les degrés d'enseignement : tout de même que les enfants au cours de leurs études parcourent les cycles successifs, les idées pédagogiques doivent circuler entre tous les maîtres à quelque degré d'enseignement qu'ils exercent ;

c) l'évolution de l'enseignement mathématique favorise toutes les formes de coopération interdisciplinaire ; si la mathématique utilise les langues vivantes usuelles, avec celles-ci elle participe à l'apprentissage des moyens d'expression sans lesquels l'individu ne peut vivre en société ;

d) cette évolution de l'enseignement ne peut avoir de fin ce qui entraîne le maître dans une recherche pédagogique également permanente ; c'est le mélange et l'équilibre dynamique de perfectionnement scientifique et de recherche pédagogique qui constitue *la formation permanente des maîtres* (au contraire de ce qui est appelé « recyclage » et ne concerne qu'une acquisition supplémentaire de connaissances théoriques ou pratiques pendant une période limitée) ;

e) le climat de la F.P.M. étant celui du dialogue entre ceux qui enseignent, à la lumière des contacts avec les enseignés, les parents et les professionnels de toutes catégories, ne peut s'épanouir qu'en l'absence de tout esprit hiérarchique.

En conséquence, les participants du colloque souhaitent que l'A.P.M.E.P. :

1° réclame avec force la création d'un I.R.E.M. dans chaque académie, ces I.R.E.M. étant dotés de moyens financiers suffisants pour assurer la F.P.M. selon les principes énoncés ci-dessus ;

2° obtienne que partout où les I.R.E.M. n'existent pas encore, les administrations académiques soient invitées à favoriser et aider les initiatives individuelles ou collectives pour la F.P.M. ;

3° recommande à toutes les Régionales de l'A.P.M.E.P. de prendre les initiatives utiles pour animer des équipes de F.P.M. quel que soit le cadre dans lequel elles sont organisées.

Dans le cadre particulier de la Région parisienne, la Régionale Parisienne de l'A.P.M.E.P. s'efforcera de multiplier les Chantiers de Pédagogie Mathématique qu'elle anime en en diversifiant la formule pour l'adapter aux besoins de tous. Elle publiera six *Bulletins* dans l'année scolaire à l'intention spéciale de contribuer à ce travail de F.P.M.

A ce titre les membres du colloque invitent leurs Collègues à les rejoindre dans un stage de formation d'animateurs de Chantiers de Pédagogie Mathématique que la Régionale organise du 3 au 6 septembre 1969.

Les participants au Colloque de Sèvres affirment leur conviction que l'évolution de l'enseignement mathématique pour laquelle ils travaillent réunit l'avantage d'augmenter l'attrait de la fonction enseignante pour les jeunes mathématiciens à la vertu plus éminente encore de mieux servir à former chez les élèves des esprits clairs, imaginatifs, libres.

P.S. — Le stage du 3 au 6 septembre 1969 a réuni, au Centre International de Sèvres 25 participants qui, par équipes de trois à cinq collègues, ont rédigé cinq documents sur des présentations élémentaires de la notion de groupe. Ces travaux seront repris dans les *Chantiers de Pédagogie Mathématique,* cahiers devenus bulletin de la Régionale.

A la lumière de ces travaux et des difficultés de la rentrée, il apparaît bien que l'exigence d'un I.R.E.M. par académie est une première étape qu'il faudrait franchir *rapidement.* Dans les académies étendues ou surpeuplées, il faudra bien créer plusieurs I.R.E.M. si l'on veut éviter le gigantisme et la paralysie.

Les conditions de la F.P.M. ayant été précisées dans les articles précédents, nous donnons ensuite un exemple des études que cette formation permanente nous engage à entreprendre. Traiter, en Sixième, des problèmes de mesure n'est pas nouveau. Ce qui l'est peut-être c'est de se poser à ce sujet le problème mathématique général de la mesure.

On s'aperçoit alors que divers exposés sont possibles. En classe, un seul point de vue sera peut-être adopté. Mais comment le maître choisira-t-il ? S'il ne connaît sur chaque sujet qu'un seul chemin, comment les élèves connaîtront-ils tout le pays ?

C'est pourquoi après l'exposé de notre Collègue BUISSON, *il nous a paru utile de présenter un point de vue différent. Nous espérons revenir sur ce thème dans d'autres* Bulletins.

