bulletin de l'association des

professeurs de mathématiques

de l'enseignement public

" de la Maternelle aux Facultés "

la mathématique en SIXIÈME
par ceux qui l'enseignent

bimestriel - 48e année - Juillet-Octobre 1969 nos 269-270

Association des Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement Public.
29, rue d'Ulm - Paris (5e)

Président d'Honneur :
M. A. HENNEQUIN.

Bureau national de l'A.P.M.E.P.

Présidente :
Mme TOUYAROT, 5, rue des Terrasses, 14-Caen (tél. 31-81-70-40).

Vice-Présidents :
Adresser aux vice-présidents les questions relatives à l'ordre d'enseignement dans lequel ils exercent.
Enseignement élémentaire : M. CRÉPIN, I.D.E.N., 94, avenue de Locarno, 87-Limoges. (16 55 32 53 95).
Second degré, premier cycle : M. DUMONT, 6, place Porcaro, 78-Saint-Germain-en-Laye (tél. 963-46-01).
Second degré, second cycle : M. COLOMB, 44, rue Paul-Huvelin, 69-Sainte-Foy-lès-Lyon.
Second degré technique : M. ZANDSTEIN.
Écoles Normales : Mme AUDIN, 3, avenue Pierre-Grenier, 92-Boulogne-Billancourt.
Classes préparatoires aux Grandes Écoles : M. DEHAME, 22, avenue de la Libération, 86-Poitiers.
Enseignement supérieur : M. REVUZ, 16, rue de Rome, 78-Les Essarts-le-Roi (tél. 483-60-55). I.R.E.M. : DUVERT, 10, avenue du Point-du-Jour, 69-Lyon (5e).

Secrétaires généraux :
M. VISSIO, 15, rue Jean-Giraudoux, 92-Sceaux (tél. 350-18-98).
M. BLANZIN, 150, avenue Félix-Faure, Paris (15e) (tél. 250-16-41).

Secrétaires :
Animation des Régionales : M. GAUTHIER, 11, bd des Brotteaux, 69-Lyon, 6e (tél. 78-24-00-93).
Relations internationales : M. GLAYMANN, 14, rue de Chavril, 69-Sainte-Foy-lès-Lyon (tél. 78-51-93-76).
Relations avec les autres associations : M. BLANZIN, 150, avenue Félix-Faure, Paris, 15e (tél. 250-16-41). M. VISSIO. Mlle BOLON, 99, rue de la Tombe-Issoire, Paris 14e.

Trésorier :
M. CLOPEAU, 12, boulevard Desgranges, 92-Sceaux (tél. 702-60-72).

Trésorier administratif :
M. FERRACCI, 151 avenue Foch 92-Saint-Cloud.

Secrétaire administratif (expédition des brochures, réclamations relatives au service du *Bulletin*, etc.) :
M. A. BLONDEL, 154, avenue Marcel-Cachin, 92-Chatillon-sous-Bagneux.

Commissions.
Commission « Recherche et Réforme » : secrétaire : M. DUCEUX, 44, rue Gustave-Charpentier, 80-Amiens.
Formation des maîtres : MM. DEHAME, DUVERT, TARALLE.
1er degré : MM. CRÉPIN, BROUSSEAU, JACQUEMIER.
2e degré : MM. COLOMB, DUMONT.
Technique : M. ZANDSTEIN.
Moyens audio-visuels : Mlle BOLON.
Informatique : M. POLY, 16, rue Germain-Pilon, Paris-18e (tél. 255-31-30).
Commission du Dictionnaire : M. CHASTENET DE GÉRY, 4, rue des Capucins, 92-Meudon-Bellevue (tél. 027-48-48). M. CHEVALLIER, 37, avenue Anatole-France, 94-Saint-Maur (tél. 883-64-68).

Comité de rédaction du Bulletin.
Président : Mme TOUYAROT.
Directeur du Bulletin : M. VISSIO.
Membres : MM. CHEVALLIER, DUCEUX, DUMONT, FRASNAY, GILBERT, GLAYMANN, ITARD, JACQUEMIER, ROUMANET, WALUSINSKI.

48e année - N° 269-270 - Juillet-Octobre 1969

Sommaire

la mathématique en Sixième par ceux qui l'enseignent.

N.B. On trouvera, en tête de chaque chapitre un sommaire détaillé et des titres plus explicites.

Le *Bulletin* 269 contient de plus deux fiches de « *La mathématique parlée par ceux qui l'enseignent* » : fraction, quotient.

Le coin du Trésorier

Adresse de l'A.P.M.E.P.
29, rue d'Ulm, Paris, 5e
C.C.P. Paris 5708-21

Les cotisations et les abonnements sont valables pour l'année civile, du 1e janvier au 31 décembre. Tarifs pour l'année civile 1969 :

Cotisation. — Elle comprend l'abonnement au *Bulletin* et le service des fascicules d'énoncés.

Cotisation normale .... **22 F**

Cotisation réduite (stagiaire C.P.R., élèves des E.N.S. et des I.P.E.S., jeunes gens effectuant leur service militaire, retraités) .... **12 F**

Abonnement. — Pour les personnes n'appartenant pas à l'Enseignement Public, pour les collectivités, les bibliothèques, ..., en France et à l'étranger **30 F**

Prix de vente au numéro .... **5 F**

Modes de paiement.

L'importance du nombre des adhérents, qui approche de dix mille, nous oblige à utiliser un fichier automatique. La bonne tenue de ce fichier exige que chacun de nous se conforme strictement aux règles suivantes :

1° ADHÉSIONS NOUVELLES, ABONNEMENTS NOUVEAUX : adresser au siège de l'A.P.M.E.P., *sous enveloppe timbrée*, une fiche rose dûment remplie, et un chèque à l'ordre de l'A.P.M.E.P. Paris 5 708-21.

Note du Secrétariat: utilisez de préférence *un chèque de virement à notre C.C.P. ou, à la rigueur, un chèque bancaire. Nous renverrons à son expéditeur tout autre mode de paiement.*

2° RENOUVELLEMENT DES COTISATIONS ET ABONNEMENTS : vous avez reçu un appel pour ce renouvellement dans le courant de janvier; cet appel porte un *coupon détachable* qu'il faut joindre au titre de paiement (voir ci-dessus la note du Secrétariat).

L'appel lui-même doit être conservé. Vous y trouverez, chaque fois que vous en aurez besoin, le numéro de votre fiche dans notre répertoire. Vous y joindrez le talon de votre chèque et ce couple constituera votre carte d'adhérent.

Note du Secrétariat: si vous aviez renouvelé votre cotisation avant d'avoir reçu l'appel, veuillez nous adresser le coupon détachable qui nous est indispensable, en rappelant la date et la nature de votre premier envoi. Ceci pour nous éviter toute erreur dans la tenue de votre compte.

3° CHANGEMENT D'ADRESSE (OU D'ÉTAT CIVIL) : porter sur une feuille l'ancienne adresse (ou l'ancien état civil), *rappeler le numéro de votre carte A.P.M.E.P.*, puis donner les renseignements nouveaux; envoyer cette feuille sous enveloppe timbrée au siège de l'A.P.M.E.P.

Note du Secrétariat: impossible de retrouver rapidement et sans erreur votre fiche si vous n'indiquez pas votre numéro A.P.M. (lequel est rappelé sur la bande ou l'étiquette-adresse du Bulletin.

Le Trésorier vous demande instamment de vous conformer à ces règles, faute de quoi les tâches du Secrétariat et de la Trésorerie sont embouteillées, au risque de perturber une bonne expédition du *Bulletin*.

Les Régionales de l'A.P.M.E.P.

Dans chaque académie, il existe une section régionale de l'A.P.M.E.P. qui organise diverses activités pédagogiques et qui s'organise elle-même librement. En particulier, dans certains départements, des sections départementales se réunissent et sont rattachées à la Régionale de l'académie.

Pour chaque Régionale ou section, nous donnons le nom et l'adresse d'un responsable, président ou secrétaire, qui fournira des renseignements complémentaires sur les activités de l'association dans la région ou le département.

— *Aix-Marseille :* Mlle MABILLY, 136, bd National, 13-Marseille 3e.
— *Amiens :* M. DUCEUX, 44, rue Gustave-Charpentier, 80-Amiens.
— *Besançon :* M. ROBBE, Les Prés-Cottreaux, 39-Salins-les-Bains, (Tél. 167).
Section de Belfort : M. DAUTREVAUX.
— *Bordeaux :* M. SIGNORET, lycée Montaigne, 33-Bordeaux.
— *Caen :* M. LETERRIER, 34, avenue du 6-Juin, 14-Caen.
— *Clermont-Ferrand :* M. ALMERAS, 74, bd de l'Eclache, 63-Royat.
— *Dijon :* M. VOGT, lycée Carnot, bd Thiers, 21-Dijon.
Section de Mâcon : Mme CHAUSSIER, 32, rue de la Liberté, 71-Mâcon.
Section de Nevers : M. J. DE JUNTER.
Section de Chalon : M. GANTHIER.
— *Grenoble :* M. KUNTZMANN, B.P. 7, 38-Saint-Martin-d'Hères.
Section de Chambéry : M. COMPAIN, lycée technique, 1, rue du Colourbier, 73-Chambéry.
— *Lille :* M. LEGRAND, professeur, lycée Faidherbe, 59-Lille.
— *Limoges :* M. CRUZ, 11, rue Lamartine, 87-Bellac.
— *Lyon :* M. ANGUENOT, 103, rue Pasteur, 69-Caluire.
Section de Saint-Etienne : M. VERSET, villa Epilog, rue H. Dunant, 42-Saint-Chamond.
— *Montpellier :* M. CALCINE, rue des Eglantiers, 34-Montpellier.
— *Nantes :* M. DES COGNETS, 11, rue Gl-de-Sonis, 44-Nantes.
— *Nancy :* M. B. MERCIER, 48, rue Jacques-Gruber, 54-Nancy.
— *Nice :*
— *Section de La Seyne-sur-Mer :* Mme PAPAZIAN, Colle d'Artaud, 83-La Seyne-sur-Mer.
— *Orléans :* M. HEUZÉ, dépt de mathématiques, faculté des sciences, 45-Orléans-la-Source.
Section de Montargis : M. KISTER, C.E.G. Pontonnière, 45-Chalette-sur-Loing.
Section de Tours : DELACHET, BASTIEN.
— *Paris :* M. HAMEAU, 38, avenue du Général-de-Gaulle, 94-Vincennes, (Tél. 808 43 79).
— *Poitiers :* M. DEHAME, 22, avenue de la Libération, 86-Poitiers.
— *Reims :* M. THIERUS, 57, rue David, 51-Reims.
— *Rennes :* M. LE DILY, lycée technique Joliot-Curie, 35-Rennes.
Secton de Brest : M STEPHAN, collège naval, 29 N-Brest.
— *Rouen :* Mme METENIER, Faculté des sciences, 76-Rouen.
— *Strasbourg :* M. DE COINTET, 62, rue Diedriez, 67-Sélestat.
Section d'Allemagne Fédérale : Président, M. ALEXANDRE, proviseur, lycée de Fribourg ; secrétaire, M. DEBU, lycée Charles-de-Gaulle, S.P. 69037.
Section Mosellane : M. SCHNEIDER, 54 *bis*, rue de Theuleu, 57-Metz.
— *Toulouse :* M. FRAISSE, 8, rue des Glycines, 31-Toulouse.
— *Côte-d'Ivoire :* M. MATHURIN, B.P. 20 694, Abidjan.
— *Sénégal :* M. SEYNI NIANG, lycée Van-Valenhoven, Dakar.

Le Comité national de l'A.P.M.E.P.

Sortants en 1970 : MM. D. BERNARD (*Faculté des Sciences*, Strasbourg), BLANZIN (*C.E.G.*, Paris) ; CHEVALLIER (*Marcellin-Berthelot*, St-Maur) ; CLOPEAU (*Lakanal*, Sceaux) ; Mlle DEROO (*Racine*, Paris) ; MM. DUCEUX (*Lycée mixte*, Amiens) ; GAUTHIER (*Ampère*, Lyon) ; JACQUEMIER (*Inspecteur départemental*, Grenoble) ; Mme TOUYAROT (*Ecole Normale*, Caen).

