

Variations prudentes sur quelques problèmes d'écriture

J.-M. CHEVALLIER

Lycée Marcelin-Berthelot, Saint-Maur

Notre collègue Lacombe a bien voulu faire, en février-mars 1968, à l'intention de la Régionale parisienne un certain nombre d'exposés. Je pense qu'on en travestirait gravement le caractère en parlant d'un « cycle de conférences » affublé d'un titre pompeux : car ce qui a surtout retenu l'attention des auditeurs, c'était la liberté du dialogue — questions, réponses, parfois digressions — où nous, maîtres du second degré, trouvions ample matière à réflexion critique et à exercices pratiques sur les exigences, et aussi les traquenards, d'un langage que nous croyons parfois bien connaître — et même enseigner !

Une sténographie de pareilles causeries, sans « l'atmosphère » et le tableau noir, serait à peine lisible; d'un autre côté une mise en forme systématique, concevable sous la plume de Lacombe lui-même, serait de ma part une manière de trahison. Je pense donc être plus fidèle, malgré les apparences, en abordant très librement quelques-uns des points traités, sans m'interdire, le cas échéant, quelques détours, banalités, redites, ou remarques personnelles de « l'auditeur moyen » que j'étais. Au fond j'apporte un témoignage, qui a la fragilité habituelle des témoignages. Cela présente un certain risque, mais, vu l'intérêt des exposés de Lacombe, ce risque vaut d'être pris.

Mathématique, péri-mathématique, méta-mathématique.

Une distinction admise par tous, mais qu'il ne faut jamais perdre de vue, doit être faite entre les objets proprement mathématiques et des objets *péri-mathématiques* parmi lesquels on peut ranger toutes sortes de choses : symboles, numérotage des théorèmes, mots du langage « vulgaire » employés dans les énoncés, typographie des manuels, jusqu'aux intonations et gestes du professeur (car après tout il existe une « péri-pédagogie ») : toutes choses qui

pourraient être radicalement modifiées sans la moindre atteinte à l'idée mathématique sous-jacente. Parmi eux cependant on peut distinguer une classe d'objets (*métamathématiques*) plus spécialisés, par exemple le *nom* des objets mathématiques (qu'on évitera de confondre avec les objets), certains objets comme *expression, énoncé, théorème, etc.*

Il existe d'autre part, comme en littérature, des « genres » caractérisés par des styles différents : il y a le style de la publication et le style du tableau noir, encore faudrait-il distinguer la publication savante du manuel élémentaire, sans compter le ronéoté qui ne touche que des initiés, l'enseignement par correspondance destiné à des autodidactes, etc. Et bien sûr chacun de nous a son style personnel.

Or les objets mathématiques proprement dits, les symboles qui les représentent, la syntaxe qui les lie sont à peu près indépendants du style employé, du moins dans un domaine assez vaste où règne un accord pratiquement général. Il n'en va pas du tout de même pour les objets périmathématiques, dont l'emploi varie énormément avec les situations.

On pourrait donc songer à un moyen radical : renoncer à tout signe périmathématique, langage vulgaire compris. Ce serait affreusement long, difficile à la lecture, impraticable à la parole : imaginez qu'au lieu de renvoyer commodément aux théorèmes antérieurs on redonne en chaque occasion de rencontre leur énoncé intégral, lui-même passablement hermétique ! Ce symbolisme puriste prendrait le contrepied d'un autre purisme, assez vieillot, qui consistait à vouloir tout exprimer « en bon français » ; certes nous devons veiller à la correction du langage, mais l'expérience montre d'abord que ce « bon français » devient rapidement d'une lourdeur insupportable, et aussi que, même élégante, une phrase peut être mathématiquement critiquable. Exemple : *Un idéal b d'un anneau A est un sous-groupe additif tel que $x \in b$ et $a \in A$ impliquent $ax \in b$* ; or la conjonction logique, marquée ici par *et* et le pluriel du verbe, est au moins ambiguë, et surtout il manque les quantificateurs universels.