Mesure et géométrie

P. BUISSON
I.R.E.M. de Strasbourg

Cet exposé, qui a été présenté à un stage interacadémique à Strasbourg concernant l'expérience en Sixième, comprend trois parties. Une première, algébrique, est consacrée à l'étude de l'existence de mesures des segments de l'espace affine invariante par les translations et vérifiant une certaine propriété d'additivité. Son but est de donner un certain nombre de définitions et de notations en accord avec la théorie; celles-ci n'ont d'ailleurs rien d'original. La deuxième concerne les programmes de Sixième et de Cinquième et recherche comment appliquer les résultats de la première partie à ces niveaux en respectant les programmes et les instructions ministérielles. La dernière partie est consacrée aux autres mesures figurant dans ces programmes. Cet exposé tient compte des résultats de la discussion qui a eu lieu à ce sujet au moment du stage.

1. Mesure des segments.

1.1. Définition d'une droite affine.

Une droite affine (D) *est la donnée d'un ensemble de points et d'une famille de bijections appelées translations* f_t de (D), *paramétrée par les nombres réels* $\mathbb{R}$ *et vérifiant :*

(1.11.) $f_t\,(f_{t_1}(A)) = f_{t+t_1}(A)$ *pour tout* $A \in (D)$ *et tous* $t, t_1 \in \mathbb{R}$.

(1.12.) *Pour tout point* $O \in (D)$ *l'application de* $\mathbb{R}$ *dans* (D) *qui à* t *associe* $f_t(O)$ *est une bijection.*

On dit alors que le groupe additif des réels opère simplement et transitivement dans (D).

Il résulte de (1.12) que si $A \in (D)$ alors il existe $a \in \mathbb{R}$ unique tel que $A = f_a(O)$. Ce nombre a est l'abscisse du point A, le point O étant pris comme origine. Si O′ est un point d'abscisse x par rapport à O on aura

$$A = f_a(O) = f_{a'}(O') = f_{a'}(f_x(O)) = f_{a'+x}(O)$$

ce qui donne la formule de changement d'origine $a' = a - x$.

1.2. Définition des segments.

Si a et b sont deux nombres réels, on note I (a, b) l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $x \geqslant \inf(a, b)$ et $x \leqslant \sup(a, b)$.

Définition : *Soient* A et B *deux points d'une droite affine* (D) *tels que* $A = f_a(O)$ *et* $B = f_b(O)$ *avec* $O \in (D)$; *on appelle segment d'extrémité A et B l'ensemble des points* $f_t(O)$ *avec* $t \in I(a, b)$. *On le note* $[AB]$.

La formule de changement d'origine entraîne que cette définition est indépendante du choix du point O. Si A = B, on obtient le segment point noté [A]; la définition étant symétrique en A et B on a [AB] = [BA].

1.3. Mesure d'un segment.

Définition : *Soit* F *l'ensemble des segments d'une droite affine* (D); *une mesure sur* (F, D) *est une application non identiquement nulle* m : $F \to \mathbb{R}^+$ *vérifiant :*

(1.31) *Pour tout* $t \in \mathbb{R}$, $m\,[f_t(A)f_t(B)] = m[AB]$.

(1.32) *Si* $B \in [AC]$ *alors* $m[AB] + m[BC] = m[AC]$.

Comme $A \in [AC]$, on déduit de $m[A] + m[AC] = m[AC]$ que la mesure d'un point est nulle. D'autre part si S_1 et S_2 sont deux segments tels que $S_1 \cap S_2$ soit non vide, on aura :

$$m(S_1 \cup S_2) + m(S_1 \cap S_2) = m(S_1) + m(S_2).$$

Remarquons que $m(S_1 \cup S_2)$ est seulement définie dans ce cas, car la réunion de deux segments dont l'intersection est vide n'est plus un segment.

1.4. Cas de la droite réelle affine.

La droite réelle est la donnée de $\mathbb{R}$ et des translations $f_t(a) = a + t$. La première condition s'écrit : $m(I(a, b)) = m(I(a + t, b + t))$; on aura, en particulier, $m(I(a, b)) = m(I(0, b - a))$ et $m(I(0, x)) = m(I(0, -x))$. La mesure sera donc entièrement déterminée par la donnée pour $x \geqslant 0$ de $g(x) = m(I(0, x))$. Pour $0 \leqslant x \leqslant y$, la condition (1.32) s'écrit $g(x) + g(y - x) = g(y)$.

La fonction g est additive, à valeurs positives, donc croissante et continue.

Cela implique que g est une fonction linéaire : $g(x) = \lambda x$ avec $\lambda > 0$ et par suite $m(\mathrm{I}(a, b)) = \lambda |b - a|$ avec $\lambda > 0$. On en déduit qu'il existe une mesure, que deux mesures sont proportionnelles, et qu'une mesure est entièrement déterminée par la donnée d'un segment [OU] tel que $m[\mathrm{OU}] = 1$.