Sortants en 1971 : Mlle BIARD (*E.N.S.*, Fontenay), MM. BROUSSEAU (*Instituteur*, Bordeaux) ; CROZES (*Henri-IV*, Paris) ; DUMONT (*Lycée international*, Saint-Germain-en-Laye) ; DUVERT (*La Martinière*, Lyon) ; P.-L. HENNEQUIN (*Faculté des Sciences*, Clermont) ; Mlle LICHAU (*Institutrice*, Calvados) ; M. RAMIS, (Spéciales, *Louis-le-Grand*, Paris) ; M. VISSIO (*Lakanal*, Sceaux).

Sortants en 1972 : Mme AUDIN (*Ecole Normale d'Instituteurs*, Paris) ; M. J. COLOMB (*Lycée A.-Charial*, Lyon) ; M. CRÉPIN (*I.D.E.N.*, Limoges) ; M. DEHAME (*Math. Sup. Lycée*, Poitiers) ; M. FAUQUETTE (*C.E.G.*, Lens) ; M. GOURET (*Math. Sup. Lycée La Martinière*, Lyon) ; M. KLEIN (*Faculté des Sciences*, Grenoble) ; M. ROUMANET (*Lycée Rodin et I.P.N.*, Paris) ; M. REVUZ (*Faculté des Sciences*, Paris).

Sortants en 1973 : M. BERNARD (*Mignet*, Aix-enProvence), Mlle BOLON (*R.T.S.*), Mlle BORNENS (*C.E.S.* de Montrouge), M. BOUTEILLER (*Lycée* de Brive) M. FRASNAY (*Faculté des Sciences*, Toulouse), M. GLAYMANN (*I.R.E.M.* de Lyon), M. TARALLE ( ), Mlle VERTU (*Institutrice*, Paris), M. ZANDSTEIN ( ).

Membres de droit : Mlle BRÉNÉOL (*Claude-Monet*, Paris) ; MM. CAMY-PEYRET (*Lycée Technique*, Creil) ; REICHEN (*Lavoisier*, Paris).

LES PUBLICATIONS DE L'A.P.M.E.P.

En plus de son *Bulletin* servi à tous les adhérents de l'A.P.M.E.P. et à ses abonnés, l'A.P.M.E.P. a décidé, en 1960, de publier des livres ou des brochures écrits par un ou plusieurs de ses membres et pouvant servir au progrès de l'enseignement des mathématiques.

Les tirages des premiers titres de sa collection « **les brochures de l'A.P.M.** » ayant été limités ont été rapidement épuisés. Restent disponibles, parmi les derniers ouvrages parus :

7. *Lecture commentée d'une méta-démonstration de Gödel*, par J. Balibar, Maître-Assistant à la Faculté des Sciences de Poitiers (mai 1962) 32 p., prix 3 F.

10. *Le Cours de l'A.P.M. — 3. Éléments de topologie*, par A. et G. Revuz, 1966, 250 p., prix 27 F.

Bibliothèque d'Enseignement Mathématique, nouvelle collection d'ouvrages pour la formation permanente des maîtres :

1. *Pour apprendre à conjecturer: initiation à la statistique* par MM. L. Guerber et P.-L. Hennequin (Université de Clermont), 1967, 240 p., prix 25 F (cartonné 30 F).

2. *Pour apprendre à conjecturer: initiation au Calcul des Probabilités*, par MM. Guerber et Hennequin, 1968, 232 p., prix 25 F (cartonné 30 F).

3. *La mathématique parlée par ceux qui l'enseignent* par la Commission du Dictionnaire de l'A.P.M.E.P. (voir p. 521).

Bibliothèque d'Information sur l'enseignement mathématique, brochures qui ne sont ni des manuels, ni encore moins des traités et qui devraient avoir le caractère incisif des libelles...

1. *Charte de Chambéry*, 1969, 1971, 1973, 1976, 1980, ... étapes et perspectives d'une réforme de l'enseignement des mathématiques, octobre 1968, 32 p., prix 2 F.

2. *Matériaux pour l'histoire des nombres complexes*, par Jean Itard, janvier 1969, 32 p. illustrées, prix 3 F.

3. *Première étape... vers une réforme de l'enseignement mathématique dans les classes élémentaires*, octobre 1969, 32 p., prix 2 F.

Conditions de vente et d'expédition.

Les ouvrages précédents ne sont pas en vente en librairie. Pour se les procurer, opérer de la façon suivante :

1° Rédiger une formule de virement postal au compte de l'A.P.M.E.P. : Paris 5708-21, du montant des livres demandés (les prix sont compris franco de port).

2° Bien préciser *au dos du virement* les titres des ouvrages commandés.

3° Envoyer les trois volets du virement, sous enveloppe timbrée à 0,30 F, au Secrétaire administratif de l'A.P.M.E.P., M. Blondel, 154, avenue Marcel-Cachin, 92-Chatillon-sous-Bagneux.

Vous recevrez les ouvrages commandés en paquet-poste dans le plus court délai.

Les ouvrages cités ci-dessus sont édités au prix coûtant. Aucune remise ne peut donc être cosnentie à quelque titre que ce soit. Aucun des ouvrages précédents n'est vendu en librairie.

* * *

Le secrétariat de l'A.P.M.E.P. participe également à la diffusion des œuvres complètes d'Evariste Dupont dont le seul ouvrage paru est : *Apprentissage mathématique. I*, un volume de 248 p., (Sudel éditeur) (Prix : 15 F franco pour les membres de l'A.P.M.E.P.).

Actuelle

L'appareillage

Pour beaucoup d'entre nous, la rentrée 1969 marque une date. La mise en application de la réforme dans l'enseignement mathématique en Sixième devrait en effet ouvrir une époque nouvelle non seulement à ce niveau mais « de la Maternelle aux Facultés », non seulement pour nous qui enseignons les mathématiques mais pour tous ceux qui souhaitent une évolution de l'enseignement en accord avec l'évolution des idées, des besoins, des espoirs des hommes.

A bien des égards, cette amorce de réforme arrive trop tard. Il aurait été sage de ne pas attendre une fâcheuse fuite des étudiants devant les études scientifiques pour attaquer le mal à sa racine. Il aurait été logique de commencer les réformes au Cours Préparatoire et de les poursuivre, année par année, au fur et à mesure que les élèves prenaient de l'âge. Il aurait été prudent de concevoir et de mettre en mouvement la réforme en plus étroite liaison avec la formation permanente des maîtres qui sont appelés à l'animer (au sens fort du terme : lui donner une âme, lui donner toute sa signification, celle d'un premier pas).

« Commencer par le commencement », « expérimenter largement avant de généraliser », « faire avancer de pair réforme et formation permanente des maîtres », tels ont été les principaux thèmes de l'action de l'A.P.M.E.P. depuis plus de dix ans (plus de quinze ans, même). Je dis et je maintiens action *: nous ne nous sommes pas contentés de proclamer, d'écrire, de revendiquer. Nous étions malheureusement sans illusion sur les capacités de compréhension et d'action d'une administration de l'Education Nationale qui, tel un serpent qui se mord la queue, a trop souvent la peur paralysante d'elle-même. Nous avons donc montré l'exemple. Avant la création des I.R.E.M. et des expériences du Service de la Recherche Pédagogique, qui a fait un travail réel pour la formation permanente, qui a orga-*

nisé ou fait connaître les expériences spontanément entreprises par des Collègues ? Les I.R.E.M. eux-mêmes, qui en a proposé la création ?

Je n'écris pas cela pour nous parer des ailes de la Victoire. D'abord il n'y a pas de victoire, personne, heureusement, n'est vaincu. Et que ferions-nous, avec ces ailes ? Nous en serions bien embarrassés pour ce qui nous attend.

La tâche à accomplir reste immense. En tout cas, elle n'est pas diminuée du fait qu'un premier pas (ou un pas important si vous contestez qu'il soit le premier) ait été accompli ; je crois plutôt que notre responsabilité, à nous qui enseignons, s'en trouve accrue ; et du même coup, celle de notre association.

Nous mandatons celle-ci pour dialoguer en notre nom avec l'administration de l'Education Nationale. La poursuite ou la multiplication des expériences, la multiplication des I.R.E.M., la dotation des établissements en matériels didactiques (y compris des machines à calculer), la création de laboratoires de mathématiques et l'organisation, par les maîtres, de travaux d'équipe, tout cela nécessite des crédits nouveaux. *Il faudra les réclamer, expliquer pourquoi nous en avons besoin, les obtenir.*

Nous y aideront tous ceux qui auront compris la portée de cette réforme. Les associations de parents auront ici leur rôle à jouer. Encore sera-t-il souvent utile que les professeurs eux-mêmes expliquent aux associations de parents la signification de la réforme. Partout où ces contacts ont été pris, le climat dans lequel la réforme est entreprise est bien meilleur, la qualité du travail des élèves en est améliorée d'autant et l'avenir de la réforme elle-même en est plus assuré.

Agir sur notre administration, expliquer aux parents pourquoi cette réforme en promet d'autres, cela suffirait à nos capacités. Il faudra pourtant faire beaucoup plus, l'essentiel : réaliser la réforme même, sur le vif, dans nos classes. Nous ne devons pas cacher à nous-mêmes que c'est là le plus difficile. Reconnaissons aussi que c'est le plus passionnant de l'affaire !

Nous disons réforme, *en effet, et non « changement de programme ». D'abord parce que la conception traditionnelle de programme évolue, doit encore évoluer. Au lieu d'une liste exhaustive de* tout *ce qui doit être étudié, au lieu d'un texte contraignant, le « nouveau programme » est un cadre de recherche. Assez précis pour que l'indispensable coordination d'une classe à l'autre soit possible. Assez souple pourtant pour que l'activité mathématique des élèves reste libre. Cela heurte nos habitudes anciennes mais deviendra, j'en suis persuadé, très facilement familier.*

L'évolution dans le contenu de notre enseignement doit en effet aller de pair avec une évolution des méthodes, une part de plus en plus grande laissée à l'activité des élèves ; un souci accru d'autant, chez les maîtres, d'assurer une formation mathématique solide et de mieux en mieux en accord avec les perspectives ouvertes par l'évolution de la science mathématique elle-même. La classe de Sixième n'est qu'une étape ; dès maintenant, il est clair qu'avec la classe de Cinquième, nous avons, sur une *durée de deux années scolaires, à développer une véritable initiation. Il faudra bien qu'elle débouche sur des objectifs plus audacieux ; il faudra aussi qu'elle se transforme lorsque l'enseignement mathématique des enfants de 6 à 11 ans aura lui-même évolué comme il commence à le faire après les réalisations remarquables de la Maternelle.*

Là est sans doute le caractère original de cette réforme. C'est une amorce qui a conscience d'en être une. Elle engage un processus de réforme permanente, d'une réforme qui devrait réformer vraiment puisqu'elle se réformera perpétuellement.

C'est pourquoi, nous autres qui avons à faire passer ces principes dans les faits, nous avons moins besoin de textes officiels du type « programmes » ou même « instructions » que de témoignages directs, d'échanges entre nous pour confronter nos tentatives, donner au travail d'équipe toute sa valeur en formant des équipes d'équipes.

Nous nous référons aussi aux textes officiels. Je ne veux pas qu'on se méprenne : je sais avec quelle application et quel souci d'aider les maîtres ces textes ont été rédigés. Mais, quelles que soient les intentions, ce sont des textes et des généralités.