Sur ce « mélange des styles » une attitude modérée semble la meilleure : entre l'interdiction brutale et le laisser-aller il y a place pour un juste milieu ; bon sens et clarté sont les meilleurs guides. Exemple de mélange classique qui demeure tout-à-fait acceptable : *Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{r}$ la série entière converge absolument pour $|x| < r$ et sa somme tend vers $f(r)$ lorsque $x \rightarrow r$.*

Laissons à présent de côté cet emploi inévitable du langage quotidien et venons-en aux graffiti périmathématiques. Dans la publication imprimée mieux vaut restreindre le plus possible leur emploi ; au tableau ils offrent une commodité, mais faut-il les codifier ? C'est plus dangereux qu'utile, car cette codification risque de les faire prendre pour des signes mathématiques et d'accroître la confusion. Donc ne pas abuser d'eux, mais surtout *ne pas en introduire là où existent déjà des signes précis, ou, pis encore, employer des signes précis avec une signification faussée*, que nos élèves se hâteront d'aggraver.

Exemples de cette perversion : l'emploi sténographique de \exists , \forall , $=$, \Rightarrow pour « il existe », « quelconque », « égal », « donc »; pire qu'une faute de goût ou de soin, c'est une *faute de pensée* : car \exists signifie « pour au moins un ... », \forall signifie « pour tout ... », $=$ signifie « est égal à ... », quant à \Rightarrow (qui mérite à lui seul un article), on fait un contresens grave en l'interprétant comme un lien causal, Bien peu recommandable encore est l'emploi de l'égalité des programmeurs; irréprochable dans la technique de programmation, ce signe périmathématique est dangereux pour nous; écrivions-nous, comme les programmeurs le font parfois, $n : = n+1$? En revanche la suggestion d'Ehrhart (n° 262), adopter $\stackrel{''}{=}$ pour signifier « est égal par définition à » me semble pouvoir être retenue.

Exemple de signes inutiles : on a proposé les deux graffiti *accolade* et *trait sinueux* pour indiquer une liaison conjonctive ou disjonctive entre des énoncés écrits sur plusieurs lignes. Cela peut être commode au tableau, mais pas plus commode que

$$\wedge \left| \begin{array}{l} \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots\dots \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \vee \left| \begin{array}{l} \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots\dots \end{array} \right.$$

Dernier exemple : le point d'interrogation, écrit soit à part, soit associé à un \exists , un $=$, etc. pour signifier « est-il vrai que ...? Lacombe le proscriit dans les livres, et il a raison; je pense même qu'en le tolérant au tableau il atteint les limites de l'indulgence. En tout cas je crois qu'il faut pourchasser l'abominable $\exists?$, non parce qu'il est pire que les autres, mais parce qu'on lui donne un sens aberrant : $\exists?x, f(x) = 0$, c'est-à-dire littéralement « Y a-t-il au moins un x qui annule $f(x)$? » n'est absolument pas synonyme de « Résoudre l'équation $f(x) = 0$ ».

Les mutificateurs.

Que les âmes sensibles se rassurent! Ces mutificateurs ne sont pas des bâillons, ni même des problèmes propres à laisser nos élèves sans voix. Il s'agit de signes — au sens le plus général du mot — qui rendent *muettes* (ou *liées*) certaines occurrences d'une lettre, les autres occurrences étant *parlantes* (ou *libres*). Pour que ces signes puissent remplir leur office, il est nécessaire que leur usage soit codifié, en particulier que la place de la lettre à mutifier soit parfaitement déterminée; cette place ou *occurrence indicative*, sera marquée ici par un \square .

Exemple courant de mutificateur : le signe $\int_a^b \dots d\square$, où le \square indique la « variable d'intégration »; ainsi, dans $\int_0^1 x^2 \sin 3xdx$ toutes les occurrences de x sont muettes; dans $\int_0^x x^2 \sin 3xdx$, les occurrences de x sous le signe somme sont muettes, mais la borne supérieure est parlante; dans $\int_0^y y^2 \sin 3xdx$

les occurrences de x sont muettes, celles de y sont parlantes; etc. Autre exemple simple : \sum .

□

Dès l'abord une remarque importante. Dans son cours de logique, Lacombe insiste assez fortement sur ce fait que l'occurrence indicative doit être occupée par *une simple lettre*, jamais par un nombre ou une expression; il tolère un multiplé de lettres, par exemple $\forall(x, y, z)$ comme abréviation de $\forall x, \forall y, \forall z$. Or au cours de ses causeries il a fait un certain nombre d'entorses à ce principe, à vrai dire toutes dans le même esprit. Comme l'illogisme n'est pas son travers dominant, il est intéressant de démêler ce qui l'a poussé et justifié.

