« ...car vous aurez beau faire, c'est toujours avec le même élément de base qu'il vous faudra reconstruire. »
Roger Martin du Gard.

L'arithmétique en classe de Cinquième

Maurice GLAYMANN
Faculté des Sciences, Lyon

Le programme de Cinquième comporte le texte suivant relatif à l'arithmétique :

« Ensemble des multiples d'un nombre; division euclidienne d'un naturel par un naturel.

Diviseurs d'un naturel; nombres premiers.

Sur des exemples : pratique de la décomposition d'un naturel en produit de nombres premiers et exercices sur les multiples communs et diviseurs communs à deux ou plusieurs naturels. »

Nous retrouvons ici des notions bien connues des professeurs. C'est un danger! Il faudra veiller à ne pas présenter l'arithmétique comme un chapitre à part; au contraire, nous devrons utiliser tout ce que les enfants ont pu découvrir par ailleurs, en particulier, les concepts d'*ensemble* et surtout les *relations* qui seront fort utiles et efficaces.

Il ne peut être question, au niveau de la classe de Cinquième, « d'épuiser » l'arithmétique, il faut ouvrir des voies importantes et préparer l'avenir; d'ailleurs, le programme de la classe de Quatrième prévoit de généraliser dans $\mathbb{Z}$ les résultats obtenus dans $\mathbb{N}$. Les grandes structures, groupe, anneau et idéal doivent nous guider. Au stade de l'initiation, il est nécessaire que les enfants puissent faire de nombreuses expériences afin de découvrir des propriétés intéressantes; ces expériences conduiront tout naturellement les enfants à vouloir faire des « mini-démonstrations » pour s'assurer que des résultats obtenus dans des cas particuliers, sont valables dans le cas général. Nous aurons ainsi l'occasion de montrer aux enfants l'intérêt d'une démonstration. Il va de soi que nous ne ferons pas d'axiomatique; l'arithmétique restera expérimentale...

1. Notion de « multiples ».

En partant de la table de multiplication, *bien connue des enfants*, il est possible de faire découvrir le concept de « multiples » d'un naturel. Ainsi, 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, ... sont les premiers multiples de trois.

Prenons alors l'ensemble $E = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 13, 14, 15\}$ et la *fonction* m de E dans E :

$$m : x \mapsto 3x$$

il est intéressant de demander aux enfants pourquoi m n'est pas une *application*. Par contre, la fonction M de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$:

$$M : x \mapsto 3x$$

est une application.

Quelle est l'*image* du naturel 31 par M? Le naturel 36 est-il image d'un élément de $\mathbb{N}$? Lequel? Le naturel 37 est-il image d'un élément de $\mathbb{N}$?

Ces questions et d'autres analogues conduisent à la définition suivante :

L'ensemble des images des éléments de $\mathbb{N}$ par l'application M est l'ensemble des MULTIPLES de 3. Il est utile de noter cet ensemble; l'écriture $3\mathbb{N}$ semble tout indiquée; on la retrouvera en théorie des groupes par exemple.

Un retour sur l'utilisation du système de numération en *base trois* permettra de faire remarquer que les multiples de trois s'écrivent très simplement dans cette base. Il en est de même des multiples de dix en *base dix!*

Que représente l'écriture $2\mathbb{N}$? l'écriture $4\mathbb{N}$?

Plus généralement, n est un naturel, que représente l'écriture $n\mathbb{N}$?

Deux cas particulier sont intéressants : $0\mathbb{N}$ et $1\mathbb{N}$.

Le problème qui se pose est de donner un sens à la phrase

« a est MULTIPLE de b »

où a et b sont des naturels.

L'étude de quelques exemples numériques permet de préciser le problème.

12 est le produit de 3 par 4 : 12 est MULTIPLE de 3.

« a est MULTIPLE de b » signifie « il existe un naturel q tel que $a = bq$ ».

On est alors conduit à introduire la *relation* $\mathcal{M}$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$: « ...est MULTIPLE de... ».

