approximation, n. f.

Us.: Estimation, évaluation par à peu près. (D'après l'étymologie cette évaluation devrait être « la plus proche » d'une évaluation rigoureuse; en fait le langage courant laisse souvent entendre qu'elle peut en être passablement éloignée : cela est surtout sensible avec l'adjectif *approximatif.* Cette ambiguïté a contaminé le langage mathématique d'où l'on a intérêt à la bannir dès qu'elle devient gênante).

1. Sens général.

1.1. Action de substituer à un être mathématique qu'on ne peut ou ne souhaite pas utiliser un être considéré comme « voisin »; par extension : l'être mathématique ainsi obtenu.

La définition qui précède ne présente d'intérêt que si le sens du mot « voisin » y est précisé, car faute d'une information sur les relations entre l'être à approcher et ses « approximations » aucun maniement de celles-ci n'est possible. Dans tous les cas, l'être à approcher a appartenant à un espace topologique E, les « approximations » de a devront nécessairement être prises dans un certain sous-ensemble A de E, qui sera appelé *ensemble d'évaluation.*

1.2. Une première acception, très large, consiste à dire que tout élément de A est *une* approximation de a; mais il vaut mieux dire dans ce sens qu'un tel élément est une *évaluation* de a. Dans le cas courant où de surcroît E est distanciable, la distance de a à une de ses évaluations a' mesure la *précision* de cette évaluation. Lorsque A est dense sur E, on peut trouver des évaluations a' aussi voisines de a qu'on le désire; les processus qui permettent d'obtenir une suite d'évaluations de plus en plus voisines de a sont connus sous le nom d'*approximations successives* et les exemples abondent : développements décimaux d'un réel, développements en série limités, méthodes d'itération pour la recherche des racines d'une équation, fonctions approchées par des quadratures successives, etc. Ces processus sont d'une grande importance théorique, car c'est souvent la convergence de la suite des évaluations qui fonde l'existence de l'être inconnu a.

1.3. Cependant les nécessités pratiques imposent une situation assez différente : le nombre des décimales, le degré d'un polynome interpolateur, etc., sont limités. Alors, l'ensemble d'évaluation A n'ayant plus de point d'accumulation, ce qui importe est de trouver un élément a' de A *aussi voisin que possible* de a; s'il en existe plusieurs, on indiquera en général une condition supplémentaire qui permet d'en distinguer un de préférence aux autres (voir ci-dessous les exemples de la « règle de Gauss » et de l' « arrondi automatique »). L'évaluation a' ainsi déterminé sera appelée *approximation de a sur A*.

Cette acception plus stricte, qui est celle de Čebyšev, revient donc à considérer l'approximation comme résultant d'une optimisation des évaluations. C'est celle qui sera adoptée ici pour l'étude des évaluations et approximations des nombres réels, question fondamentale en calcul numérique où elle donne lieu à un vocabulaire abondant et délicat.

2. Evaluations d'un réel.

Soit a un réel, a' l'une quelconque de ses évaluations réelles. Pour que cette évaluation soit utilisable, il est nécessaire de disposer d'une information sur la différence $a'-a$ [ERREUR, INCERTITUDE]; cette information concerne essentiellement son module $|a'-a|$ (distance de a à a'), accessoirement son signe.

2.1. *Précision d'une évaluation:* ε étant un réel positif, l'évaluation est dite :

— à ε près si $|a'-a| \leqslant \varepsilon$;
— à moins de ε près si $|a'-a| < \varepsilon$.

2.2. *Sens d'une évaluation:* l'évaluation est dite :

— par défaut si $a'-a$ est négative ou nulle;
— par excès si $a'-a$ est positive;
— exacte si $a'-a$ est nulle.

Employer « évaluation » tout court signifie en général qu'on ignore le signe de $a'-a$.

Exemple: dire qu'en un certain lieu une évaluation de g en m/s^2 est 9,812 à 0,003 près signifie : $9{,}809 \leqslant g \leqslant 9{,}815$.

2.3. On remarque que la nature arithmétique de l'évaluation a' ne présente pas ici un grand intérêt. Ainsi, parmi les évaluations de π, $\sqrt{10}$ est une évaluation par excès à moins de 1/46 près, 223/71 une évaluation par défaut à 10^{-3} près, et 3,06 une évaluation à 10^{-1} près; le fait que la première soit irrationnelle, la seconde rationnelle, la troisième décimale et d'ordre 2 n'intervient pratiquement pas.