Lorsque nous écrivons une expression, notre souci primordial — du moins dans le cadre déjà passablement large d'une conception ensembliste — est (ou devrait être) de savoir *quels ensembles* décrivent les variables qui y figurent, sans quoi le sens de l'expression reste mal défini. Parfois cette appartenance est sous-entendue parce qu'elle va de soi : si l'on écrit sans commentaire $\sum_i a_i$, tout le monde sent « d'instinct » que i décrit \mathbb{N} . Ou bien elle est clairement annoncée à l'avance : dès que nous avons écrit \int_a^b , nous savons que la variable d'intégration va décrire le segment orienté qui va de a à b . Mais si par exemple i prend les valeurs entières de 0 à n ? La diversité des notations suffit à traduire notre embarras. Certains écrivent \sum_0^n , qui est à proscrire, car l'occurrence indicative de i a complètement disparu; d'autres $\sum_{i=0}^n$, ce qui n'est pas encore fameux. L'écriture la plus « honnête » consisterait sans doute à se ramener aux cas précédents en *annonçant* l'ensemble décrit *avant* d'écrire le \sum ; mais où? Et si, comme la chose est possible, i sert à nouveau de lettre muette mais en décrivant un ensemble différent, comment distinguer? Alors, en pratique :

a) ou bien on fait suivre immédiatement la somme indiquée par le \sum de l'indication de l'ensemble, la ponctuation entre les deux étant assez indécise :

$$\sum_i a_i \quad i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

b) ou bien on écrit $\sum_{0 \leq i \leq n} a_i$, écriture assez condensée et par là commode, mais où l'occurrence indicative comporte, *outre la lettre à mutifier, l'indication de l'ensemble qu'elle décrit* (variante $\sum_{i \in I} a_i$). C'est cette situation que nous allons retrouver dans la plupart des cas, à des détails près.

1° **Les quantificateurs** $\forall \square$ et $\exists \square$. — Comment écrire que la variable muette décrit un ensemble E ? Proscrivons tout de suite $(\forall x) (x \in E)$ qui signifierait « n'importe quel x appartient à E ». Si l'on sait d'avance ou si l'on a

écrit d'avance $x \in E$, le plus simple est d'employer $\forall x$; mais on risque des malentendus dans les cas compliqués. Sinon :

a) ou bien on emploie le *quantificateur relativisé* $\forall x/x \in E$,

b) ou bien on l'abrège en $\forall x \in E$, écriture qui, malgré quelques inconvénients, a le mérite d'être très ramassée et courante. Ici encore l'occurrence est indicative de la lettre *et de l'ensemble*.

2° Définition d'un ensemble en compréhension. — En principe il faut disposer d'une accolade à *trois* compartiments : le premier pour le terme général, le second pour l'occurrence indicative des variables muettes, éventuellement complétée par l'indication des ensembles qu'elles décrivent, le troisième pour la propriété caractéristique qui définit l'ensemble (au fond le dernier apparaît encore comme relativisant le mutificateur du second). Le double exemple suivant met en lumière l'importance du rôle du compartiment médian :

$$\{x+y/x \in \mathbb{R} / (y \in \mathbb{R}) \wedge (x^2+y^2=1)\} = \{y-\sqrt{1-y^2}, y+\sqrt{1-y^2}\}$$

tandis que :

$$\{x+y/(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2=1\} = [-\sqrt{2}, +\sqrt{2}].$$

Dans nombre de cas usuels, où la variable muette n'est pas douteuse, on se contente de deux compartiments, mais cette mutification masquée n'est pas sans inconvénients pédagogiques.