Écrire $a\mathcal{M}b$ signifie que « a est MULTIPLE de b » ce qui se traduit par

$$a \in b\mathbb{N}.$$

n étant un naturel, est-il vrai que

$$0\mathcal{M}n?\ n\mathcal{M}1?\ n\mathcal{M}n?$$

L'exercice suivant permet de vérifier que les enfants ont compris ce concept :

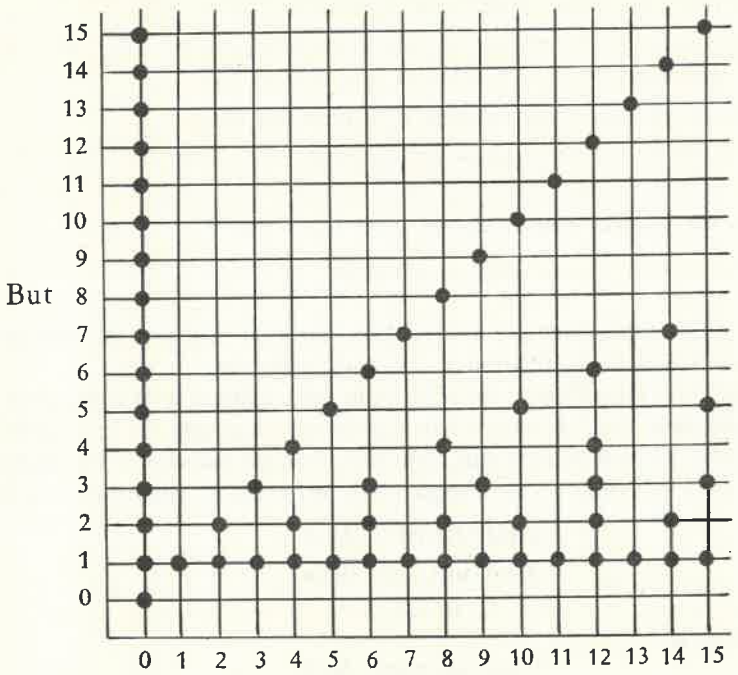
Trouver tous les naturels x tels que

$$8\mathcal{M}x$$

Même exercice en prenant les naturels 10, 1 et 0.

On peut alors demander de construire le schéma cartésien de la relation »

On peut alors demander de construire le schéma cartésien de la relation « ...est MULTIPLE de... » dans l'ensemble E = {0, 1, 2, 3, ..., 13, 14, 15}.



A l'aide de ce schéma cartésien, on peut demander de résoudre les problèmes suivants :

a) trouver les naturels x, éléments de E, tels que

« 6 est MULTIPLE de x »;

b) trouver les naturels y, éléments de E, tels que

« y est MULTIPLE de 6 ».

En revenant à l'ensemble $\mathbb{N}$, il est intéressant d'étudier certaines relations entre des ensembles de multiples. Voici quelques thèmes d'étude.

1° Représenter à l'aide d'un diagramme de Venn les ensembles $2\mathbb{N}$ et $3\mathbb{N}$.

Où faut-il placer les naturels 4, 9, 12, 120, 67, 1?

Que peut-on dire des naturels qui appartiennent à l'ensemble

$$2\mathbb{N} \cap 3\mathbb{N}?$$

Trouver une relation entre les ensembles

$$6\mathbb{N} \text{ et } 2\mathbb{N} \cap 3\mathbb{N}.$$

2° Représenter à l'aide d'un diagramme de Venn les ensembles $2\mathbb{N}$ et $4\mathbb{N}$. Quelle relation existe-t-il entre les ensembles $2\mathbb{N}$ et $4\mathbb{N}$?

3° Représenter sur un diagramme de Venn les ensembles $2\mathbb{N}$, $3\mathbb{N}$ et $4\mathbb{N}$. Même question pour les ensembles $2\mathbb{N}$, $3\mathbb{N}$ et $5\mathbb{N}$.

4° Peut-on trouver trois naturels a, b et c tels que

$$a\mathbb{N} \subset b\mathbb{N} \subset c\mathbb{N}?$$

5° Peut-on trouver deux naturels a et b tels que

$$ab\mathbb{N} = a\mathbb{N} \cap b\mathbb{N}$$

D'un autre côté, l'analyse du schéma cartésien permet de découvrir certaines propriétés de la relation « ...est MULTIPLE de... ».

Cette relation est *réflexive*. En effet, pour tout élément a de l'ensemble E, a est multiple de a. Ceci se traduit par la présence de points sur la diagonale.

Ce schéma montre d'autre part, que si a *n'est pas nul* et si a est multiple de b, alors a est supérieur au sens large à b ($a \geqslant b$). On ne peut avoir à la fois

a est MULTIPLE de b

et b est MULTIPLE de a

que si $a = b$.