3. Diverses approximations d'un réel sur un ensemble de réels.

3.1. Conformément à la définition générale donnée en [**1.3**], si, parmi les évaluations a' d'un réel a qui appartiennent à un ensemble A — indépendant de a —, il est possible d'en déterminer une sans ambiguïté qui rende $|a'-a|$ minimal, cette évaluation est dite *approximation* de a' sur A.

A l'inverse de ce qui a été dit pour les évaluations, le choix de A joue ici un rôle primordial; car un mauvais choix de A mettrait en cause l'existence même de l'approximation : ainsi, dans les sciences expérimentales, A doit être adapté à la précision des mesures (chercher la meilleure évaluation en centimètres de la distance de la Terre au Soleil est actuellement un non-sens). En calcul numérique les choix usuels de A — ensemble des entiers ou des nombres décimaux qui sont d'ordre n donné — ne soulèvent aucun problème d'existence, mais seulement parfois un problème d'unicité déjà signalé; par ailleurs, la *précision* de l'approximation — entière ou décimale d'ordre n — est du même coup déterminée.

3.2. En fait les évaluations a' sont souvent soumises à une contrainte supplémentaire, ce qui revient à transférer la condition de minimum sur un sous-ensemble de A (ce sous-ensemble dépendant cette fois de a). Ainsi, si l'on se place sur le sous-ensemble A_1 des évaluations par défaut de a, l'approximation qu'on obtient — c'est-à-dire le plus grand élément de A_1 — est dite *approximation par défaut* de a sur A; de même le plus petit élément du sous-ensemble A_2 des évaluations par excès de a est l'*approximation par excès* de a sur A; l'approximation obtenue sur le sous-ensemble A_3, intersection de A avec l'intervalle fermé d'extrémités 0 et a, sera appelée l'*abrégé* de a sur A : c'est le plus grand élément de A_3 si a est positif ou nul, et le plus petit élément de A_3 si a est négatif ou nul; enfin on appelle généralement *meilleure approximation* de a sur A lui-même l'approximation au sens propre définie en [**3.1**], afin de la distinguer explicitement des précédentes.

N. B. — La dénomination d' « abrégé » est proposée ici pour remplacer l'appellation usuelle d' « approximation naturelle », dont l'emploi est visiblement incompatible avec le sens actuel donné au mot « naturel » [ABRÉGÉ, ROMPU].

4. Approximations entières d'un réel.

Ici l'ensemble d'évaluation A du réel a est l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers.

4.1. *Approximation entière par défaut:* plus grand entier inférieur ou égal à a. On l'appelle encore « partie entière » ou « caractéristique » de a; elle est notée $E(a)$. [PARTIE, CARACTÉRISTIQUE, MANTISSE.]

4.2. *Approximation entière par excès:* plus petit entier (strictement) supérieur à a. Elle est égale à $E(a+1)$.

4.3. *Abrégé entier* (encore appelé « partie entière naturelle », ce qui, outre l'ambiguïté du mot « naturel », crée une confusion regrettable avec [**4.1**]) : valeur, notée $[a]$, de la fonction impaire de a définie comme suit : si $a \geqslant 0$, $[a] = E(a)$; si $a \leqslant 0$, $[a] = -E(-a)$. Lorsque a est décimal, il suffit pour l'obtenir de supprimer les chiffres décimaux et la virgule.

4.4. *Meilleure approximation entière :* celle des deux approximations entières par excès et par défaut qui est la plus voisine de a, sous réserve qu'elle soit unique. C'est donc en général l'expression (impaire) $[2a]-[a]$. Lorsque a est décimal — et sauf le cas où sa première décimale serait un 5 suivi exclusivement de zéros — il suffit pour l'obtenir d'écrire l'abrégé $[a]$ sans changement si la première décimale est inférieure à 5, et en « forçant » le dernier chiffre dans le cas contraire.

La définition ci-dessus devient ambiguë lorsque a est un nombre décimal dont le rompu (ou « partie décimale ») est $\pm 0{,}5$. On lève cette ambiguïté par la convention dite « règle de Gauss » qui vise à compenser statistiquement les erreurs :

si $[a]$ est pair, on prend $[a]$; si $[a]$ est impair, on garde $[2a]-[a]$, ce qui revient à « forcer » le dernier chiffre de $[a]$.