3° Les applications. — Remarque préalable : la flèche \rightarrow n'a qu'un sens très général : écrire $f: E \rightarrow F$ signifie seulement « f appartient à l'ensemble des applications de E dans F ». Malgré le très grand usage qu'on en fait, l'économie de cette flèche serait donc possible, et d'autant plus souhaitable qu'on risque la confusion avec le mutificateur $\square \mapsto$, beaucoup plus précis. Car $x \mapsto x^2 \sin(y \cos x)$ est le *nom* d'une application f parfaitement définie et l'on peut écrire sans remords $f: x \mapsto x^2 \sin(y \cos x)$ et même

$$f = [x \mapsto x^2 \sin(y \cos x)].$$

Mais attention! d'après la remarque générale du début, je n'ai pas le droit d'écrire la « valeur particulière » : $\pi \mapsto \pi^2 \sin(y \cos \pi)$, où la flèche n'est plus du tout mutifiante. (Naturellement je l'ai fait cent fois, et je ne dois pas être le seul.) On conserve bien sûr le droit d'écrire $f(\pi) = \pi^2 \sin(y \cos \pi)$.

Après ce qui a été dit, il apparaît tout naturel, au moins dans les cas simples, de faire figurer l'ensemble de définition de l'application en même temps que l'occurrence indicative, par exemple : $(x \in \mathbb{R}^*) \mapsto \frac{1}{x}$. Naturellement, si cet ensemble de définition est plus compliqué, si l'ensemble d'arrivée doit également être précisé, une écriture plus circonstanciée sera nécessaire.

4° **Les limites.** — La critique de la phrase « $f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers a » n'est plus à faire; il faut considérer cette phrase comme un tout non analysable où les deux verbes « tend » ne sont même pas synonymes. Les traduire par des flèches n'arrange rien, en tout cas la graphie $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$ n'est pas non plus décomposable en deux flèches. Certainement meilleur, dans le langage parlé comme dans l'écriture, est l'emploi du mot « limite » et du mutificateur \lim , par exemple $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$.

Cette écriture, pour être courante, est-elle excellente? On peut lui faire deux reproches : d'abord cela fait *encore une flèche* — avec son cortège d'associations d'idées « cinématiques », tout-à-fait inopportun ici; et puis la notion de limite recouvre non une fonction d'*ensemble*, mais une fonction de *fonction* : elle porte sur f et non sur $f(x)$. Une autre écriture a été proposée, avec un « Lim » qui n'est pas mutificateur, écriture pour laquelle je ne dissimule pas ma très nette préférence : $\text{Lim}_a f = b$, ce qui entraînerait, de façon très simple : $\text{Lim}_0 \sin = 0$, ou, lorsqu'il est nécessaire de détailler :

$$\text{Lim}_0 \left(x \mapsto \frac{\sin x}{x} \right) = 1.$$

Par exemple, pour la définition de la dérivée, on aurait, à volonté :

$$\text{soit } \text{Lim}_0 \left(h \mapsto \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) \quad \text{soit } \text{Lim}_{x_0} \left(x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right).$$

Pratiquement ce n'est pas plus compliqué que l'écriture habituelle, mais à mon sens beaucoup plus conforme à l'idée à exprimer.

Les incidentes.

Comme on l'a déjà dit, une tournure peut être correcte pour la grammaire, voire élégante par son style, sans être mathématiquement bonne; même si elle l'est, sa transcription littérale au moyen des symboles mathématiques ou logiques usuels peut aboutir au contre-sens ou au non-sens (ce qui est d'ailleurs le cas de toutes les traductions mot-à-mot).

Parmi les pièges où nous risquons de trébucher, et nos élèves avec nous, l'un des plus perfides est l'*incidente* des grammairiens. Déjà du simple point de vue de sa forme grammaticale, ses aspects sont multiples : souvent c'est une proposition relative introduite par un « qui », un « que », un « dont »; on peut volontairement l'alourdir (en général par souci de précision) en l'introduisant par un « le quel », « du quel »; etc., on peut aussi l'alléger en lui substituant une tournure participiale ou même l'apposition d'un simple adjectif ou nom entre virgules. Exemple :

Relative : les Français, qui habitent la zone tempérée, ...

Participiale : Les Français, habitant la zone tempérée, ...

Apposition : Les Français, habitants de la zone tempérée, ...

A la limite disparaît même parfois toute trace de subordination, une juxtaposition suffit. Au lieu de « Trois et deux (sous-entendu : qui font cinq) et cinq font dix », le Malade imaginaire dit dans une langue on ne peut plus classique : « Trois et deux font cinq, et cinq font dix, et dix font vingt » — alors que pour nous « $3+2 = 5+5 = 10+10 = 20$ » est une monstruosité.