De même si,

0 est MULTIPLE de b

et si b est MULTIPLE de 0,

le seul choix possible pour b est 0.

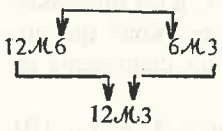
La relation « ...est MULTIPLE de... » est *antisymétrique*. Comment se traduit cette propriété sur le schéma cartésien?

Prenons les naturels 12, 6 et 3. Nous avons à la fois

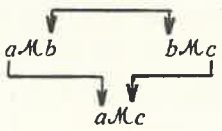
12 est MULTIPLE de 6

et 6 est MULTIPLE de 3;

d'autre part 12 est MULTIPLE de 3.



On peut alors demander aux enfants s'il est possible de trouver d'autres couples (a, b), (b, c) et (a, c) ayant cette propriété.

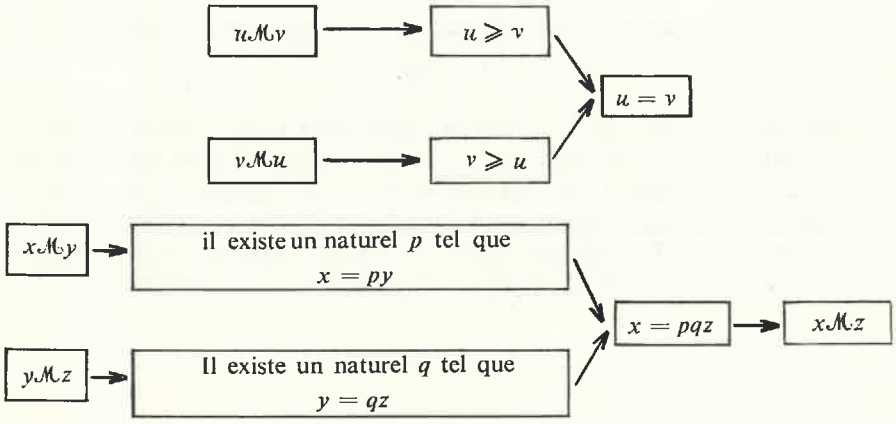


Il faut leur laisser ici l'occasion de faire un certain nombre d'expériences, ils auront peut être ensuite envie d'inventer une démonstration.

Cette étude conduit à établir que la relation " ... est MULTIPLE de ... " est *transitive.*

Nous avons ainsi un exemple de *relation d'ordre* sur un ensemble.

Il est alors intéressant d'étudier s'il en est de même sur l'ensemble $\mathbb{N}$. Ici, il n'est plus question de faire des expériences; seules des démonstrations permettent de conclure. Voici à titre d'exemples, les organigrammes des démonstrations de l'antisymétrie et de la transitivité :



2. Notion sur les « diviseurs ».

Reprenons le schéma cartésien de la relation « ...est MULTIPLE de... » dans l'ensemble E.

En échangeant la source et le but, nous obtenons la relation *réciproque* « ...est DIVISEUR de... » dans E. Nous noterons cette relation à l'aide du symbole $|$; ainsi $4 \mid 8$, Les enfants doivent découvrir qu'il revient au même de dire

« a est MULTIPLE de b »

ou « b est DIVISEUR de a ».

Les deux problèmes :

a) Trouver tous les naturels x tels que $8 \mathcal{M} x$;

b) Trouver tous les naturels y tels que $y \mid 8$, sont équivalents.

Le schéma cartésien montre que 1, 2, 4 et 8 sont les diviseurs de 8. En désignant par D_n l'ensemble des diviseurs du naturel n, on a ici

$$D_8 = \{1, 2, 4, 8\}.$$

On peut alors demander aux enfants de déterminer les ensembles D_{10}, D_{15}, D_2, D_1, D_0, ... En particulier, la notion de *diviseurs communs* des naturels a et b devient claire en prenant l'intersection de D_a et D_b.

Voici quelques exercices intéressants :

1° Peut-on affirmer que, quel que soit le naturel n, l'ensemble D_n *n'est pas vide* ?

2° Pour quel naturel n, l'ensemble D_n contient-il *un seul élément* ?