Notre ambition, en publiant ce numéro spécial, est tout autre. Depuis un ou deux ans, selon les cas, des Collègues ont expérimenté dans leurs classes selon les perspectives ouvertes par le projet de réforme. Il y a là une quantité de réalités vécues. Montaigne l'a dit : « C'est tousjours plaisir de voir les choses escrites par ceux qui ont essayé comme il les faut conduire » (Des livres, *II, X*). *Merci donc à tous ceux qui ont bien voulu nous apporter des échos de leurs réalisations. Certains, me semble-t-il, font bien sentir quelle renaissance de notre enseignement est possible. Ils donnent des exemples que certains discuteront, contesteront. Personne n'est oracle, chacun de nous est élève de tous.*

Bien sûr, nous n'avons pu couvrir tous les aspects de la réforme. Des parties entières manquent dans le plan que nous nous étions proposés : par exemple, nous n'avons pas les témoignages d'élèves, de parents que nous souhaitions présenter. Des thèmes importants (la construction de $\mathbb{Z}$ par exemple) ont déjà été traités et nous publierons en brochure spéciale la réunion des textes qui ont paru à ce sujet dans le Bulletin.

Nous avons fait selon nos moyens et ce Bulletin *spécial n'est qu'une contribution à une œuvre de longue haleine. Notre espoir est que le dialogue se développe. Après ce* Bulletin 269, *il y a les numéros suivants où les rubriques « échanges » ou « dans nos classes » sont, parmi d'autres, ouvertes à la collaboration de tous. Tout ce qui pourra favoriser les coordinations interdisciplinaires sera particulièrement bien accueilli. Tout ce qui peut contribuer à associer les parents (et les élèves, cela va de soi) à la réforme doit être diffusé. L'ensemble de ces publications établissant clairement que la réforme se réalise dans une branche, l'enseignement mathématique, profitera à l'évolution indispensable de l'enseignement tout entier.*

Ce ne serait que justice que notre expérience serve à tous. Ne sommes-

nous pas redevables aux pionniers ? Pensons aux « classes nouvelles », à l'œuvre de Célestin Freinet, aux initiatives de Caleb Gattegno à qui certains d'entre nous doivent beaucoup. J'en oublie, mais à tous, je voudrais rendre hommage ; à tous nous rendrons hommage en poursuivant la tâche, de notre mieux.

C'est pourquoi j'ai intitulé cet avant-propos l'appareillage. *Septembre 1969 : avec prudence nous sortons du port ; nous savons que, près des côtes, il y a des récifs ; au large, il peut y avoir des tempêtes ; toutes les péripéties du voyage ne sont heureusement pas prévisibles. Nous les affronterons car nos espérances sont immenses. Nous ne partons pas sans biscuit ! Il y a eu les pionniers, il y a eu les expériences. Nous ne partons pas dans l'inconnu : les liaisons entre nous doivent rester solides, de plus en plus solides ; équipes dans l'établissement ; sections locales ou régionales de l'A.P.M.E.P. ; colloques que ces sections organiseront. Il y a là de quoi rassurer les Collègues qui affronteraient « le grand large » avec certaines appréhensions.*

Nous partons pour un grand voyage qui a tous les attraits de l'aventure. Il y a des risques, bien sûr, mais la compagnie d'assurances, la science mathématique, a les reins solides. La réussite sera totale, il y aura foison de découvertes si, chez l'équipage, il y a confiance dans les objectifs et les moyens de l'expédition.

C'est pour fortifier cette confiance que ce Bulletin *a été composé.*

Le steward, Gilbert WALUSINSKI.

Note pour le bon usage de ce bulletin spécial

La page de sommaire donne une première indication sur la répartition des articles. Toute classification comporte cependant une part d'arbitraire. Ici, elle est certainement imparfaite car nous avons hésité à décomposer en morceaux distincts tel témoignage qui garde sa saveur à être lu tout entier. Dans certains cas, pourtant, nous avons réparti un article entre plusieurs chapitres.

La Rédaction remercie chaleureusement les Collègues qui lui ont fourni ces matériaux et lui ont fait confiance pour leur aménagement.

En tête de chaque chapitre, nous avons essayé d'en analyser le sommaire pour faciliter au lecteur la recherche de telle ou telle information.

CHAPITRE 1. *Oui, c'est une réforme !* Les intentions des réformateurs, des témoignages d'expérimentateurs. Autrement dit, cadre et objectifs d'une réforme qui entend réformer.

CHAPITRE 2. *F.P.M.* Sous ce sigle mystérieux se trouve le cœur de la réforme ; F.P.M. signifie « formation permanente des maîtres ». Quelle est sa place dans la réforme ? En quoi consiste-t-elle ? Réponses par des exemples.

CHAPITRE 3. *Les mots.* L'importance des questions de vocabulaire est toujours actuelle. L'est-elle plus aujourd'hui ?

CHAPITRE 4. *Des thèmes.* Voici des exemples non de leçons, mais de recherches qu'il est possible d'engager avec des élèves de Sixième. C'est dans ce chapitre que sera discuté le programme proprement dit.

CHAPITRE 5. *Organisation du travail :* celui des maîtres aussi bien que celui des élèves.

CHAPITRE 6. *Nous, les autres,* où sont présentées quelques tentatives en faveur de la coordination des disciplines en attendant, espérons-nous, que beaucoup d'autres soient proposées à la Rédaction.

CHAPITRE 7. *Pour la documentation :* des livres, des revues, des matériels didactiques, des textes officiels.

CHAPITRE 8. *Et avant ? Et après ?* Quelles sont les perspectives de la réforme en Sixième ? Vers quelle Cinquième débouche-t-elle ? De quel enseignement primaire proviendra-t-elle un jour ? Quel peut être l'accueil du public, celui des parents, celui des maîtres, celui des scientifiques,... ?

Plutôt que de conclure (ce qui serait supposer achevé l'ouvrage à peine commencé), peut-on fixer de prochains rendez-vous pour envisager, si c'était utile, quelque manœuvre de correction de trajectoire ?
Le bloc-notes de l'A.P.M. ou carnet de bord du navire.

N.D.L.R. — Les renvois aux ouvrages recensés dans le chapitre 7 sont indiqués par un numéro entre crochets. Exemple [59] pour FREUDENTHAL : *Mathématique et réalités.*
— Faut-il rappeler que les articles insérés n'engagent que la responsabilité de leurs auteurs. La Rédaction accepte cependant une large complicité, puisqu'elle a participé à la préparation du *Bulletin* ; elle assume en tout cas la responsabilité des textes anonymes de liaison et celle de l'ensemble.

Une importante addition.

Pendant que le présent *Bulletin* était en composition, le Bureau de l'A.P.M.E.P. a décidé la publication du rapport de la Commission Ministérielle sur l'enseignement mathématique dans les classes primaires, remédiant ainsi aux lenteurs calculées de l'Education Nationale. Une large diffusion de ces textes aurait du être réalisée dès avant la rentrée.

Parce que la Sixième est une suite logique, ou tout au moins chronologique des classes primaires, il a paru opportun d'encarter cette brochure dans ce *Bulletin* spécial. Elle se rattache naturellement à sa partie 8, « et avant ? et après ? ».

1

Oui,
c'est une réforme!

Ce que nos Collègues attendent de ce Bulletin *spécial, ce que les réformateurs avaient l'intention de promouvoir, ce que les expérimentateurs ont tenté dans leurs classes, tout cela converge heureusement et nous autorise à proclamer, dès l'abord: « Oui! C'est une réforme! ».*

Notre Collègue Claude Mournet, professeur de C.E.G. à Lalinde (Dordogne), a très bien su nous écrire:

« Ce que je voudrais lire dans ce *Bulletin* »

— Des notes véridiques sur les expériences réalisées dans les classes expérimentales;

— Des notes pédagogiques sur les grosses erreurs de méthode à éviter dans un enseignement qui, pour moi et beaucoup de collègues, sera nouveau;

— Des précisions sur la rédaction et l'emploi des fiches (les fiches remplacent-elles complètement le cours? peut-on se contenter de synthèses de temps en temps?);

— Des suggestions pour l'emploi des livres (je suis très conscient que la leçon pour toute la classe, même avec le concours du plus grand nombre d'élèves, convient de moins en moins; mais je cherche comment faire autrement);

— Des explications précises sur l'organisation du travail en équipes, pour les maîtres, pour les élèves et comment, alors, contrôler les connaissances;

— Des détails sur le travail réalisé dans les I.R.E.M.;

— Des remarques sur l'utilisation ou la fabrication des matériels didactiques;

— etc.

Claude MOURNET.

René Gauthier, professeur au lycée Ampère (à Lyon), avait imaginé un certain Auguste Cloche, professeur de Cinquième, répondant aux inquiétudes d'un Collègue de Sixième, Aristide Tondu (voir Bulletin *267, p. 142). Ne pas confondre* inquiétude *(qui justifie un effort de réflexion originale chez l'inquiet) et* désarroi *(qui conduirait au pessimisme et à l'inaction). Cloche exhortait Tondu: « Si un changement réel n'intervient pas en octobre 1969, si l'occasion du programme nouveau n'est pas aussi celle d'une mathématique nouvelle, alors rien ne changera jamais. »*

Cette lettre réconfortante avait-elle suffi? Les vacances ont été l'occasion pour les deux amis de se rencontrer et de dialoguer plus largement sur tous les aspects de la réforme:

Dialogue imaginaire sur des préoccupations qui ne le sont pas

TONDU. — Je te remercie de ta lettre. Effectivement, j'étais très inquiet à l'idée d'enseigner bientôt le nouveau programme de Sixième. Depuis que tu m'as fait entendre un autre son de... CLOCHE, je le suis un peu moins; mais je le suis encore!

Mon Collègue MOLLO me disait, ces dernières années : « Ne nous excitons pas. Leur mathématique moderne, c'est une mode qui passera comme les autres modes. Rappelle-toi, pour la lecture, la méthode globale : les instituteurs en sont revenus; l'orthographe des élèves, elle, ne s'en est pas encore remise. Au surplus, les parents vont faire scandale quand ils verront sur les cahiers $2 + 3 = 10$. Moralité : pour la mathématique moderne, il est urgent d'attendre. »

CLOCHE. — Je ne suis pas qualifié pour porter un jugement sur la méthode globale; j'ai seulement l'impression qu'elle a bon dos (*). Dans l'hypothèse où cette méthode aurait conduit à un fiasco, faudrait-il s'interdire toute expérience sous prétexte qu'*une*

(*) *N.D.L.R.* — En fait, la méthode globale n'est employée nulle part. Cloche n'ose pas dire que l'allusion à la méthode globale est polémique comme le serait celle à Croquemitaine.

expérience a échoué? Enfin, la méthode globale est une méthode; elle n'a pas changé l'orthographe. MOLLO a le droit de penser qu'une méthode, par exemple le travail sur fiches, ou l'enseignement programmé..., sont des modes passagères; mais estime-t-il que l'introduction de la lampe triode dans les programmes de physique est une mode? Préfère-t-il que ses enfants étudient la lampe à huile?

Les parents? Il faut les informer dès la rentrée, les rassurer; ils constateront ensuite que leurs enfants « mordent »; dès lors, ils ne seront pas hostiles à notre entreprise, ils seront même nombreux à l'approuver.

T. — MOLLO a cru d'abord aux bruits qui ont couru toute l'année selon lesquels l'application du nouveau programme serait ajournée. Mais il commence à perdre de son assurance; il m'a dit hier : « Je l'ai lu, ton fameux programme. Comme je ne suis pas tenu de le traiter dans l'ordre des rubriques, je vais faire le même cours que d'habitude; et le n° 1, les « relations », je le traiterai vers le 15 juin, au moment du bachot, du B.E.P.C., des premières communions... » Il a dû « sauter » le préambule du programme, où il est dit : « ... les idées de la première partie devront être utilisées dans l'étude de toutes les autres qui en fourniront des motivations et des applications ».