Si de la grammaire on passe à la logique, la diversité est encore plus troublante : le plus souvent cette incidente, explicative ou causale, se traduit par un « vu que » ou un « parce que », parfois au contraire elle est concessive et se traduit par un « quoique ». Dans ces conditions on ne sait *a priori ni quel signe logique employer, ni surtout où le mettre*, car cette incidente, qui ne concerne qu'une partie de l'énoncé, vient interrompre nos chaînes de symboles.

C'est ainsi qu'on tombe (trop) facilement dans un emploi fautif du signe = en lui donnant la valeur adjectivale « égal » au lieu de la valeur verbale « est égal à » (remarques analogues pour \neq , $<$, etc.). Exemple emprunté à un texte de baccalauréat : *Considérons la suite $u_0, u_1, u_2 = a, u_3, u_4$* . Rigoureusement seules deux interprétations sont permises : ou bien « la suite (u_0, u_1, u_2) est égale à la suite (a, u_3, u_4) » — ou bien « la suite proposée est constituée de cinq éléments dont les deux premiers et les deux derniers appartiennent à \mathbb{R} , l'élément médian, c'est-à-dire l'énoncé $u_2 = a$, appartenant à la paire {Vrai, Faux}. Autre exemple, probablement très courant : $x \rightarrow x^2 = y$; qu'entendre par là? Faut-il comprendre $(x \rightarrow x^2) = y$? alors y est une *application* et non un réel; ou bien $x \rightarrow (x^2 = y)$? alors on a une application de \mathbb{R} dans {Vrai, Faux}. Visiblement aucune de toutes les interprétations proposées ne correspond aux idées qu'on voulait exprimer. On dira que tout le monde avait compris sauf ceux qui font exprès de ne pas comprendre; c'est probable en effet, mais au fond ce n'en est que plus grave.

L'équivalence logique \Leftrightarrow étant une égalité particulière, l'égalité sur {Vrai, Faux}, elle donne lieu avec la même déplorable facilité à des erreurs analogues, surtout au tableau. Exemple :

$$(x-1)(x+3) = 0 \Leftrightarrow \vee \left\{ \begin{array}{l} x-1 = 0 \Leftrightarrow x \in \{ 1 \} \\ x+3 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-3\} \end{array} \right.$$

Or, à droite, l'énoncé de la première ligne est vrai pour tout x , celui de la seconde aussi, leur disjonction également; conclusion inattendue : quel que soit x , $(x-1)(x+3) = 0$! En réalité les deux équivalences de droite, *adjectives et non verbales*, doivent être supprimées sans pitié.

Sur quoi on a fait à Lacombe l'objection qu'il avait d'ailleurs prévue : Quand vous écrivez $\forall x \in E$, ou encore $(x \in \mathbb{R}) \rightarrow x^2$, votre signe \in a la valeur adjectivale « appartenant à » et non la valeur verbale correcte « appartient à ». Répondre que $\forall x \in E$ est une notation abrégée pour $\forall x / x \in E$ n'est satisfaisant

qu'en partie : cela donne le moyen d'expliciter la notation quand elle risque d'être confuse, cela n'explique pas que l'abréviation soit tolérable ici alors qu'on la proscriit ailleurs. Au fond la vraie raison me paraît être la présence du mutificateur ($\forall \square$ ou $\square \mapsto$); car ce mutificateur cesserait d'être interprétable si l'on s'avisait de lire « pour toute appartenance de x à E » ou si c'était l'appartenance de x à \mathbb{R} qu'on prétendait envoyer sur x^2 . Cela confirme, semble-t-il, que la convention la plus commode et la plus générale est de considérer que l'occurrence \square est indicative à la fois de la variable à mutifier et de l'ensemble qu'elle décrit.

Le péché par omission.

Je commencerai par un aveu : j'avais lu et entendu tant d'opinions contradictoires sur les quantificateurs que je finissais par ne plus oser y toucher; et d'autres m'avaient confié un égal embarras. J'attendais donc beaucoup des exposés de Lacombe, et mon attente n'a pas été déçue.