3° Peut-on trouver deux naturels x et y tels que

$$D_x \cap D_y = \varnothing ?$$

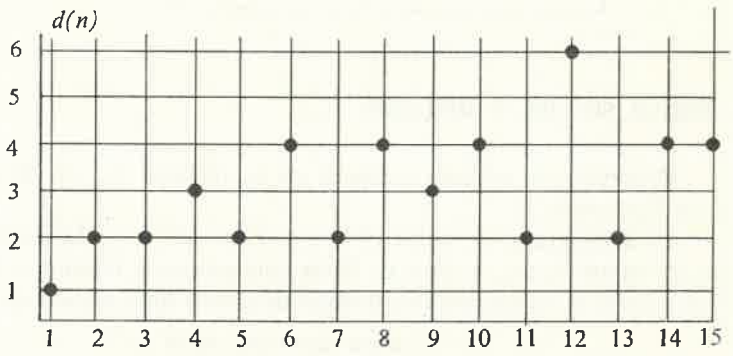
4° Pour deux naturels a et b tels que « b est DIVISEUR de a », démontrer que

$$D_a \subset D_b.$$

En utilisant le fait que la relation « ...est DIVISEUR de... » est la réciproque de la relation « ...est MULTIPLE de... », il est possible de faire découvrir aux enfants que c'est encore une *relation d'ordre* sur l'ensemble des naturels.

Une autre direction intéressante est celle de l'étude du nombre des diviseurs d'un naturel. En utilisant encore le schéma cartésien et en désignant par $d(n)$ le nombre des diviseurs de n, on est conduit à la table suivante :

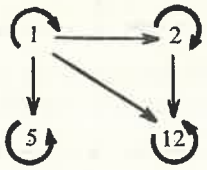
n	$d(n)$
1	1
2	2
3	2
4	3
5	2
6	4
7	2
8	4
9	3
10	4
11	2
12	6
13	2
14	4
15	4



Cette étude permet de caractériser le *naturels premiers :* les naturels qui ont *deux* diviseurs. Notons que 1 n'est pas premier.

Pour analyser la nature profonde des naturels, il est possible d'associer à chaque naturel un *treillis.*

Prenons l'ensemble des naturels {1, 2, 5, 12} et traçons le schéma sagittal de la relation « ...est DIVISEUR de ...» :

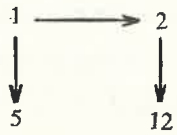


supprimons alors les flèches

a) qui concrétisent la *réflexivité,*

b) et celles que l'on obtient par *transitivité,*

nous obtenons ainsi le schéma simplifié suivant :



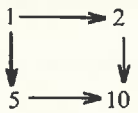
c'est le treillis associé à l'ensemble {1, 2, 5, 12}.

On appelle *treillis d'un naturel n,* le *treillis associé à son ensemble de diviseurs* D_n.

1° $n = 8$, $D_8 = \{1, 2, 4, 8\}$
le treillis de 8 est la « chaîne » suivante



2° $n = 10$, $D_{10} = \{1, 2, 5, 10\}$
le treillis de 10 est le « carré »



Nous constatons que $d(8) = d(10) = 4$ et pourtant les treillis de ces deux anturels sont distincts. Pourquoi?

Trouvez des naturels ayant pour treillis :

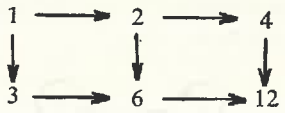




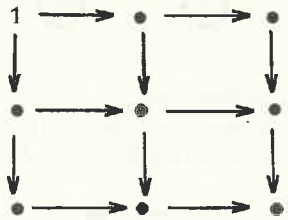


Que pouvez-vous dire des naturels associés à ce dernier treillis?

Nous pouvons maintenant rechercher d'autres types de treillis.
En prenant 12 par exemple, avec $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, nous obtenons



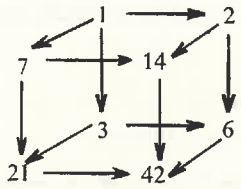
Trouvez d'autres naturels associés à un treillis de ce type.
Déterminez de même des naturels associés au treillis :



Le naturel 42 conduit à un nouveau type de treillis. Comme

$$D_{42} = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$$

nous sommes conduits au « cube » suivant



Inventez d'autres treillis et associez à ces treillis des naturels.

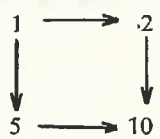
L'analyse de ces treillis montre de manière précise le rôle joué par les naturels premiers ainsi que les *puissances des naturels premiers*, appelés *naturels primaires*.

Les naturels suivants sont primaires : 2^3, 5^2, 7^{11}, 11. Par définition, un naturel premier est primaire.