C. — D'autres, sans doute, envisagent une solution à peine moins malhonnête que celle de MOLLO; c'est la solution du « replâtrage » (malheureusement adoptée par tel ou tel manuel) : on traite au début de l'année un chapitre 0 (traduis : « d'importance nulle ») où on amène en huit ou quinze jours des définitions sur les ensembles et les relations; et on ne s'en sert plus jamais. On aura alors beau jeu de constater, à la fin de l'année, que les élèves n'auront rien retenu, rien compris, de ce chapitre 0. C'est une solution de facilité pour le maître immobiliste; mais elle serait déplorable pour les enfants; elle est d'ailleurs en contradiction formelle avec le programme et les instructions qui l'accompagnent.

T. — C'est bien ce que j'avais compris.

Je sais vaguement de quoi il s'agit dans cette première partie : quelques lectures, dans le *Bulletin* de l'A.P.M. ou ailleurs, quelques séances de ma Régionale... Et je ne demande pas mieux que d'en éclairer tout le reste du programme. Mais en suis-je capable? Une chose est de savoir ce qu'est l'intersection de deux ensembles, une autre chose de l'enseigner en classe et surtout en classe de Sixième!

C. — Je te comprends d'autant mieux que, au seuil de l'expérience qui a commencé en Sixième en septembre 1967, nous étions nombreux parmi les expérimentateurs, à en être à peu près au même point que toi aujourd'hui...; les « vieux » en particulier, ceux qui n'ont pas appris de mathématique moderne au cours de leurs études.

Heureusement, ce n'est pas « moi » qui expérimente; c'est une équipe, ou plutôt plusieurs équipes : celle de mon établissement, l'équipe lyonnaise, l'ensemble de tous les expérimentateurs de Marseille, Paris, Poitiers, Bordeaux, Lyon. Ensemble, nous nous instruisons, nous confrontons périodiquement nos tentatives, nos échecs et nos réussites. Livré à lui-même, isolé dans sa classe, chacun de nous aurait sûrement éprouvé plus de difficultés, aurait peut-être cédé au découragement, aurait beaucoup plus souvent « déraillé ».

Il faut que tous les collègues fassent comme nous. Le nouveau programme est une magnifique occasion de rompre avec cet individualisme forcené de l'enseignant français, maître après Dieu (et encore!) dans sa classe, fermée à toute personne qui n'est pas chef d'établissement, concierge ou inspecteur.

Groupez-vous dès aujourd'hui; discutez *ensemble*, du programme, des nouvelles méthodes qui sont proposées ici ou là, des nouveaux ouvrages, des résultats de l'expérience en cours. La circulaire du 19 mai 1969, que tu connais et que tous les échelons administratifs auront à cœur, j'en suis sûr, de faire entrer dans les faits, vous y aidera.

T. — Eh oui, je l'ai lue! Mais crois-tu qu'un animateur voudra venir faire une Sixième dans mon C.E.G. de campagne? Et l'équipe? Nous sommes deux, MOLLO et moi; tu le vois faire équipe avec moi?

C. — Pourquoi pas? Il ne faut rejeter personne *a priori*... Mais je reconnais que tu n'as pas la part belle. Tu peux compter, néanmoins, sur ta Régionale A.P.M., sur l'A.P.M. elle-même qui est une grande équipe... Les expérimentateurs, en particulier, te répondront si tu leur écris, même à propos d'un détail. Tu vas devenir expérimentateur; les instructions le disent : « ... en limitant à quatre ans la validité de ces programmes, la commission confie en fait aux professeurs, pour cette période, l'initiative d'une expérimentation élargie désormais à l'ensemble des établissements. »

T. — Redoutable honneur qu'elle nous fait là, la commission! Quant à notre formation préalable, elle consiste à nous flanquer à l'eau pour nous apprendre à nager...

C. — Tu prêches un converti. La logique, la sagesse auraient voulu que le ministère de l'Éducation Nationale prît en charge, voilà des années, la formation continue des maîtres. L'A.P.M. le lui a demandé, en vain, pendant longtemps, et elle continue. Je ne parle pas trop de la « journée de recyclage » que sans doute les autorités ont organisée dans ton secteur; je ne leur fais pas l'injure de penser qu'elles estiment avoir ainsi « recyclé », en six ou sept heures, tous les collègues enseignant en Sixième.

Les I.R.E.M., au contraire, c'est sérieux; ils résoudront peu à peu le problème si on leur en donne les moyens. Il en existe déjà trois, grâce à l'action tenace de l'A.P.M. Ce n'est qu'un début : il en faut, dès que possible, un par Académie; continuons le combat...

Attendre que tous les collègues soient « recyclés » (et comment saurait-on qu'ils le sont tous? En leur faisant passer un examen? Est-ce là ce que désire le collègue MOLLO? Et que ferait-on des collés?), c'est repousser indéfiniment la réforme, c'est condamner l'enseignement des mathématiques à la sclérose définitive.

T. — Soit. Je me lancerai. J'arriverai bien à conserver quinze jours d'avance sur les potaches, comme l'année où j'ai débuté dans le métier...

C. — ... et tu t'en sentiras rajeuni! Si tu es aussi « vieux » que moi, mon cher TONDU, je te renvoie à notre collègue Jean CHABRIER (*Bulletin* 267, p. 143) : il exprime avec une juvénile éloquence ce que je ressens de mon côté. Si tu es encore jeune..., prouve-le, et d'abord à toi-même!

T. — Bon. Admettons que mes connaissances mathématiques soient à jour. Et les élèves? Si nous parlions d'eux, maintenant? Comment vont-ils réagir devant tant d'abstraction, tant de vocables savants? Ils ne sont pas tous brillants, mes élèves :

est-ce que tu t'en rends bien compte? Tu me dis que tes élèves sont passionnés : mais quels élèves as-tu? combien en as-tu? les as-tu triés avant de te lancer dans l'expérience? est-elle « large et honnête », cette expérience?

C. — Nos élèves n'ont pas été triés; nous avons pris le tout-venant; d'ailleurs, dans certains établissements, toutes les Sixièmes sont expérimentales. Les effectifs sont variables (l'an dernier, une Sixième au moins comptait 41 élèves (*)). Et le niveau aussi; telle Sixième était très faible, de l'avis des collègues des autres disciplines, de l'avis aussi du conseiller d'orientation.

Trop « abstrait », le programme? J'aimerais bien qu'on me donne une définition de ce mot, avant de discuter; cela risque de nous mener loin... Le danger, à mes yeux, n'est pas dans l'abstraction. Il est plutôt dans le dogmatisme, dont REVUZ nous disait l'autre jour qu'il nous guettait tous, et qu'on ne peut sans doute pas l'éviter totalement. Ne tombons pas dans le piège : il est possible d'enseigner la mathématique moderne aussi dogmatiquement qu'on le faisait trop fréquemment avec les mathématiques traditionnelles.

Le vocabulaire trop abondant? Feuillette les manuels d'histoire, de géographie, de sciences naturelles que lisent (en principe...) nos élèves de Sixième; tu verras que nous sommes largement battus sur ce point. Que le vocabulaire de la mathématique moderne soit forcément plus abondant que l'ancien, c'est à voir; à condition de ne pas prendre comme terme de comparaison l'ancien programme de Sixième, qui n'introduisait guère de mots nouveaux pour l'excellente raison qu'il n'introduisait guère... de nouveau.

Et puis, enfin, la pauvreté du vocabulaire est parfois pour l'élève une gêne, autant qu'une trop grande abondance. Crois-tu qu'on ne l'aiderait pas, dès l'école primaire, en désignant par deux mots différents les deux notions nettement différentes qu'on appelle toutes les deux « division »? Tu seras peut-être content, l'an prochain, de disposer du vocable « équipotent » (celui-là ou un autre) lorsque tes élèves qualifieront d' « égaux » deux ensembles ayant le même nombre d'éléments...

T. — Je t'interromps : dans mes modestes lectures, j'ai constaté que les auteurs « modernes » n'étaient pas toujours d'accord sur l'emploi de tel ou tel mot, de tel ou tel symbole. Tu entends d'ici les sarcasmes de MOLLO... Et j'avoue que ces divergences sont un peu déprimantes.

C. — Je suis bien de ton avis! Mais je te fais remarquer que le problème ne date pas d'hier. Propose à dix matheux rassemblés le petit jeu suivant : que chacun écrive sur un papier le sens ou les sens qu'il attribue aux mots « angle », « équation », « vecteur », « pente », « algébrique » (d'utilisation fréquente, et pas modernes pour deux sous!) : tu auras des surprises...

Là encore, l'A.P.M. s'est mise bravement au travail. Sa Commission du Dictionnaire fait ce qu'elle peut... Si nous l'aidons tous, elle pourra harmoniser, au moins partiellement, notre vocabulaire.

T. — Revenons aux élèves. Quels résultats tirez-vous de votre expérience?

(*) *N.D.L.R.* — Exemple non recommandable. Nous recommandons aux Collègues de faire appliquer le règlement strictement : 35 élèves au plus en Sixième. 24 élèves, effectif souhaitable.

C. — Nous nous gardons de les surestimer, de nous laisser aller au dithyrambe. Nous ne cachons pas que nous avons eu du mal, que nous nous sommes parfois fourvoyés (soit dit en passant, nous sommes effarés de voir avec quelle légèreté certains manuels traitent telle ou telle question, la transitivité par exemple...), que nous n'avons pas fait de miracles.

Mais tout de même, nous n'allons pas mentir uniquement pour éviter de nous faire traiter de charlatans par les immobilistes de mauvaise foi! Nous n'allons pas renoncer à dire que la plupart de nos élèves, doués ou non, sont intéressés, souvent même passionnés par ce que nous leur proposons; que, dans telle classe de Sixième ou de Cinquième très faible, le professeur de mathématique(s) est le seul à ne pas se plaindre amèrement, lors des conseils de classe, de l'apathie, du manque d'appétence des élèves; que des élèves nous réclament des fiches, à la fin de l'heure, pour les « faire » chez eux ou en étude, ou même pendant les vacances, ce à quoi ils ne sont pas obligés; que les notions nouvelles du programme « passent », si on s'y prend bien; que le travail par fiches, partiel ou non, présente, à côté de quelques inconvénients mineurs, l'énorme avantage de faire travailler chaque élève activement en classe, et cela à son rythme propre; et que, en résumé, le bilan de l'expérience est déjà — je pèse mes mots — nettement positif.

Autre remarque encourageante : Ne cherchons pas à tout prix à faire acquérir d'un coup une notion aux élèves. « Tôt et progressivement », dit Revuz avec raison. Nous avons constaté que certaines notions, mal comprises dans certaines classes en Sixième, sont « passées » plus facilement à la rentrée en Cinquième. Donc, ne te désole pas trop vite.

Ne t'inquiète pas trop, non plus, dans le cas où tu utiliserais des fiches, de la lenteur avec laquelle les élèves les étudieront au début de l'année; il se peut qu'à la Noël, ils aient parcouru moins du tiers du programme. C'est que le travail sur fiches nécessite pour l'élève (et pour le professeur...) un temps d'apprentissage; une fois cet apprentissage accompli, le rythme devient plus rapide.

T. — Je voulais justement te parler des fiches. Il en est question dans les instructions...

C. — Je te renvoie sur ce point à la brochure nº 35 RP de l'I.P.N. intitulée *« Mathématique. Expérimentation et nouveaux programmes en Sixième* [2.5]. Sur le principe des fiches, les instructions ont raison (et pourquoi des instructions n'auraient-elles pas raison, de temps à autre?) de souhaiter que « des professeurs... s'accordent pour rédiger des fiches communes, révocables à bref délai... ».

Elles souhaitent aussi « ... que les professeurs soient munis rapidement des moyens matériels nécessaires de secrétariat et de polycopie » : discret appel au bon cœur du Ministre des Finances...

T. — Tu m'avais presque rassuré sur le programme, et les fiches m'intriguent, me tentent... Mais quant à en faire moi-même, ou même avec une petite équipe de collègues, je me demande si ce n'est pas me demander à moi-même un effort supplémentaire trop grand?