Et d'abord, dénonciation non équivoque du camouflage des quantificateurs — plus généralement : des mutificateurs — sous des apparences innocentes : un *avec*, un *pour*, une simple juxtaposition. Exemples :

« Soit M l'ensemble des réels $u+v\sqrt{2}$ avec u et v rationnels »,

« Soit Y l'ensemble des valeurs $f(x)$ pour $x \in X$ »,

et cet exemple, aggravé par l'emploi de l'indéfini *des* :

« G , constitué par des éléments de la forme $x+i\sqrt{5}y$, $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$ ».

Particulièrement dangereux est *pour* puisqu'il sert d'abréviation *injustifiée* aussi bien à *pour tout* qu'à *pour au moins un*; ainsi *pour* était existentiel dans l'exemple ci-dessus, alors qu'il est universel dans cette définition de la commutativité :

« $x*y = y*x$, pour x et y dans E ».

Tout cela, qui n'indique ni quelles lettres sont mutifiées, ni comment elles le sont, est à condamner sans rémission.

Passons donc aux signes. Il nous arrive fréquemment de négliger d'écrire le $\forall \square$; si bien que nous écrivons de la même façon les deux propositions : $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$, et : $(x-1)^2 = (x-1)(x+2)$. Or, si nous avons la bonne habitude d'écrire un $\forall x$ devant la première, nous n'éprouverions pas le besoin d'agrémenter la seconde d'un point d'interrogation ou de quelque autre signe périmathématique. Car, et c'est là le point essentiel, du fait qu'elle possède un x libre, cette seconde proposition recèle une condition imposée à x , alors que la première, ayant son x muet, ne peut être qu'absolument vraie ou absolument fausse (et il est raisonnable alors d'admettre que, si elle

était fautive, on prendrait la peine de le signaler; l'écrire sans commentaire revient donc à une affirmation implicite).

Encore ce cas est-il assez simple pour que nous n'ayons guère de doute sur l'interprétation; quand on en vient à l'implication \Rightarrow et aussi à l'équivalence logique ou implication mutuelle \Leftrightarrow , on court à l'erreur grave. Ayant défini l'implication « des logiciens » $P \Rightarrow Q$ par son tableau de valeurs, on prétend parfois que les mathématiciens suppriment « en pratique » une partie de ce tableau; or supprimer « P faux, Q faux » reviendrait à énoncer Q seul; et supprimer « P faux » rendrait l'implication indiscernable de la conjonction $P \wedge Q$ et aussi de l'équivalence logique $P \Leftrightarrow Q$. Ce n'est certainement pas le sens que nous lui donnons « usuellement ».

En réalité nous l'employons exactement comme les logiciens, mais nous sous-entendons la plupart du temps des quantificateurs universels; là est la source de notre embarras, outre le fait que le mot « impliquer » est souvent pris dans le sens causal « entraîner comme conséquence » dont il faut se garder dans le domaine logico-mathématique.

Si beaucoup se sentent gênés par $2 < 0 \Rightarrow 3 < 0$ ou par $2 < 0 \Rightarrow 3 > 0$, affirmations pourtant inattaquables, c'est qu'ils cherchent inconsciemment le quantificateur implicite ... et le cherchent en vain puisqu'il n'y a aucune variable à mutifier. Écrivons donc par exemple $x < 0 \Rightarrow x + 1 < 0$, et nous voyons apparaître le danger de ces quantifications masquées; car, si on l'interprète comme signifiant $(\forall x)(x < 0 \Rightarrow x + 1 < 0)$, cet énoncé, sans variable parlante, est visiblement faux; mais si on ne lit rien de plus que ce qui est écrit, alors il s'agit d'une condition portant sur la variable libre x , condition qui équivaut à $x \notin [-1, 0[$.

Ce danger ne peut que s'accroître si plusieurs variables sont en jeu.

Exemple :

$$(x^2 + y^2 - 2 \leq 0) \Rightarrow (x^2 + y^2 - 2x - 4 < 0).$$

Sous cette forme il s'agit d'une condition astreignant le point (x, y) à être extérieur à une certaine lunule; si l'on sous-entend $\forall x$, elle astreint y à être extérieur à $[-1, +1]$; si l'on sous-entend $\forall y$, elle astreint x à être extérieur à $[-\sqrt{2}, -1]$; enfin, si l'on sous-entend $\forall x, \forall y$, l'énoncé, sans lettre libre, est absolument faux puisque la lunule n'est pas vide. Conclusion évidente : ces sous-entendus sont autant de chausse-trapes.