1.5. Droite affine quelconque.

A toute mesure m_{D} sur une droite affine (D) on peut associer une mesure $m_{\mathbf{R}}$ sur la droite réelle affine par :

$$m_{\mathrm{D}}(\mathrm{I}(a, b)) = m_{\mathrm{R}}\ [\mathrm{AB}] \text{ avec } \mathrm{A} = f_a(\mathrm{O}),\ \mathrm{B} = f_b(\mathrm{O}) \text{ et } \mathrm{O} \in (\mathrm{D}).$$

Cette définition est indépendante du choix de O car la mesure $m_{\mathbf{R}}$ doit être invariante par translation. D'une manière analogue on associe à toute mesure $m_{\mathbf{R}}$ sur la droite réelle affine une mesure m_{D} sur (D) invariante par translation, ce qui permet d'obtenir une correspondance biunivoque entre les mesures d'une droite affine quelconque et celles de la droite affine réelle.

En utilisant les résultats démontrés en 1.4, nous obtenons :

Théorème : *Si* D *est une droite affine réelle et* F *l'ensemble de ses segments, alors il existe sur* (F, D) *une infinité de mesures. Deux mesures sont proportionnelles entre elles et une mesure est entièrement déterminée par sa valeur sur un segment.*

1.6. Longueur d'un segment dans l'espace affine.

Soit E l'espace affine de dimension 3, on admettra que deux points A et B définissent une droite affine D(A, B), ce qui permet de mesurer le segment [AB].

Choisissons une mesure $m_{\mathbf{R}}$ sur $\mathbb{R}$; nous dirons que *deux segments* [AB] *et* [CD] *ont même longueur* si $m_{\mathrm{D(A,B)}}\ [\mathrm{AB}] = m_{\mathrm{D(C,B)}}\ [\mathrm{CD}]$, ces deux mesures correspondant à la mesure choisie sur $\mathbb{R}$. Cela définit une relation d'équivalence dans l'ensemble des segments indépendamment du choix de la mesure sur $\mathbb{R}$. Si on désigne par u la classe des segments qui mesurent 1 pour une mesure donnée sur $\mathbb{R}$, on dit que cette dernière définit une *u mesure* pour l'ensemble des segments de E et on notera u mes [AB].

On appellera *longueur du segment [AB]* la classe d'équivalence de ce segment, on la notera AB.

Remarquons qu'on peut aussi mesurer des longueurs, car les applications mesures passent au quotient; ceci justifie la notation *u mes [AB] = u mes AB.*

Somme de deux longueurs.

Étant donnés deux segments [AB] et [CD], il existe sur la droite affine D(A, B) un segment [BE] tel que $[\mathrm{AB}] \cap [\mathrm{BE}] = [\mathrm{B}]$ et BE = CD.

On peut ainsi définir dans l'ensemble des longueurs une opération notée additivement, *appelée somme de deux longueurs* définie par

$$\mathrm{AB} + \mathrm{CD} = \text{classe de } [\mathrm{AE}].$$

Produit d'une longueur par un nombre.

Si [AB] est un segment et λ un réel positif, alors il existe sur la droite D(A, B) un segment [AC] tel que *u mes* [AC] = λ*u mes* [AB]; on peut aussi définir une opération externe, appelée *multiplication d'une longueur par un réel positif* par λAB = classe de [AC].

Cette opération justifie l'écriture AB = βu si *u mes* AB = β. L'écriture habituellement utilisée AB = 3 cm est donc tout à fait correcte dans cette théorie.

Remarque : Au cours de la discussion, plusieurs enseignants ont fait part des difficultés pédagogiques auxquelles ils se heurtent quand ils abordent les conséquences du théorème de Thalès et les triangles semblables car ils manient alors les longueurs qu'ils ont définies comme classes de segments superposables, comme des nombres. C'est pourquoi *on propose*, par définition, de *noter* $\overline{AB}$ la mesure du segment [AB] ou de sa longueur AB, chaque fois qu'il est inutile de préciser le choix de la mesure. C'est un nombre alors que [AB] et AB n'en sont pas.

1.7. Extension aux lignes polygonales.

On peut étendre, additivement, la mesure à des lignes polygonales, réunion finie de segments, en posant $m(L_1 \cup L_2) = m(L_1) + m(L_2)$, si L_1 et L_2 sont deux lignes polygonales dont l'intersection est soit vide, soit réunion d'un nombre fini de segments points.

2. Mesure d'un segment physique.

Cette étude a été faite pour expliciter les notions de mesure et de longueurs *des segments géométriques sur une droite affine ;* une telle étude est évidemment impossible en classe de Sixième et de Cinquième où l'espace est considéré comme espace « physique » et non pas affine.