C. — Je ne veux pas te dorer la pilule. La rédaction de fiches demande du temps et des efforts. La classe-à-fiches est au moins aussi fatigante à mener pour le maître que la classe ordinaire. Mais là encore, tu peux profiter de notre travail à nous, expérimentateurs; des recueils de fiches ont été édités [voir bibliographie], consulte-les, compare-les, discute à leur sujet avec tes collègues. Personne ne t'oblige à les adopter telles quelles. Butine-les et fais ton miel...

Je crois que la chose vaut d'être tentée. Peut-être, pour ton recyclage « sur le tas », des fiches te seront-elles d'un plus grand secours que des manuels? Tu nous le diras l'an prochain.

T. — Tu as vraiment envie de savoir comment je m'en tirerai l'année prochaine?

C. — Mais naturellement! Septembre 1969 sera un tournant pour l'enseignement mathématique en France. Nous sommes tous embarqués sur le même bateau. Je crois que nous réussirons, à condition d'être tous persuadés que la rénovation ne peut aboutir que si elle est collective et continue.

Je te souhaite bon courage.

p.c.c. Louis DUVERT *(La Martinière, Lyon).*

Les journées d'étude de l'A.P.M.E.P. Clermont — Mai 1970

Les collègues de la Régionale de Clermont-Ferrand seront heureux d'accueillir dans la capitale auvergnate, les 7, 8, 9, 10 mai 1970 les participants des " journées 1970 " de l'A.P.M.E.P. Elles auront lieu dans les locaux de l'I.U.T. du nouveau complexe universitaire des Cézeaux.

Le thème retenu est **" mathématisation du réel "**.

Le programme sera en principe le suivant :

Jeudi 7 mai (Ascension) à 10 heures : accueil des participants, par monsieur le Recteur de l'Académie de Clermont, première conférence.

Jeudi après-midi et vendredi matin, conférences.

Vendredi après-midi, excursion collective, au parc des volcans, et aux lacs d'Auvergne.

Vendredi soir : banquet de l'A.P.M.E.P.

Samedi matin et soir, exposés.

Dimanche matin : Assemblée générale de l'A.P.M.E.P.

Sont, entre autres, prévus des exposés de MM. BADRIKIAN, GUERBER, HENNEQUIN, LETAC, PAVEL, REVUZ.

Les collègues désireux d'apporter leur contribution au thème des journées sont priés de se mettre en rapport au plus tôt, soit avec Mme F. Hennequin, Faculté des Sciences, 34, avenue Carnot, Clermont-Ferrand-63, soit avec Monsieur Sourd. Lycée Technique A. Gasquet, rue Torilhon, Clermont-Ferrand-63.

Pour les réservations, s'adresser à Monsieur Fourt, ou à Monsieur Brunet, tous deux à la Faculté des Sciences, 34, avenue Carnot, Clermont-Ferrand-63.

Une série d'excursions, ou de visites commentées de Clermont, spécialement destinées aux familles des participants sont prévues (basiliques romanes, fontaines pétifiantes, grotte du chien, etc.). Les autorisations d'absence, billets de congrès, seront sollicités au bénéfice des participants.

Pour tout autre renseignement, s'adresser au secrétaire de la Régionale : C. ALMERAS, 74, boulevard de l'Eclache, Royat-63.

Ce qui s'annonçait hier, ce qui est possible aujourd'hui

Magdeleine Motte,
Lycée Bonaparte, Toulon.

Un nouveau programme : pourquoi ?

Dix classes de Sixième sont passées dans mes mains depuis le 1er octobre 1955 — dont une expérimentale en 67-68.

Je suis persuadée qu'on pouvait faire du bon travail avec l'ancien programme, qu'on pouvait individualiser le travail, utiliser du matériel, des modèles, qu'on pouvait sans trahir le programme, mais aussi en se détachant de la conception qu'en répandaient les manuels, faire de la classe de Sixième une bonne préparation à l'enseignement des classes suivantes, étant donné ce qu'était celui-ci.

On pouvait déjà donner à cette classe une physionomie très différente de celle de la classe de Cours Moyen et avoir des élèves oubliant leurs dégoûts ou échecs antérieurs devant les « problèmes ».

J'ai donné il y a quelques années (*) une idée de la manière dont j'avais conçu cet enseignement pour qu'il remplisse sa tâche de préparation tout en s'adaptant aux possibilités des enfants, et je ne pense pas devoir le rappeler ici. Mais je tiens à dire avec gratitude que je devais cet aménagement du programme à l'influence de Gattegno et de la C.I.E.A.E.M. d'une part, au travail des Hollandais sur les « méthodes d'initiation à la géométrie » publié par le Dr Freudenthal d'autre part.

Si on se reporte à l'article indiqué on verra que, déjà, j'avais été amenée à traiter le chapitre des « mesures » dans l'esprit du programme actuel mais aussi que j'avais renoncé à étudier *toutes* les grandeurs donnant lieu à mesure — ce que le nouveau programme s'obstine à nous imposer (**) malgré les conclusions unanimes des expérimentateurs !

(*) Cahiers Pédagogiques, n° 33 (1-3-62), p. 74. Voir « Plan de travail » p ·74 et 75.

(**) *N.D.L.R.* — Le nouveau programme *impose* si les professeurs conservent la même conception du programme, liste contraignante des sujets à étudier. Si, au contraire, le programme est seulement considéré comme un cadre d'action, il n'impose ni un ordre (il ne l'a jamais fait) ni une totalité du contenu.

C'est en 1957 seulement que j'ai « découvert » — si l'on peut dire — l'existence des « ensembles » et des structures et aperçu les prodigieux services qu'ils pourraient rendre à notre enseignement (lieux géométriques, logique, rapprochements...). Toutefois je n'ai jamais eu la tentation d'introduire ces notions en Sixième pour plusieurs raisons :

— ce que nous faisions en Sixième était utile, voire indispensable, pour une bonne poursuite des études, étant donnée la place qu'y tenait la géométrie et l'avantage qu'il y avait à ne pas aborder son étude sans avoir une bonne connaissance de ses modèles concrets et en particulier des instruments qui soustendaient son axiomatique. La partie la plus discutable — une place exagérée donnée aux mesures — je l'avais déjà réduite et modifiée pour la faire participer à la préparation de l'enseignement en Cinquième (utilisation d'encadrements, de fractions, découverte de quelques calculs sur les fractions).

— nous n'avions que 3 heures : aucune introduction nouvelle n'était possible sans renoncer à une partie de la matière certainement utile, ou sacrifier les méthodes : les manipulations individuelles de matériel, les constructions de modèles ;

— enfin qui, à l'époque, recevant en Cinquième mes élèves, se serait soucié d'utiliser les notions ensemblistes qu'elles auraient pu acquérir en Sixième ?

Par contre il m'arrivait d'introduire la notion de repérage (réseau, « coordonnées polaires »).

L'ancien programme de Sixième, avec une autre rédaction, avec d'autres instructions, pouvait faire un bon programme tant qu'on gardait les programmes de Cinquième, Quatrième et Troisième.

Mais c'est là que le bât blessait ! Les élèves entraient en Cinquième et il fallait aussitôt courir la poste et subir le carcan du programme alors qu'on commençait à voir de plus en plus nettement comment on aurait pu s'y prendre pour une meilleure compréhension des propriétés des opérations, pour un meilleur début de la géométrie, pour se débarrasser de « règles » (ajouter une différence, retrancher une différence...) que de très bonnes élèves assimilaient difficilement.

Autrement dit la nécessité qui s'est imposée, ce n'est pas la nécessité de changer le programme de Sixième et par contre-coup les autres, mais la nécessité de changer ceux de Cinquième, Quatrième, Troisième et par contre-coup, celui de Sixième.

Un changement qui s'imposait aussi c'était celui des méthodes, l'introduction plus large du travail individuel ; changement profond qui ne peut être imposé par une circulaire, qui doit être accepté. Il ne suffit même pas qu'il soit accepté : il faut que de grands encouragements, de sérieuses motivations, viennent aider le maître à faire un pas dans cette direction.

Les futurs professeurs des Sixièmes 69-70 auxquels j'ai eu l'occasion de m'adresser dernièrement en conviennent : le seul fait de devoir traiter une matière nouvelle est un encouragement à essayer de nouvelles méthodes. Tant que la matière ne change pas le maître se dit : « Je sais quels résultats j'obtenais en présentant ainsi cette leçon : qui sait si j'obtiendrai, non pas des résultats équivalents — cela ne justifierait pas la peine dépensée pour changer de méthode — mais de meilleurs résultats avec une méthode dans laquelle je n'ai pas acquis d'expérience ? »

Il se trouve aussi que ce changement un peu brutal de programme a suggéré l'ouverture de classes expérimentales. Et que les professeurs qui travailleront l'an prochain en Sixième vont être aidés par les documents qui sont sortis du travail de ces classes, par l'exemple et les témoignages des maîtres de tous âges qui se sont lancés, presque tous pour la première fois, dans un large usage des fiches et, certains pour la première fois, dans l'organisation pour les élèves de fréquentes séances de travail en équipes.

Nécessité de changer les programmes du premier cycle — et par là de résoudre les problèmes du deuxième cycle —, et nécessité de changer les méthodes, se sont conjuguées pour imposer une modification du programme assez nette mais qui doit conduire à une modification bien plus nette encore du travail dans nos classes, contrairement à l'idée qu'en donnent, pour la plupart, les manuels parus récemment.

J'ai dit en commençant qu'on pouvait faire du bon travail avec l'ancien programme ; je veux dire en terminant cette introduction qu'on peut en faire du bien meilleur avec le nouveau, encore qu'il souffre d'être issu de compromis et d'avoir été établi avant celui de Quatrième qui aurait dû le déterminer.

« Affirmation non justifiée ! » pourraient me dire les élèves de Cinquième expérimentale. C'est vrai ! Mais, dans la classe, sur le terrain, l'évidence en est pressentie en Sixième et éclate à la fin de la Cinquième. On en reparlera lorsque vous y aurez goûté.

Comment j'ai choisi de travailler dans les classes expérimentales.

Les principes directeurs.

Pour les méthodes : a) large place laissée au travail individuel ;
b) introduction progressive du travail en équipes ;
c) pas d'utilisation systématique des fiches et du travail individuel : jeux avec instructions données oralement, séances de discussion pour cerner une notion qui était présente dans des situations rencontrées antérieurement, séances d'échanges et de synthèse de résultats de travaux d'équipes, travail sur manuels, séances où des tâches brèves sont proposées oralement ou par fiches et les échanges faits à chaque étape, utilisation dans ce dernier cas de la présence aux tableaux de nombreux élèves (4 à 6). La diversité des moyens barre la route à la monotonie et permet une adaptation de la méthode au sujet étudié.

Pour la présentation du programme : ce programme se prête admirablement à la mathématisation à partir de situations familières Et qui dit situation dit situation de laquelle on peut généralement extraire plusieurs concepts mathématiques suivant l'éclairage qu'on donnera. Il serait donc regrettable de donner trop rapidement tel éclairage plutôt que tel autre, amenant ainsi l'enfant à ne pas profiter de toute la richesse de la situation. Par exemple, dans toute situation où il y a une intersection d'ensembles il y a aussi une réunion d'ensembles, il y a aussi des complémentaires. Il y a donc intérêt à présenter assez longtemps de telles situations avant d'introduire le vocabulaire et les définitions. On peut alors introduire simultanément « intersection » et « réunion », voire « complémentaire ». De même, c'est dans le même lot de situations que nous puiserons les notions de couple, de relation, les propriétés des relations sur un ensemble, la notion de fonction. Là aussi il est intéressant et honnête d'accumuler les situations avant de braquer le projecteur sur le concept de couple.

Bref, s'il y a un programme qu'on peut traiter sans le « découper en rondelles de saucisson » — selon l'expression imagée d'une collègue du groupe Freinet — c'est bien ce programme de Sixième.

J'y étais bien décidée. C'est pourquoi on ne trouve pas de chapitre « Ensembles » sinon au bout de 5 ou 6 mois, pas de chapitre « Relations », pas de chapitre « Repérage » dans le « dossier de math » de mes élèves.

Les moyens matériels.