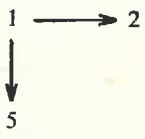
Nous pouvons alors introduire une nouvelle notion : les « *bords* » d'un treillis. Prenons un naturel n et son treillis T_n; limitons ce treillis aux naturels primaires, nous obtenons ainsi les bords du treillis T_n, notés B_n.

Exemples :

$n = 10$



T_{10}



B_{10}

l'ensemble $P_{10} = \{1, 2, 5\}$ est l'*ensemble des diviseurs primaires* de 10.

$n = 8$ $\quad 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 8$ $\qquad 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 2^2 \longrightarrow 2^3$

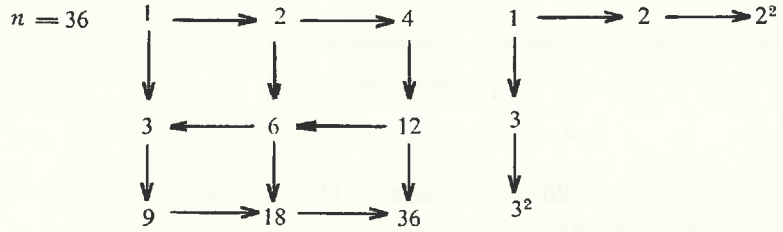
$T_8 \qquad\qquad B_8$

ici $T_8 = B_8$ et $P_8 = D_8 = \{1, 2, 2^2, 2^3\}$;

$n = 7$ $\qquad 1 \longrightarrow 7$ $\qquad\qquad 1 \longrightarrow 7$

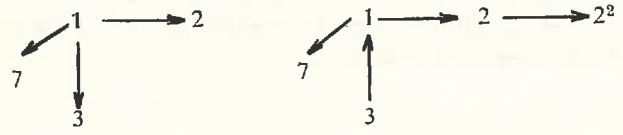
$T_7 \qquad\qquad B_7$

ici encore $P_7 = D_7 = \{1, 7\}$.



$T_{36} \qquad\qquad B_{36}$

Les naturels 42 et 84 conduisent respectivement aux « bords » suivants :



$B_{42} \qquad\qquad B_{84}$

il en résulte que

$$P_{42} = \{1, 3, 7\} \text{ et } P_{84} = \{1, 2, 2^2, 7\}.$$

Remarque.

Bien que 1 ne soit pas un nombre premier, il est intéressant de l'inclure dans l'ensemble D_n ainsi que dans l'ensemble P_n, car 1 est diviseur du naturel n.

Voici maintenant quelques thèmes de réflexion que l'on pourra proposer aux enfants :

1° Pour quels naturels a-t-on $P_n = D_n$?

2° n est un naturel tel que

$$P_n = \{1, a, a^2, b, b^2, b^3\}$$

où a et b sont des naturels premiers.

Construire le treillis de n et déterminer l'ensemble D_n.
Exprimer n en fonction de a et de b.
Déterminer $d(n)$.

3° n est un naturel tel que

$$P_n = \{1,\ a,\ a^2,\ \ldots,\ a^p,\ b,\ b^2,\ \ldots .b^q,\}$$

où a et b sont des naturels premiers et p et q des naturels.
Exprimer n en fonction de a, b, p et q.
Établir que

$$d(n) = (p + 1)(q + 1)$$

(on pourra peut-être tenter une généralisation...).

4° Voici la liste des dix premiers *carrés:*

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.

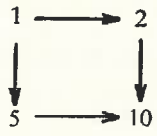
Construisez les treillis de ces naturels. Pour chacun de ces naturels calculez $d(n)$. Que remarquez-vous?
Démontrez que le nombre des diviseurs d'un *carré* est un naturel *impair*.
Si le nombre des diviseurs d'un naturel n est *impair*, ce naturel est-il un carré?

5° Étant donné trois naturels *consécutifs*, montrez que l'un d'eux est multiple de 3. p est un naturel premier; montrez que $p - 1$ ou $p + 1$ est un multiple de 6 (on supposera $p \neq 2$).

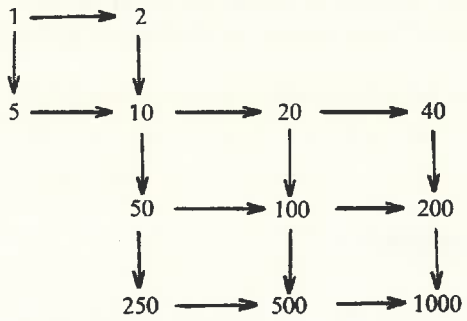
3. Quelques applications.