Cela montre que le titre des programmes « Mesure d'objets géométriques et physiques » n'est pas clair et qu'il aurait fallu se contenter de « Mesure d'objets physiques », les objets géométriques étant impossible à définir.

2.1. En classe de Sixième.

La droite est ce qui se dessine avec une règle et un segment [AB] est l'ensemble des points de la droite « compris entre A et B ». On a également la notion de segments adjacents et on possède le compas à pointes sèches. *Deux segments qui déterminent le même écartement de compas seront dits isométriques.* On introduit alors la notion de mesure en utilisant l'axiome d'Archimède.

Axiome : Étant donné un segment [AB], *alors à tout segment* [OU] *on peut associer un plus petit entier* N *tel que le segment réunion des* N *segments adjacents, tous isométriques à* [OU], *construits à partir du point* A, *contient le point* B.

Si on désigne par u l'ensemble des segments isométriques à [OU], on dira que les deux entiers $N - 1$ *et* N *définissent un encadrement de la* u *mesure de [AB]* et on notera :

$$N - 1 < u \text{ mes } [AB] \leqslant N.$$

Si le point B est exactement l'extrémité du segment construit on notera u mes [AB] = N, car il faut pouvoir écrire u mes [OU] = 1.

Il est peut-être bon de mesurer avec les différentes unités de mesure utilisées dans l'histoire, en particulier le système métrique qui permet d'utiliser les nombres décimaux et de donner une première intuition des nombres réels comme limite d'une suite de Cauchy de nombres décimaux.

On peut encore plus facilement utiliser les nombres à virgule dans le système binaire, car construire à partir d'une unité u un segment S tel que u mes S = 10 (système décimal) est impossible pour un élève de Sixième alors que le pliage permet de construire un segment S_1 tel que u mes $S_1 = 10$ (système binaire).

Il n'est pas possible de définir la longueur comme classe d'équivalence. Par contre on doit pouvoir dire que u mes [AB] = β est synonyme de longueur du segment [AB] = βu et que cela s'écrit AB = βu. Cela doit d'ailleurs surtout s'énoncer pour les encadrements.

Pour les mesures de lignes polygonales on introduit l'axiome d'additivité, ce qui permet d'étudier dans $\mathbb{N}$ le comportement de l'addition par rapport à la relation d'ordre.

2.2. *En classe de Cinquième.*

L'élève a été habitué, par l'écriture des entiers relatifs, à noter une classe d'équivalence. Il est possible alors de préciser, à titre d'exemple de relation d'équivalence, la notion de longueur : deux segments [AB] et [CD] sont équivalents si pour toute u mesure on associe aux deux segments le même encadrement; *on appelle longueur du segment* [AB] *la classe d'équivalence du segment* [AB] *et on la note* AB.

Il est plus normal d'introduire la longueur comme classe d'équivalence à partir de la relation « a même mesure que » qu'à partir de la relation « est isométrique à » car cette dernière ne se généralise pas pour la définition de l'aire à partir des surfaces.

3. Autres mesures.

3.1. *Mesure des surfaces.*

Le problème théorique est encore plus difficile que pour les mesures de segments, car elle repose sur la notion de mesure produit.

La théorie nous permet d'affirmer qu'on peut mesurer les polygones en définissant à partir d'une u mesure de segments une, u^2 mesure des polygones en posant :

1° Si ABDC est un rectangle R alors

$$u^2 \text{ mes } R = u \text{ mes } [AB] \times u \text{ mes } [BC].$$

2° Si P_1 et P_2 sont deux polygones dont l'intersection est réduite à des points, des segments ou est vide, alors

$$u^2 \text{ mes } (P_1 \cup P_2) = u^2 \text{ mes } P_1 + u \text{ mes } P_2.$$

3° Si P_1 et P_2 sont « superposables » alors u^2 mes $P_1 = u^2$ mes P_2.

L'intérêt est certainement en classe de Sixième de déterminer un encadrement de la mesure d'un rectangle, à partir de la mesure des côtés, et d'étudier le comportement du produit par rapport à la relation d'ordre. On peut aussi en Cinquième introduire la notion d'aire comme autre exemple de relation d'équivalence.

3.2. Mesure de solides.

Le problème est encore plus difficile, car on ne peut pas, sans passage à la limite, mesurer les polyèdres à partir de la mesure du parallélépipède rectangle. Dans ces classes il vaudrait peut-être mieux faire de la géométrie expérimentale en construisant des solides, en les développant, en regardant les relations entre les différents éléments pour que les élèves apprennent à « voir dans l'espace ».