Nous avons disposé :

a) de la possibilité de tirer des fiches sur Polyjapy ;

b) de matériel : blocs logiques ; « multibase shapes » (base 3, base 4) ; petits tableaux métalliques à réseau rectangulaire (« planing ») et rondelles aimantées ; géoplans — dont nous avons largement usé en *Sixième* ;

c) de manuels : *Sixième,* un « Touyarot », trois « Papy » M.M.I. Cinquième ; neuf « Papy » MMI (un par équipe), neuf « Bréard » (un par équipe), vingt-six « Queysanne et Revuz » (un par élève), vingt-six « Maillard » (un par élève).

Je me permets de rappeler ici qu'une bonne gestion du crédit d'enseignement des mathématiques permet assez vite un bon équipement. On peut même en distraire une partie pour enrichir le rayon mathématique de la bibliothèque des professeurs. C'est sur ce crédit que j'ai acheté les « Papy » et les « Bréard ». De plus chaque établissement dispose :

— d'un crédit quadriennal pour le renouvellement des manuels du cycle d'observation ;

— de crédits Barangé.

La mise en route du travail.

Tout en dépend.

Il s'agissait que, dès le premier cours, les élèves sentent que quelque chose de nouveau allait commencer. Il fallait, cependant, éviter qu'elles se sentent dépaysées. Je ne pouvais pas songer à déployer du matériel car j'avais découvert le 29 septembre que, contrairement aux promesses reçues, ma sixième serait dans une annexe et que je la rencontrerais le 30 avant d'avoir pu déménager quoi que ce soit.

Je savais que les élèves de Sixième aimaient bien les entiers et les puissances. J'ai cherché un « jeu » dans cette direction. J'ai « distribué » les vingt-cinq premiers entiers aux élèves présentes (il en manquait deux) ; chaque élève a inscrit son nombre sur un papier, accroché le papier à la blouse. Dorénavant chacune était un nombre. Nous nous sommes rassemblées au fond de la salle. J'ai demandé ce qui pouvait arriver lorsqu'on faisait une division. On m'a parlé du cas où « ça tombe juste ». J'ai introduit le vocabulaire « est un diviseur de ». On m'a donné quelques exemples. Alors j'ai donné la règle du « jeu » : chaque nombre doit reconnaître les nombres dont il est un diviseur et prendre dans sa main droite leurs mains gauches.

Je laisse imaginer la suite...

Très vite, cependant que quelques élèves sont perplexes, d'autres protestent que leur tâche est difficile, voire impossible. « Un » est découragé !

On me dit : « Il faudrait des ficelles ! » Je n'ai que de fragiles fils. Je leur demande si elles veulent essayer les fils ou essayer de représenter la situation sur du papier.

La deuxième proposition est bien accueillie et adoptée...

Un tel début engageait la suite : d'abord par l'introduction *d'autres situations* que l'on exprimerait sur le papier avec des flèches et d'où sortiraient vers la *mi-novembre* la notion de couple, de produit cartésien, de relation ; ensuite par l'exploitation tout au long de l'année de la notion de diviseur :

— découverte d'une formation méthodique de l'ensemble D_n des diviseurs de l'entier n ;

— notion d'inclusion à partir de l'observation d'ensembles D_n ;

— nombres premiers en classant les ensembles D_n de même cardinal ;

— décomposition en produits de facteurs premiers ;

— et bien entendu l'exploitation de la relation « est un diviseur de » pour l'étude des propriétés des relations sur un ensemble, sans que cet exemple soit privilégié.

Mais tout s'enchaîne : un arbre généalogique des aïeux directs introduit dans les situations exprimables par des flèches avait attiré l'attention sur les puissances de deux et donné l'occasion d'introduire les autres puissances.

Des problèmes de classement et de choix montrèrent par la suite l'utilité des arbres et on en découvrit plusieurs familles.

Dans ces conditions le cours apparaît « décousu » (il écrivait gentiment « un peu... ») à un papa. Mais une élève écrit (*) « Elles (ces mathématiques) sont très variées et si on n'a pas compris une leçon (relations par exemple) cela ne nous empêche pas de comprendre l'autre (exposant par exemple) ». Et une autre « c'est bien parce que ce n'est pas pareil que tout ce qu'on nous a dit jusqu'ici, tout en arrivant à un même but ».

Et dire que tant d'adultes n'ont pas vu « qu'on arrivait au même but » !

La mise en route du travail en équipes.

Je vais être un peu longue parce que je souhaite que mon exemple encourage tout ceux qui n'ont pas encore essayé ce travail.

Jusqu'au premier octobre 1967 je n'avais fait que de timides essais de travail en équipes, deux ou trois ans plus tôt, en Cinquième. Mais je revenais de Sherbrooke et j'avais tellement été frappée par les capacités de lecture de fiches, d'organisation du travail, de discussion des jeunes québecquoises de 9 à 11 ans de l'école primaire que j'avais visitée que je ne pouvais pas ne pas songer à donner cette liberté d'initiative aux élèves de la classe expérimentale dont l'horaire était de quatre heures.

Cependant j'ai commencé timidement.

Pendant l'heure de travail dirigé je donnais à la moitié des élèves présentes — donc un quart de l'effectif — un travail individuel sur une fiche pendant que les autres se groupaient librement en deux ou trois équipes pour jouer avec les blocs logiques à un jeu dont la consigne était donnée oralement.

(*) En classe, en cinq minutes, « Que pensez-vous de votre classe de mathématiques cette année? ».

Ceci fut suffisant pour m'encourager, à la fin du trimestre, à former 9 équipes de trois élèves de la façon suivante : ayant partagé (sur le papier !) les 27 élèves en trois ensembles — les très bonnes, les moyennes, les faibles selon l'opinion du conseil de classe — j'ai pris pour chaque équipe un élément de chacun de ses ensembles en tenant compte de bien d'autres facteurs (séparer les amies qui s'étaient groupées librement mais se disputaient toujours ; mettre ensemble les élèves calmes, timides ; tenir compte de certaines antipathies) et de quelques indications de notre conseillère psychologue.

Les équipes ont commencé à travailler le jour du travail dirigé : 4 équipes une heure, 5 l'heure suivante. L'idée d'avoir 9 équipes simultanément m'affolait encore.

Une première série de travaux a été effectuée par rotation pour des raisons de matériel (il est peu souhaitable d'avoir trop d'équipes travaillant simultanément avec des blocs logiques ; il eut été dispendieux d'acheter un trop grand nombre des petits tableaux métalliques si commodes pour l'initiation aux graphes cartésiens). Aucune difficulté n'a surgi. Au contraire j'étais étonnée de voir l'acharnement avec lequel les élèves cherchaient sans jamais appeler à l'aide même lorsqu'elles avaient des difficultés.

A cette époque je n'osais pas observer une équipe de trop près, si bien que je chômais ou m'occupais du Cahier de Textes, non sans un sentiment de culpabilité.

Le fait de n'être pas débordée allait m'aider à franchir un autre pas qui s'imposait. Le travail en équipes utilisant l'heure destinée au travail dirigé ne revenait qu'une fois par semaine et il fallait cinq semaines pour une rotation sur cinq travaux, à condition qu'ils puissent être effectués en une heure.

Or les travaux que j'ai voulu mettre en route pour la deuxième rotation portaient sur des sujets qui exigeraient plusieurs heures d'exploration. Il s'imposait donc d'essayer le travail en équipes avec l'effectif complet — et de retrouver pour le travail dirigé les heures à demi-effectif.

Ce pas fut franchi sans difficulté.

Les enfants ont beaucoup apprécié ce travail et continuent à l'aimer à la fin de l'année de Cinquième.

Je dois dire qu'avant de leur faire connaître la liste des équipes, j'avais fait un petit laïus sur la nécessité du travail en équipes dans le monde contemporain et précisé qu'il ne s'agissait pas de faire un concours entre équipes, mais de permettre à *toute* la classe de progresser sans difficulté, afin que nous ne perdions aucune fille à la fin de l'année.

Je pense l'an prochain, en reprenant une Sixième, procéder à peu près de même pour l'introduction du travail en équipes. Car si je suis rodée, les élèves qui arrivent ne le sont pas. Mais quelque chose pourrait être assez gênant : ce serait d'avoir trente trois élèves au lieu de vingt-sept, onze équipes au lieu de neuf !

Je précise que nous n'avons pas une salle spécialement équipée pour ce travail ; mais les élèves déplacent et replacent très volontiers et très rapidement les chaises et les tables.

La hauteur du bruit est très variable et n'a jamais été excessive. L'an dernier j'ai même souvent admiré qu'il n'y en eût pas davantage. Les élèves, en Cinquième, me paraissent un peu moins discrètes. De toute façon, d'autres l'ont dit avant moi, cela ne les gêne pas.

Au début de la deuxième année scolaire, j'ai parlé aux élèves : allions-nous garder les mêmes équipes ou les modifier ? Je leur ai demandé de réfléchir à ce qu'elles souhaitaient : elles seraient consultées quelques jours plus tard. Je leur ai fait remarquer que grâce à ces équipes pour lesquelles je ne les avais pas consultées, parce qu'une équipe ne pouvait pas être formée au hasard, elles avaient connu particulièrement bien certaines camarades. Mais que les autres, elles les connaissaient peu.

Une dizaine de jours plus tard, j'ai procédé à un petit référendum. J'ai dicté :

1° Je préfère que l'on conserve ces équipes.

2° Je ne veux pas me retrouver avec les camarades de l'an dernier.

3° C'est volontiers que je retrouverais mes coéquipières mais je pense qu'il faut que je m'efforce de connaître et d'apprécier d'autres camarades.

Voici les résultats :

1° 4 élèves dont 1 anonyme.
2° 3 élèves dont 1 anonyme.
3° 19 élèves dont 4 anonymes.

J'ai refait des équipes en m'arrangeant pour tenir compte de toutes les données en ma possession.

On m'a dit plusieurs fois « Mais est-ce que ce ne sont pas les meilleures qui font le travail des autres ? »

La réponse est « non ». Précisons : il a été exceptionnel qu'une élève se dissipe et amuse son équipe (deux cas légers en Sixième) ; je n'ai jamais observé une élève en train de rêver à l'écart des recherches de ses camarades.

Prenons le cas d'une des meilleures élèves de la classe : Marie-Claire. Sa camarade d'équipe est Blandine, élève qui m'avait été présentée comme faible en « calcul » à l'école primaire, parce que toutes deux avaient accepté d'être dans l'équipe de deux — nous n'étions que 26 cette année — au moins pour un trimestre. Elles ont ensuite demandé à poursuivre l'expérience. Or dans l'équipe la collaboration est étroite et c'est très souvent Blandine « qui a raison » et qui fait la découverte intéressante. Mais c'est Marie-Claire qui rédige une bonne définition, organise une déduction.

Brigitte est la meilleure élève de la classe en mathématiques et sa supériorité s'est affirmée très nettement cette année au point de vue du développement logique et de l'aisance dans la manipulation et la reconnaissance des concepts étudiés. Il est certain que lorsqu'il s'agit de logique, de définition à rédiger, sa participation au travail de son équipe est prépondérante. Mais ses camarades travaillent, donnent leur point de vue, et ne s'inclinent pas facilement devant ses propositions lorsque leurs avis divergent. Lorsqu'il s'agit de travaux plus pratiques sa participation ne dépasse pas celle des autres si ce n'est pour introduire de la méthode dans le travail de l'équipe.

Cette année j'ai placé dans l'équipe de Brigitte une élève que je voulais « sauver » : aussi jeune que Brigitte, comme elle fille de maçon d'origine italienne mais aînée de six, Marielle n'avait pas tenu le coup en Sixième. Justes en mathématiques, ses résultats étaient très insuffisants en latin et en anglais à la fin de l'année. J'avais insisté pour obtenir son passage en Cinquième. Cette année elle est admise en Quatrième sans abandon du latin et sans indulgence. Je me demande si, mise dans un groupe de niveau faible, elle aurait aussi bien rattrapé le retard pris en Sixième ?