L'étude des multiples communs et diviseurs communs à deux naturels est très simple dès que l'on dispose des treillis et des bords de treillis.
On fera d'abord remarquer aux enfants que tout naturel qui appartient au treillis T_n est un *diviseur* de n. D'autre part, si nous « prolongeons » le treillis à partir de n, les nouveaux naturels ainsi introduits sont des *multiples* de n.

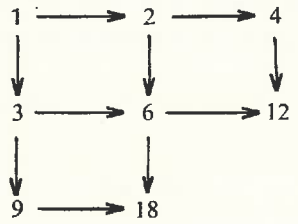
Exemples : voici le treillis de 10



en le prolongeant à partir de 10, il vient :



Pourquoi n'obtient-on pas ainsi *tous* les multiples de 10?
En superposant les treillis de 12 et de 18, nous obtenons



on en déduit que 1, 2, 3 et 6 sont les *diviseurs communs* de 12 et de 18.
D'ailleurs

$$D_{12} \cap D_{18} = \{1,\ 2,\ 3,\ 6\};$$

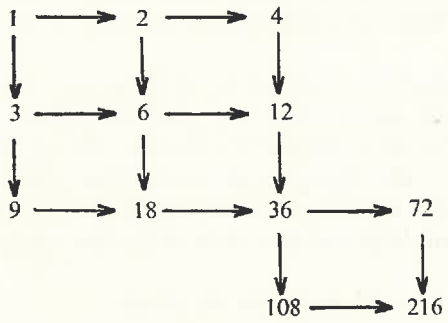
6 est le plus grand commun diviseur des naturels 12 et 18.
De même, en prenant

$$P_{12} = \{1,\ 2,\ 2^2,\ 3\} \text{ et } P_{18} = \{1,\ 2,\ 3,\ 3^2\}$$

on a

$$P_{12} \cap P_{18} = \{1,\ 2,\ 3\} = P_6.$$

En prolongeant alors les treillis superposés des naturels 12 et 18, nous obtenons



les naturels 36, 72, 108, 216, etc sont des multiples communs à 12 et 18. 36 est le plus petit multiple commun de 12 et de 18.

Il n'est pas possible de trouver ce résultat en utilisant les ensembles D_{12} et D_{18}.

Par contre, en prenant la réunion des ensembles P_{12} et P_{18}, il vient

$$P_{12} \cap P_{18} = \{1,\ 2,\ 2^2,\ 3,\ 3^2\} = P_{36}$$

4. En guise de conclusion.

Nous avons montré qu'il est possible d'aller assez loin tout en restant purement expérimental — ce qui fait dire à certains que nous ne faisons que des « Sciences Naturelles » (et pourquoi pas!) —; après tout quel est notre but? Familiariser les enfants avec des notions intéressantes et utiles, exciter leur imagination et leur donner l'envie d'aller de plus en plus loin. Utilisons tous les moyens pour ouvrir le plus grand nombre de perspectives et pour préparer efficacement l'avenir...

Lyon, le 10 novembre 1968.

Bibliographie

1. Marcel DUMONT : *Algèbre* (Dunod).
2. T.-J. FLETCHER : *L'Apprentissage de la Mathématique aujourd'hui* (O.C.D.L.).
3. PAPY : *Mathématique moderne 5* (Arithmétique) (Didier).
4. CONDAMINE et VISSIO : *Algèbre* (Delagrave).

Appel de la Rédaction du Bulletin

La mise en application généralisée des nouveaux programmes de Sixième en septembre 1969 sera facilitée par la publication des documents qui résultent des expériences réalisées depuis septembre 1967 dans un certain nombre de classes dites d'expérience. C'est pourquoi la Rédaction a prévu que le Bulletin 269 *(daté juillet-août 1969) sera entièrement consacré à la publication de tels documents.*

L'idée toute simple qui doit servir de guide aux rédacteurs des articles est la suivante : plutôt que de directives générales présentant des idées qui ne le seraient pas moins, les collègues qui enseigneront en Sixième en septembre prochain préfèreront des exemples de réalisations effectives déjà présentées à des élèves, enrichies souvent par le bon usage que ces élèves en auront fait.

Avant le 15 juin 1969, adressez à la Rédaction vos contributions pour ce numéro spécial.

Reportez-vous page 92 pour plus de détails.