3.3. Cas des secteurs angulaires.

Problème de définition et de notation. Un secteur angulaire est l'intersection de deux demi-plans s'il est saillant, la réunion s'il est rentrant. De nombreux enseignants ont fait part des difficultés qu'ont soulevé ces définitions car c'est la première fois dans le cours de Sixième qu'intervient formellement la notion d'infini. D'autre part, cela soulève également un problème de notation; *si* Ox *et* Oy *sont les demi-droites frontières du secteur angulaire, on propose de le noter* [Ox, Oy] *s'il est saillant et Rent* [Ox, Oy] *s'il est rentrant. Ces deux secteurs sont appelés associés.*

Mesure de secteurs angulaires saillants.

On désigne par φ l'ensemble des secteurs angulaires saillants et par G le groupe des isométries du plan, groupe engendré par les symétries par rapport à une droite.

Définition : *On appelle mesure sur S une application non identiquement nulle* m : $\to \mathbb{R}^+$ *vérifiant.*

(3.31) *Pour tout* $S \in \varphi$ *et pour tout* $g \in G$, $m(g(S)) = m(S)$.

(3.32) *Réciproquement si* S *et* S' *vérifient* $m(S) = m(S')$ *alors il existe* $g \in G$ *tel que* $S' = g(S)$.

(3.33) *Si* $S = [Ox, Oy] \in \varphi$ *et si* $Oz \subset S$ *alors*

$$m([Ox, Oz]) + m([Oz, Oy]) = m(S).$$

Si l'énoncé est identique à celui de la définition d'une mesure des segments, le problème de l'existence et de l'unicité à un facteur multiplicatif près n'est pas simple à résoudre. En fait c'est un problème équivalent à la mesure des angles et conduit à construire un homéomorphisme additif de S sur [0, 1].

Ce qu'on peut faire dans le premier cycle.

Il faut se contenter d'admettre que le rapporteur est un instrument mystérieux qui permet de « mesurer » un secteur saillant au sens défini ci-dessus, donc en particulier de constater que deux secteurs sont isométriques.

On peut aussi faire construire un rapporteur à l'aide des pliages. On obtient ainsi une graduation avec $2^n + 1$ éléments, ce qui permet de faire des encadrements de plus en plus fins et d'utiliser les nombres à virgule dans le système binaire, un représentant de l'unité de mesure pouvant être le secteur droit.

On peut aussi généraliser à la mesure des secteurs rentrants en passant au secteur associé.

Conclusion.

Il résulte de toute cette analyse que la *terminologie* COHÉRENTE suivante a été proposée, laquelle s'écarte peu de la terminologie traditionnelle.

Dans la ligne 1 on désigne des ensembles de points de l'espace, dans la ligne 2 les classes d'équivalence correspondantes par la relation $\mathfrak{R}(A, B)$ si, et seulement si pour toute mesure μ on a $\mu(A) = \mu(B)$ (il suffit que l'égalité ait lieu pour *une* mesure adaptée à la situation).

Segment	Surface	Solide	Secteur angulaire
Longueur	Aire	Volume	Amplitude

On peut donc aussi bien mesurer un segment qu'une longueur. Le centimètre carré est une aire (ce n'est ni un nombre, ni une surface) et le degré une amplitude. La mesure d'un secteur angulaire est un nombre réel.

Par définition deux ensembles isométriques vérifient la relation d'équivalence $\mathfrak{R}$, mais la réciproque n'est pas vraie s'il s'agit de surfaces ou de solides.

Remarque. — En fait, on ne mesure ici que des longueurs, des aires, des volumes, etc. On pourrait, sur un segment, mesurer bien autre chose (sa capacité, son potentiel, son aire, son âge, en sorte que le mot *mesure* se rapporte à celles explicitement définies ici, et construites essentiellement à partir de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. A proprement parler — c'est-à-dire hors du cadre où nous nous plaçons ici — l'expression mesure d'un segment n'a pas de sens précis. La longueur se définit explicitement comme classe d'équivalence par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, de sorte que « mesure d'une longueur » est une expression sans ambiguïté, et désigne une fonction déterminée à une constante multiplicative près. Sur un segment (ensemble de points), il existe d'autres mesures non proportionnelles à celle-ci. Chacune d'elles définit une « grandeur mesurable ». Ce n'est donc tout de même que par abus de langage que l'on parle de la mesure d'un segment sans dire quelle sorte de « grandeur » on mesure.

P. B.

Une approche de la mesure

La mesure des longueurs, dans les anciens manuels de Sixième, insistait essentiellement sur le mesurage : comment utiliser les instruments. Pour la culture, on rappelait l'histoire du système métrique, et même on indiquait la station de métro la plus proche du Pavillon de Breteuil!