Chaque équipe a sa physionomie mais pour l'instant le danger qu'une élève travaille pour les autres est totalement imaginaire parce que toutes s'intéressent au travail et ne « laissent leur part » à personne.

Je ne sais pas combien de temps ce mode de travail sera profitable ; je suis prête à diminuer sa part, à ne l'organiser que pour une partie de la classe. J'essaierai d'être attentive aux besoins qui se feront jour en Quatrième et en Troisième. Mais pour l'instant le bénéfice que peut retirer une classe d'un horaire assez important accordé au travail en équipes est au moins double.

1° Le travail en équipes est sécurisant : devant une tâche, même difficile, aucune équipe qui se sente découragée ; les enfants apprennent donc à persévérer dans la recherche, à tâtonner sans se décourager. Or c'est bien souvent l'impossibilité de prendre ces deux attitudes qui laisse nos élèves inertes devant un problème.

Il en résulte qu'on peut confier à l'équipe des tâches plus difficiles et moins atomisées que celles qu'on peut proposer pour un travail strictement individuel. Or la présence de ces tâches dans nos classes est indispensable pour un véritable apprentissage des mathématiques, comme Z.-P. Dienes et G. Polya l'ont souligné.

A mon avis l'enfant de *onze ans*, tel qu'il nous arrive *actuellement* de l'école primaire, tire plus de profit de ces tâches affrontées en équipe qu'en dialogue avec le professeur en travail dirigé.

2° Il contribue fortement à homogénéiser la classe, à éviter que se creusent de grands écarts entre les résultats d'enfants qui avaient tous acquis à l'école primaire, dans le même laps de temps, le bagage nécessaire pour entrer en Sixième.

On se demande si les écarts qui se creusent entre ces enfants au lycée, on n'a pas eu trop longtemps tendance à les trouver naturels ?

Pour conclure, je me permets d'émettre un vœu : que lorsque l'effectif de la classe est tel que $24 < n < 30$ et que le professeur souhaite donner une large part au travail en équipes, il soit autorisé par le chef d'établissement à choisir entre l'horaire $(3 + 1)$ et un horaire (5) à plein effectif. Car lorsque les enfants travaillent en équipes, il est moins que jamais question de leur imposer un rythme et de décider que telle ou telle fiche sera parcourue en tant de temps.

M. M.

Première étape... une brochure à diffuser parmi nos collègues du premier degré (voir p. 346).

L'imagination et la mathématique

René Gauthier
Lycée Ampère, Lyon.

Depuis deux années, j'enseigne dans ces classes de Sixième et Cinquième « expérimentales » ; je suis sensé faire « des mathématiques nouvelles ». Nous avons rédigé des rapports, des articles, des exposés. Nous avons subi les critiques, les sarcasmes ironiques de certains et suscité l'intérêt de quelques autres. On croit toujours avoir tout dit, tout expliqué. Et pourtant, en fin de cette seconde année, il me reste l'impression que l'on n'a pas assez insisté sur l'essentiel.

Peut-être, au début, certains ont-ils cru que nous faisions vraiment des « mathématiques modernes ». Et bien, rien n'est plus faux ! Nous avons enseigné les mathématiques, avec ou sans S, c'est sans importance. Il faudrait tout de même que ce canular prenne fin. Certes, nous avons initié nos jeunes élèves à des notions jamais enseignées officiellement à ce niveau ; nous avons utilisé un vocabulaire nouveau ; un vocabulaire simple et précis qui servira tout au long de la scolarité : relations, applications, bijections, ensembles, compositions de relations, etc...

Mais la nouveauté n'est pas dans les mots.

Le plus important, c'est que nous avons dû faire table rase de nos habitudes et de nos routines et accorder la plus grande place à l'imagination. Créer des modèles, plus ou moins bien adaptés, imaginer des situations plus ou moins « concrètes », essayer des méthodes d'approche diverses : l'imagination était notre raison sociale, en quelque sorte. Imagination au service de l'enfant, au service de notre métier. Au cours de nos stages, nous avons vu fleurir les idées les plus « folles », celles précisément qui font se gausser les partisans des mathématiques bien propres et bien léchées:: jeux de dés pour ajouter des entiers, le pavé au service de l'arithmétique, des cocottes en papier pour des bijections et des réseaux bizarres pour découvrir des groupes... que sais-je ?

Rien de nouveau ici dans le contenu, mais quelle mine pour faire comprendre l'approche d'une notion mathématique abstraite ! Après décantation, il nous restait je ne sais quelle richesse, quelle profusion de possibilités. Chacun trouvait une autre idée à son retour dans sa classe et la mettait en pratique, mais chacun avait pris conscience du fait que le plus important était de chercher et d'imaginer. Certes, tous nos collègues n'auront pas la possibilité de ces confrontations aussi larges ; mais dans un même établissement il sera possible de travailler ensemble, de briser l'isolement fait de timidité ou de méfiance, d'échanger des idées et des expériences.

Réformer les programmes ? Belle utopie si cette rénovation (ou plutôt cette mise à jour) ne s'accompagne pas d'un changement fondamental dans nos modes de communication avec nos élèves. A quoi bon enseigner demain un autre contenu, si c'est pour retomber après-demain dans les mêmes routines préfabriquées ?

Le programme est une matière inerte. Chacun en fait un peu ce qu'il en veut. Mais notre métier ne consiste pas à enseigner LA CHOSE qui est dans le programme : il est, à mon sens, d'imaginer des moyens d'approche de cette notion, de la faire sentir avant de la faire apprendre, de la faire comprendre plutôt que de la faire « réciter ».

Bien sûr, par manque de temps, par lassitude, les maîtres se tournent vers le manuel pour trouver des idées. Mais un manuel suivi de trop près conditionne un enseignement, plus que le programme. Un manuel doit être un tremplin pour l'imagination, non un corset. A cause des manuels, notre enseignement est trop souvent devenu l'enseignement de « ce qui est dans le livre », plutôt qu'une recherche d'approche des notions du programme.

Je formulerais donc le vœu que nos livres se renouvellent très souvent, qu'ils nous proposent des idées, des thèmes de réflexion, plutôt qu'un « cours » digéré et figé une fois pour toutes. Cela suppose aussi bien sûr une transformation assez complète de la conception de l'édition scolaire.

Pour finir, voici un autre point qui me tient à cœur.

Après ces deux années, on nous demande d'apporter des conclusions « objectives » sur ce qui a été fait, on nous demande si ce que nous avons fait est généralisable, on nous demande si des psychologues ont suivi de près nos « expériences », bref on voudrait nous faire dire si oui ou non cette expérimentation est réussie.

Cette question me semble tout à fait puérile.

Pour ma part je n'ai jamais fait de classes aussi passionnantes et jamais des enfants ne m'ont paru aussi intéressés par la mathématique : ce critère me semble tout à fait suffisant pour parler de réussite.

Auront-ils tout retenu l'an prochain ?

J'espère bien que non, mais intéressés cette année, ils auront pris goût aux maths et travailleront avec plaisir dans le même esprit. Et peut-être pouvons-nous espérer avoir ainsi plus de vocations scientifiques plus tard.

Quant à la généralisation, je ne vois pas pourquoi d'autres ne feraient pas ce que nous avons fait : dire le contraire serait tout de même avoir une bien piètre opinion de l'ensemble des collègues ! Nos élèves n'étaient pas spécialement des génies : nous enseignons pour tous, aucune sélection particulière ne présidait à l'organisation de nos classes.

Quant à l'avis des psychologues, je serais, bien sûr, content de le connaître. Mais cet avis « objectif » aurait-il une signification à ce niveau ? Que signifie l'objectivité en la matière ? Et si le psychologue dit que ça ne marche pas alors que l'enfant est passionné, qui faut-il croire : l'enfant ou le psychologue ?

Disons pour finir que « les mathématiques modernes », ça n'existe pas ! Tordons le cou à ce slogan qui sent la publicité. Bourbaki n'a pas de place en Sixième : c'est tout de même rassurant. Par contre, l'imagination doit y être reine.

R. G.

L'article qui suit a déjà paru dans Mathématiques en Sixième — Expérimentation et nouveaux programmes [*voir en 7.2 us 23*]. *Il nous paraît cependant utile de le reproduire ici avec l'aimable autorisation du service de la Recherche Pédagogique et de l'Auteur. Il précise en effet dans quelles conditions l'expérimentation a été organisée, au moins pour la première année de fonctionnement. Les renvois, dans cet article, aux autres études publiées dans le même recueil, n'ont pas été supprimées : dans une très large mesure, ils renvoient à d'autres articles du présent* Bulletin.

Bilan et avenir des expériences (67-68)

André REVUZ,
I.R.E.M. de Paris.

Au cours de l'année scolaire 67-68, une expérience concernant l'enseignement des mathématiques a été officiellement menée dans une cinquantaine de classes de Sixième. L'organisation de cette expérience a été confiée par Monsieur le Directeur de la D.P.E.S.O. au Département de la Recherche Pédagogique de l'Institut Pédagogique National.

Un des caractères les plus frappants du travail qui a été accompli à cette occasion est l'esprit d'équipe qui l'a animé, et je ne veux pas d'autre titre à tenter ici une synthèse des rapports plus détaillés que l'on trouvera plus loin que d'avoir été membre de l'équipe globale, réunion des équipes régionales, elles-mêmes réunion des équipes d'établissement. Il serait juste d'inclure dans ces équipes les chefs d'établissements qui ont tous été favorables, et souvent même enthousiastes, ainsi que les Directeurs et le personnel de ceux des C.R.D.P. qui ont apporté un soutien matériel et moral important à l'expérience.

Les équipes d'établissement se réunissaient en moyenne au moins une fois par semaine, et quelquefois plus fréquemment ; les équipes régionales se réunissaient au moins une fois par mois (certaines, une fois par semaine) ; des stages nationaux enfin à fréquence trimestrielle assuraient l'information mutuelle, la discussion des résultats obtenus et la préparation à plus long terme du travail. Les stages nationaux se sont tenus au Centre International de Sèvres, à l'I.P.N. et au C.R.D.P. de Grenoble.

Aucune hiérarchie formelle n'a prévalu au sein des équipes, et c'est bien naturel, car s'il y a discussion sur un point mathématique, ce n'est pas tel ou tel individu qui a le dernier mot, mais la mathématique elle-même, et si la discussion était d'ordre pédagogique, comme les divergences ne portaient guère sur les objectifs généraux, mais sur la manière de s'en rapprocher, la multiplicité des solutions qui peuvent être valablement envisagées sans qu'aucune puisse jamais prétendre être parfaite, aurait rendu intenable la position de quiconque aurait voulu imposer sans partage son point de vue. Cela ne veut certes pas dire que tout progrès pédagogique soit illusoire, ni que la pédagogie ne soit qu'un art, reposant uniquement sur l'intuition innée du professeur : la réflexion en pédagogie permet d'aboutir à des résultats positifs et transmissibles à autrui, elle permet de comparer les méthodes, même s'il est impossible de les classer selon un « ordre total ».

Il n'y a pas de groupe humain sans tensions internes et personne ne me croirait si j'affirmais qu'il n'y en eut point dans nos équipes, mais j'espère que l'on me croira lorsque je ferai part de cette constatation que dans la quasi totalité des cas, ces tensions se sont subordonnées à l'objectif commun et se sont organisées pour contribuer à la cohésion des équipes.

Les équipes n'étaient en général pas homogènes, et il faut plus s'en féliciter que le regretter ; les esprits plus lents ou les tempéraments plus prudents ont joué dans leur sein un rôle aussi utile que les esprits plus prompts ou plus hardis. Même les équipes les plus unies n'ont pas imposé de doctrine uniforme à leurs membres, et l'originalité de chacun loin d'avoir été étouffée me paraît au contraire s'être épanouie. Chacun trouvait dans l'équipe information et soutien ; la hardiesse d'esprit pouvait s'y donner libre cours puisqu'elle allait être contrôlée par les autres ; en revanche, une idée émise et peut-être jugée banale par son auteur pouvait être reprise et développée par un autre qui ne l'avait pas eue, mais qui en percevait peut-être d'autant plus facilement l'intérêt réel. La réflexion en commun permettait de procéder avec une hardiesse réfléchie, sans que la responsabilité dont chacun était consciemment investi ne soit lourde au point d'être inhibitrice.