4.5. *Arrondi automatique entier.* — Dans le calcul automatique on préfère lever l'ambiguïté signalée en adoptant dans tous les cas $[2a]-[a]$; cette approximation ne diffère donc de la précédente que par la non-application de la règle de Gauss : lorsque le rompu est $\pm 0{,}5$, on force toujours le dernier chiffre.

4.6. *Exemples :*

Approximations entières de :	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	—0,012	48	—48	—5,5	—6,5
Par défaut ...	1	—2	—1	48	—48	—6	—7
Par excès	2	—1	—0	49	—47	—5	—6
Abrégé	1	—1	—0	48	—48	—5	—6
Meilleure	2	—2	—0	48	—48	—6	—6
Arr. autom. ..	2	—2	—0	48	—48	—6	—7

5. Approximations décimales.

Approximations décimales d'ordre n d'un réel a (le mot « décimales » est souvent omis en pratique; on préciserait « binaires », « octales », ..., en cas de besoin). Ici l'ensemble d'évaluation A est l'ensemble $\mathbb{D}_n$ des nombres décimaux dont l'ordre n est donné. Ces approximations généralisent les approximations entières, du fait que $\mathbb{Z} = \mathbb{D}_0$, et elles s'y ramènent aisément. Appelons en effet $f_0(a)$ l'une quelconque des approximations entières du réel a; l'approximation d'ordre n de même type est donnée par la formule générale :

$$f_n(a) = \frac{f_0(a \times 10^n)}{10^n}$$

Exemples :

Nombres	$\pi = 3{,}141\,59\ldots$	$-e = -2{,}718\,28\ldots$
Appr. d'ordre 1, par défaut	3,1	—2,8
Appr. d'ordre 2, par excès	3,15	—2,71
Abrégé d'ordre 4................	3,141 5	—2,718 2
Meilleure appr. d'ordre 4	3,141 6	—2,718 3
Arrondi autom. d'ordre 4	3,141 6	—2,718 3

Exemples avec ou sans application de la règle de Gauss (ordre 2):

Nombres	$\pm 49{,}975$	$\pm 49{,}985$	$\pm 49{,}995\ 000$	$\pm 50{,}005\ 00$	$\pm 50{,}015$
Meilleure appr.	$\pm 49{,}98$	$\pm 49{,}98$	$\pm 50{,}00$	$\pm 50{,}00$	$\pm 50{,}02$
Arrondi autom.	$\pm 49{,}98$	$\pm 49{,}99$	$\pm 50{,}00$	$\pm 50{,}01$	$\pm 50{,}02$

La définition de $f_n(a)$ resterait valable même si n prenait des valeurs entières négatives. Toutefois il est conseillé en pareil cas d'utiliser de préférence les approximations flottantes.

6. Approximations flottantes.

Dans chacun des types étudiés on obtient l'approximation flottante d'ordre n d'un nombre a en remplaçant, dans l'écriture de a sous forme de nombre flottant normalisé, le cofacteur par son approximation d'ordre n de même type. [FLOTTANT.]

Exemples d'approximations flottantes d'ordre 4 :

Nombres	61,042 8	—0,036 427 529
Par défaut	$6{,}104\ 2 \times 10^1$	$-3{,}642\ 8 \times 10^{-2}$
Par excès	$6{,}104\ 3 \times 10^1$	$-3{,}642\ 7 \times 10^{-2}$

Exemples d'approximations flottantes d'ordre 3 :

Nombres	92,5	—0,028 418	624,562	99,999
Abrégé	$9{,}250 \times 10^1$	$-2{,}841 \times 10^{-2}$	$6{,}245 \times 10^2$	$9{,}999 \times 10^1$
Meilleure........	$9{,}250 \times 10^1$	$-2{,}842 \times 10^{-2}$	$6{,}246 \times 10^2$	$1{,}000 \times 10^2$

Voici enfin les approximations flottantes d'ordre 2 de quelques constantes physiques usuelles :

	Par défaut	Par excès
	—	—
Vitesse de la lumière	$2{,}99 \times 10^5$ km/s	$3{,}00 \times 10^5$ km/s
Nombre d'Avogadro..........	$6{,}02 \times 10^{23}$	$6{,}03 \times 10^{23}$
Volume moléculaire	$2{,}24 \times 10^4$ cm^3	$2{,}25 \times 10^4$ cm^3
Masse de l'ion-gramme Na^+ ..	$2{,}29 \times 10^1$ g	$2{,}30 \times 10^1$ g
Charge de l'électron	$-1{,}61 \times 10^{-19}$ C	$-1{,}60 \times 10^{-19}$ C