Ou bien la partie 3 du nouveau programme « études d'objets géométriques et physiques donnant lieu à mesures » n'est rien d'autre que le programme ancien (et alors mieux vaudrait n'en rien traiter du tout, car on n'a pas de temps à perdre), ou bien elle peut constituer une approche de la théorie de la mesure et alors c'est un sujet difficile. Au niveau des élèves de Sixième, la géométrie est une partie de la physique (en donnant à ce mot le sens : étude du monde réel et de ses phénomènes). Le problème posé est donc celui de la mathématisation d'une situation physique, ou tout au moins d'une partie importante de cette mathématisation. Il est douteux que nous puissions mener la théorie de la mesure jusqu'à satisfaire à la fois les mathématiciens et les physiciens. Ce n'est pas une raison pour ne rien faire, mais il faut savoir quelles sont les exigences des uns et des autres pour rechercher par quels moyens nous pouvons nous engager dans une bonne route.

L'objectif.

Celui que je me propose est la mesure dite de Jordan. Dans un ensemble E, on définit une famille de parties $\mathcal{A}$ qui soit stable par les opérations de réunion et de différence. Cela signifie : $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$; si $X \in \mathcal{A}$ et $Y \in \mathcal{A}$, alors $X \cup Y \in \mathcal{A}$, $X \setminus Y \in \mathcal{A}$, $Y \setminus X \in \mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ est alors dit *clan* sur E. On remarque : $\varnothing \in \mathcal{A}$ puisque, si $X \in \mathcal{A}$, alors $X \setminus X = \varnothing \in \mathcal{A}$.

Une mesure est alors une application m de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}^+$ qui, à tout élément X du clan, associe un réel positif noté $m(X)$, cette application vérifiant les propriétés :

$$m(X \cup Y) + m(X \cap Y) = m(X) + m(Y)$$
$$m(\varnothing) = 0$$

Les parties de E qui sont éléments du clan sont alors dites parties mesurables de E par la mesure m ou encore parties m mesurables de E.

Si nous définissons un autre clan $\mathcal{B}$ tel que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{P}(E)$, on pourra prolonger l'application m sur $\mathcal{B}$ de telle façon que toute partie du clan $\mathcal{A}$ qui était mesurable le reste (et conserve la même valeur $m(X)$), mais que les parties du clan $\mathcal{B}$ qui n'étaient pas des parties du clan $\mathcal{A}$ soient mesurables.

Si E est un ensemble de points dans un espace choisi (par exemple l'espace métrique euclidien à trois dimensions), on peut imposer à la m-mesure qui y aura été définie d'être invariante par déplacement ou symétrie.

Difficultés pédagogiques.

La plus importante, au premier examen, provient du fait que les élèves ne connaissent pas les réels. Traditionnellement, ce sont les difficultés de la mesure (longueur de la diagonale du carré, périmètre du cercle) qui sont invoquées pour donner conscience qu'il existe (ou qu'il devrait exister) des nombres réels.

La nécessité de définir un clan avant de définir une mesure ne peut apparaître sans préparation. D'autant que les élèves ne nous ont pas attendus pour pratiquer des mesurages... et traiter des « problèmes » sur les dallages de cuisine qui ont fait (et font encore) l'orgueil de manuels du Cours Moyen.

Supposons surmontées les difficultés précédentes, pour les ensembles « géométriques », l'invariance par déplacement ou symétrie sera d'autant plus difficile à définir que déplacements et symétries ne le sont pas.

Le programme officiel parle aussi de masse, de masse volumique, de débits. Comme le dit plus loin DEHAME, dans ce cas c'est le programme officiel qui est trop ambitieux. Nous nous limiterons, par exemple, à mesurer les longueurs et les aires. Et encore, pas toutes les longueurs, pas toutes les aires. Nous n'étudierons pas tout ce que le programme nous indique et nous garderons la conscience libre : les élèves ont-ils achevé leurs études à la fin de la Sixième?

Une première suite d'exercices.

1. Soit $E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$; nous pouvons dénombrer toutes les parties de E qui sont des paires, toutes celles dont le cardinal est 3, etc. Autrement dit, nous savons appliquer $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathbb{N}$, cette application faisant correspondre à $X \in \mathcal{P}(E)$ un naturel noté card X et nous vérifions :

$$\text{card } \varnothing = 0, \qquad \text{card } (X \cup Y) + \text{card } (X \cap Y) = \text{card } X + \text{card } Y$$