Autre exemple, bien classique, celui de la continuité. J'écris $|x - x'| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$. Si j'écris à gauche $\forall \varepsilon, \exists \eta, \forall x'$, il s'agit d'une propriété du couple (f, x) , à savoir la continuité de f au point x ; si j'écris à gauche $\forall x, \forall \varepsilon, \exists \eta, \forall x'$ ou $\forall \varepsilon, \exists \eta, \forall x, \forall x'$, il s'agit d'une propriété de f seul : dans le premier cas la continuité partout, dans le second la continuité uniforme; si « j'omets » tout ou partie de ces quantificateurs, on ne sait plus de quoi je veux parler, et la négation de ces propriétés devient un casse-tête.

On pourrait multiplier les exemples : dire que $aRb \Rightarrow bRa$ est une « définition de la symétrie » ne vaut que si l'on a pris soin de préciser $\forall a, \forall b$; sinon c'est la définition d'un certain ensemble de couples (a, b) ; par exemple, si

\mathbb{R} est « être le carré de » (dans \mathbb{R}), cela définit la réunion de la paire $\{(0,0), (1, 1)\}$ et du complémentaire de la parabole $a = b^2$.

Sans prétendre dégager une leçon d'ensemble de ces notes un peu fragmentaires — alors que Lacombe, infiniment plus qualifié, s'en est abstenu — je crois pouvoir dire qu'à notre niveau nous gardons une certaine latitude dans l'emploi du périmathématique et, en particulier, du langage « vulgaire ». Il n'en faut pas abuser certes, mais nous aurions grand tort aussi de nous en priver par affectation ou purisme. La langue courante a plus de plasticité, admet des tolérances plus larges; elle permet parfois de se tirer d'affaire là où on se heurte à de sérieuses difficultés avec le *bon emploi* de la langue mathématique. Plus on s'élève, bien sûr, plus il convient de se défier de ces « facilités »; mais à aucun niveau nous n'avons le droit de détourner la langue mathématique de son usage correct et précis, de nous permettre et de permettre aux élèves des « entorses », fût-ce par omission (autrement que devant des auditeurs très avertis). Quand un outil est bien affûté, on peut hésiter à le placer dans des mains inexpertes; mais seuls de piètres ouvriers prendraient ce prétexte pour l'émausser.

Nov. 1969. — Comparant cet article avec mes notes de mars 1968, je m'aperçois d'une omission, celle des *relations*, d'autant plus grave que je trouve dans mon courrier un nombre (relativement!) élevé de lettres sur ce sujet. Lacombe avait critiqué l'expression fort répandue « la relation $y = x^2$ », disant : Appelez cela un énoncé, une condition, tout ce que vous voudrez, sauf une relation (nonobstant l'autorité de Bourbaki). La relation, c'est, si x et y sont astreints à un ensemble E , l'application qui au couple (x, y) fait correspondre l'énoncé $y = x^2$, autrement dit une application de $E \times E$ dans {vrai, faux}. Appeler relation l'énoncé lui-même, c'est faire au fond la même faute que dire la « fonction » $f(x)$.

J'avoue que, la première surprise passée, on découvre de substantiels avantages à cette conception. Car enfin, si l'on baptise $x \leq y$ « relation d'ordre », alors $y \leq z$ en est une aussi, mais *pas la même*, et aussi $x \leq z$; à laquelle des trois peut bien s'appliquer la transitivité? ce qui est transitif, c'est la relation définie par $(x, y) \mapsto (x \leq y)$. De même on éliminerait sans doute beaucoup de difficultés de langage relatives aux équations (on ne sait ni ce que c'est, ni quelles sont les « données » ou les « inconnues »); car, à partir du moment où l'on regarde une équation comme une relation au sens précédent, par exemple l'application $(x \in \mathbb{R}) \mapsto (ax^2 + bx + c = 0)$, aucun doute n'est plus possible sur l'inconnue; quant à l'ensemble-solution, c'est l'image réciproque du « vrai ».

J.-M. Ch.