2. Sur la ligne de chemin de fer de Saint-Lazare à Saint-Cloud nous connaissons la suite des stations intermédiaires : Pont Cardinet, Clichy, Asnières, Bécons, Courbevoie, Puteaux, Suresnes, Val d'Or. Pour un voyageur qui va de Bécons à Suresnes, il est assez naturel de penser que c'est au troisième arrêt qu'il descend; définissons ainsi une application t de l'ensemble des voyages possibles (sur cette ligne) dans $\mathbb{N}$; ici t (Bécons, Suresnes) $= 3$; de même t (Courbevoie, Saint-Cloud) $= 4$. Nos deux voyageurs se sont trouvés côte à côte sur le trajet (Courbevoie, Suresnes) et $t(C, S) = 2$. Ils ont été les seuls occupants de ce compartiment qui a donc été occupé par un voyageur au moins sur le trajet (Bécons, Saint-Cloud) tel que $t(B, SC) = 5$. On vérifie : $t(B, S) + t(C, SC) = t(C, S) + t(B, SC)$.

Pour le voyageur étourdi qui est entré dans le compartiment à Bécons mais qui est redescendu aussitôt parce qu'il se trompait de train, $t(B, B) = 0$.

Dans E, $\mathcal{P}(E)$ est un clan; l'application card est une mesure. Sur la ligne Saint-Lazare, Saint-Cloud, les trajets de station à station constituent un clan (avec les conventions précitées pour intersection et réunion); t est une mesure (qui n'est pas sans lien avec le prix du billet).

3. *Sur un damier*, le premier joueur dispose les jetons blancs sur les cases (blanches ou noires) de son choix; il définit ainsi un sous-ensemble B de l'ensemble D des cases du damier; le deuxième joueur opère de la même façon avec les jetons noirs (il a le droit d'occuper une case déjà occupée par un jeton blanc); soit N le sous-ensemble des cases marquées d'un jeton noir.

B et N peuvent être considérées comme deux surfaces incluses dans la surface du damier. Le nombre b des jetons qui définissent B est une mesure de B.

Il apparaîtra rapidement aux élèves que ces trois exercices, sous des aspects différents, sont de la même nature : ils définissent une mesure, chaque fois sur un ensemble discret. Avant d'aller plus loin, on peut donc conclure que sur toute ligne (fig. 1) jalonnée de points marqués, dans toute surface (fig. 2) partitionnée ou carrelée, il est possible de définir un clan de « segments » ou de « surfaces » mesurables.

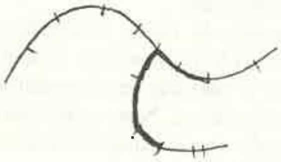


FIG. 1.

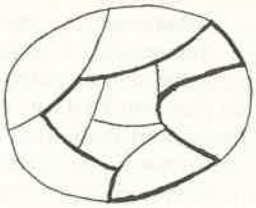


FIG. 2.

Essai de formalisation.

Simplifions les situations précédentes en considérant les segments sur une droite, un quadrillage dans le plan (fig. 3 et 4).

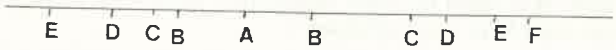


FIG. 3.

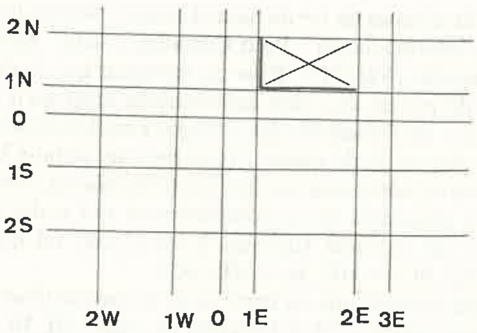


FIG. 4.

Les segments semi-ouverts tels que [BC[, les « carreaux » semi-ouverts tel que le carreau marqué (1E, 1N) du nom du sommet Sud-Ouest de ce carreau (fermé au Sud et à l'Ouest, ouvert au Nord et à l'Est) constituent des clans.

La définition de segments mesurables, de surfaces mesurables, dans ces cas de figure, ne présente pas de difficulté. L'expérience montre que la notion d'ouvert ou de fermé, pour abstraite qu'elle soit, n'est pas hors de la portée des élèves de Sixième. Faute de l'accepter, on en est réduit à introduire les « segments » de mesure nulle tels que [BB], les « surfaces » de mesure nulle telles que le segment [1 E, 2 E] sur la ligne 1 S, etc.

A propos de l'introduction des ouverts ou des fermés, l'introduction de la notion de *bord* (le bord d'un segment est l'ensemble de ses extrémités, le bord d'un carré l'ensemble de ses côtés) est commode. Si le carré est l'ensemble de son bord et de sa surface intérieure, n'est-il pas naturel de distinguer carré ouvert et carré fermé selon que le bord n'est pas compris ou l'est?

Sur les figures 3 et 4, nous avons, à dessein, utilisé des points marqués quelconques, des « carreaux » qui, pour être rectangulaires (pour la commodité du dessin sur le cahier) n'en sont pas moins irréguliers. En Sixième, l'isométrie sera définie par la superposition (par exemple deux faces d'un cube sont dites isométriques parce qu'elles ont la même *empreinte*, deux cubes sont isométriques s'ils sont issus du même *moule ;* c'est de la physique). Il n'est pas difficile de passer des mesures avec segments ou carreaux irréguliers à mesures avec segments ou carreaux isométriques : on obtient une mesure invariante par translations et certaines symétries.

Généralisation.

Reste le problème très général : comment mesurer un segment quelconque de la droite graduée (à graduations régulières désormais), comment mesurer la surface d'une pièce à cloisons mobiles posées sur un sol carrelé?

Il est instructif de prendre conscience d'une difficulté nouvelle. On a une mesure approchée de la surface d'un rectangle en dénombrant les carreaux du clan intérieurs à la surface du rectangle. Mais, par translation du rectangle, sur le quadrillage, il apparaît que deux rectangles isométriques ont, pour mesures approchées par défaut de leur surface, dans un cas 2, dans l'autre cas 6. Par contre, les mesures approchées par excès (obtenues par dénombrement des carreaux du clan *recouvrant* la surface du rectangle est, selon les cas, 12 et 20). Admettons provisoirement l'existence de deux nombres a et a' exprimant les mesures des deux rectangles :

$$2 < a < 12 \qquad 6 < a' < 20$$

Il faudra sans doute freiner l'ardeur de certains élèves ayant tôt fait de poser

$$a = a' \quad \text{et} \quad 6 < a < 12$$

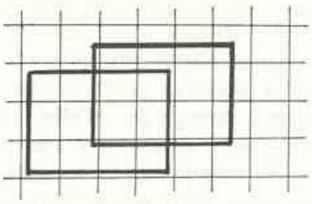


FIG. 5.

Mieux vaut, plus posément, plonger le premier clan dans un second plus riche (par subdivision des segments en deux si le système de numération binaire a été adopté, en dix si c'est en numération décimale) et étudier les nouvelles mesures b et b' obtenues.

L'exercice est à effectuer sur papier millimétrique avec une surface de forme quelconque obtenue par reproduction mécanique mais la position de la surface sur le quadrillage variant d'une copie à l'autre. On peut d'ailleurs se contenter de faire dessiner par les élèves soit un cercle de rayon donné, soit pour éviter chez des faux malins le recours à une formule connue, une surface plus compliquée (fig. 6).

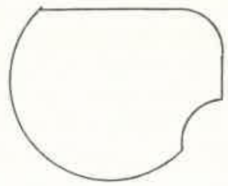


FIG. 6.

Aurons-nous, par de tels exercices, préparé nos élèves à comprendre, plus tard, une théorie de la mesure qui leur sera indispensable dès qu'ils prendront contact avec les probabilités? Il me semble, en tout cas, que cela ne les empêchera pas de résoudre les problèmes de carrelage de cuisine que je paraissais mépriser au début alors que, à Ostia ou à Vaison-la-Romaine, j'admire les solutions que des artisans des vieux âges ont imaginées.

G. W.

N'allez pas croire...

Extrait d'une lettre d'un collaborateur qui nous a beaucoup aidé dans la composition de ce *Bulletin* et qui, par conséquent, en a lu les matériaux.

« N'allez pas croire que les manuels, les nouveaux qui viennent de paraître, soient nécessairement plus mauvais que les anciens, ou meilleurs. N'allez pas croire que si vous enseignez autrement qu'avec des fiches ou que, si vous utilisez des fiches vous ne les perforez point, n'allez pas croire que pour cette raison vous êtes un pédagogue rétrograde. N'allez pas croire enfin, si vous ne savez pas travailler en équipe, que votre œuvre très personnelle soit sans valeur.

Je reviens sur les manuels dont j'entends les critiques les plus vives. Je m'en réjouis s'il y a là manifestation d'un esprit critique aiguisé et si la critique est faite sous la forme qui convient, c'est-à-dire favorable à un progrès collectif de notre enseignement. Je m'en inquiète au contraire si la diversité des conceptions, les écarts entre les terminologies font progresser cette opinion qu'un manuel unique et officiel nous préserverait de ces maux. Même si c'était vrai, pensez aux maux bien plus graves que nous infligerait de façon certaine le manuel officiel, je veux dire le catéchisme de Grenelle.

Mieux vaut mille fois cette diversité et notre coopération au sein de l'A.P.M.E.P. pour trier et apprendre à trier. »

Evariste DUPONT.