Dans la diversité des comportements, il est saisissant de trouver chez tous le même enthousiasme qui a été favorisé par la confiance manifestée aux expérimentateurs chargés d'étudier l'application d'un programme en grande part nouveau, et très heureusement exprimée de manière publique par l'Inspection Générale lors du stage national initial. Cet enthousiasme a été renforcé et entretenu par les réactions des élèves : les classes expérimentales ont été des lieux où maîtres et élèves prirent plaisir, plus que jamais, à faire des mathématiques ensemble dans un climat de confiance réciproque totale.

La discussion sur la manière de présenter les matières à enseigner en imposait nécessairement l'approfondissement, et créait pour la « formation continue » des maîtres de l'équipe les meilleures conditions que l'on puisse imaginer.

Les professeurs engagés dans l'expérience ne disposaient d'aucun manuel relatif au programme à étudier ; en outre, ils avaient tous le désir d'instaurer un enseignement actif qui encouragerait au maximum l'initiative des élèves et permettrait à chacun d'eux de bâtir sa mathématique par sa réflexion personnelle sans cesse sollicitée, excitée et guidée. Le moyen utilisé a été la confection de fiches de travail, distribuées individuellement aux élèves, et leur proposant sous forme de questions et d'exercices simples l'étude progressive des divers aspects d'une situation. Une partie des rapports régionaux est consacrée aux problèmes de la confection et de l'utilisation des fiches, et un commentaire est consacré dans ce fascicule aux techniques d'utilisation des fiches. Je voudrais cependant insister ici sur certains points afin d'essayer d'éviter tout malentendu :

a) les fiches se sont révélées être un excellent outil, mais nul parmi nous ne les présentera comme une panacée excluant tout autre moyen.

b) leur élaboration exige un travail important, mais a pour premier avantage de donner un but concret à la préparation en commun de l'enseignement.

c) l'essai d'une fiche en classe a souvent fait apparaître des insuffisances de la première rédaction et a provoqué des remaniements quelquefois très importants. Certaines équipes ont utilisé l'intermédiaire d'une note critique à usage interne destinée à tenir compte des observations faites en classe et à préparer la rédaction ultérieure d'une fiche améliorée. Il faut souligner la souplesse du système : le remplacement d'une ou plusieurs fiches par de nouvelles jugées plus satisfaisantes sera toujours plus aisé que celui d'un paragraphe ou d'un chapitre d'un manuel.

d) l'utilisation d'une même fiche peut être extrêmement différente dans la classe et toutes les variantes ont été réalisées depuis le travail strictement individuel jusqu'au travail totalement collectif. La modulation de la part faite au travail rigoureusement individuel, au travail en petits groupes ou au travail fait en commun par la classe entière permet au professeur de faire varier l'atmosphère de la classe et de choisir pour chaque aspect d'une question la formule qui lui paraît la plus efficace : les phases d'exploration relèvent sans doute plutôt du travail individuel, les phases de conclusion et de mise en forme de l'acquis plutôt du travail collectif.

e) Une collection de fiches, provisoirement mises au point par une équipe demande de la part des professeurs étrangers à l'équipe qui l'utilise une étude préalable au moins aussi approfondie que celle d'un manuel. A cet effet, toute équipe devra, pour que l'on puisse plus facilement profiter de son travail, accompagner la série de ses fiches de commentaires détaillés. En outre, ceux qui les utiliseront ne devront pas les considérer comme des modèles intangibles qu'il n'y a qu'à suivre aveuglément : il est souhaitable, sinon indispensable, qu'eux aussi constituent des équipes et fassent une étude critique du matériel qui leur est fourni par les premières équipes et essaient, en s'aidant du travail déjà effectué, de rédiger à leur tour des fiches qui leur paraîtraient meilleures. Je tiens à réaffirmer à propos que ce serait à mes yeux une très grave illusion de croire à l'existence, en ces matières, d'une solution parfaite unique. Il n'y a pas de solution parfaite, il n'y a pas de solution unique meilleure que toutes les autres : le professeur doit disposer de méthodes variées, dont chacune a ses avantages et ses inconvénients, dont chacune peut se révéler éventuellement plus fructueuse avec certains élèves qu'avec d'autres. L'enseignement doit être une recherche continue.

Je n'ai rien dit jusqu'ici du contenu scientifique de l'enseignement, et c'est à dessein que j'ai d'abord insisté sur les aspects méthodologiques, mais je serais le dernier à prétendre que le contenu n'a qu'une importance mineure. Contenu et méthodes réagissent en fait l'un sur l'autre, et les expériences en classes de Sixième en ont offert un exemple frappant. Rappelons que le programme étudié a été très voisin de celui qui a été adopté par la Commission Lichnérowicz et qui entrera en vigueur en septembre 69. Enseigner la partie « moderne » de ce programme sans faire appel à des méthodes actives aurait abouti à la priver de ses vertus et à la réduire à une stérile leçon de vocabulaire, et l'on peut dire que la recherche d'un enseignement, valable à ce niveau, des notions concernant les relations a véritablement contraint les professeurs à un enseignement actif : l'activité des élèves précédant l'utilisation de la terminologie leur permettait d'être sûrs d'avoir suscité un comportement intellectuel autonome et de n'être pas tombé dans les pièges du verbalisme. Il faut noter que le vocabulaire s'introduit spontanément lorsqu'après le travail d'exploration, le groupe humain qu'est la classe prend conscience qu'il a acquis une idée nouvelle : avoir un terme pour désigner cette idée est alors une nécessité pour communiquer aisément à l'intérieur du groupe. Mais le terme, ou la notation, universellement utilisé (même s'il en existe des variantes qu'il faut signaler), sera alors facilemnt adopté, puisqu'il permettra non seulement de s'entendre aisément à l'intérieur du petit groupe qu'est la classe, mais aussi dans l'immense groupe du monde scientifique.

Les réactions des élèves ont confirmé cette évidence, — qu'il est piquant d'entendre quelquefois contester —, que les notions de base sont assez simples. En revanche, la réflexion des élèves étant en éveil, et le recours à l'apprentissage de recettes étant abandonné, les réactions des mêmes élèves ont confirmé cette autre évidence, que des notions « classiques » telles que celles qui concernent les mesures sont loin d'être simples. Il faudra en tirer la conséquence pour les programmes futurs : les questions concernant les mesures ont une importance capitale en elles-mêmes et par le fait qu'elles englobent le calcul des probabilités et contiennent le germe du calcul intégral. Elles ont droit à une place de choix dans l'enseignement du second degré et devraient être progressivement développées tout au long de ce dernier. N'en parler qu'en classe de Sixième, où il est difficile de le faire pertinemment, pour ne plus en parler jamais après, introduire la notion de probabilité sans montrer son étroite parenté avec celle de longueur, d'aire ou de masse, aborder le calcul intégral par le biais des primitives sont autant d'erreurs qu'il faudra abandonner.

Les questions classiques relatives à la numération ont bénéficié de la présentation « moderne », et l'introduction des entiers relatifs et de leur addition, là où le raccourcissement accidentel de l'année scolaire ne l'a pas fait sacrifier, a été effectuée très facilement.

Signalons enfin que de nombreuses classes ont disposé de machines à calculer de bureau prêtées par des constructeurs : presque tous les élèves se sont montrés enthousiastes. La dissociation opérée par la machine entre le mécanisme du calcul dont elle se charge et la réflexion sur ce calcul qu'elle laisse à la charge de l'utilisateur a imposé aux élèves une prise de conscience du sens et des propriétés des opérations usuelles. La crainte qu'ils oublient à cette occasion les « tables d'opération » s'est révélée vaine, car la plupart ont eu spontanément recours au calcul mental ou au calcul à la main pour les opérations simples que la machine n'aurait pas effectuées plus vite. La machine leur a donné l'occasion de prendre plaisir à manipuler du « numérique » et à y acquérir à leur niveau une maîtrise satisfaisante.

De nombreuses réactions d'élèves ont été consignées dans les rapports régionaux. Je les résumerai volontiers en disant qu'elles témoignent du fait qu'ils ont perçu la mathématique comme faisant l'objet d'une recherche, et ceci me paraît inestimable, car à quelque niveau que l'on s'élève dans cette science on n'y acquérera rien qu'au prix d'un effort de recherche. Une mathématique subie est décourageante, une mathématique trouvée (même avec une aide) est exaltante et est toujours mieux comprise. Et l'élève poitevine qui a déclaré qu'en mathématique il n'y avait pas de milieu et que ce qu'on y fait est, soit très facile, soit très difficile a candidement exprimé ce que dirait tout mathématicien s'il osait exprimer aussi naïvement sa pensée ; mais, il ajouterait aussi que son travail consiste à faire devenir très facile ce qui apparaissait à priori comme très difficile. Cette règle est valable à tous les niveaux.

Les réactions des parents suivent avec un certain déphasage celles de leurs enfants : ils sont d'autant plus favorables qu'ils ont été plus informés des objectifs généraux et des modalités d'application. Signalons qu'à Lyon avait été institué un cours de mathématiques pour les parents dont la fréquentation, évidemment bénévole, a été remarquablement nombreuse et assidue.

Une compte rendu n'aurait qu'un intérêt historique si sa conclusion n'envisageait à la lumière de ce qui a été fait, ce qui pourrait être fait et les problèmes qu'il faut s'efforcer de résoudre.

Les points qui me paraissent essentiels à cet égard sont les suivants :

a) *Poursuite des expériences :* les équipes qui ont travaillé en 67-68 en Sixième ont poursuivi le travail en Cinquième avec les mêmes élèves en 68-69. De nouvelles équipes, plus nombreuses que les précédentes ont engagé une expérience en Sixième en 68-69. L'objectif de cette extension était multiple : recueillir le plus de renseignements possibles sur les réactions des professeurs et des élèves aux nouveaux programmes, engager le plus grand nombre possible de maîtres dans la recherche pédagogique fondée sur le travail en équipes, créer des noyaux de maîtres autour desquels de nouvelles équipes pourront se former en 69-70 lors de la mise en application généralisée des programmes.

b) *Horaires dans les classes.* L'horaire des classes expérimentales était de 4 heures, dont 1 heure dédoublée s'adressait à la moitié de la classe. Cette disposition est étendue à toutes les classes de Sixième en 1969. Une augmentation d'horaire conduit à un changement qualitatif profond de l'enseignement : un enseignement actif exige que l'on laisse à l'élève tout le temps nécessaire pour qu'il réfléchisse posément et avance à son rythme propre. La double contrainte de respecter un horaire trop réduit et de traiter complètement un programme équivaut à la condamnation de tout enseignement actif.

c) *Programmes.* Il est certain qu'une cause importante de l'intérêt manifesté par les professeurs des classes expérimentales a été la nouveauté, au niveau où ils l'enseignaient, des matières du programme. On peut craindre que les effets d'une telle motivation ne s'atténuent assez vite : à cet égard, l'idée de programmes comportant un noyau minimal obligatoire, assorti d'options devrait être étudiée. Ce serait un moyen puissant d'éviter la sclérose qui menace tout enseignement étroitement déterminé, et de maintenir toujours vivant chez les professeurs l'esprit de recherche et l'enthousiasme indispensables à un enseignement de haute qualité.

d) *Travail en équipe.* Ce travail sur lequel j'ai insisté au début de ce rapport doit être poursuivi et amélioré : il faudra évaluer la taille optimale des équipes, la fréquence optimale de leurs réunions internes et de leur réunion avec d'autres équipes. Il faudra chercher les moyens de rendre leur travail aussi fécond que possible (diminuer les tensions, ou mieux peut-être les transformer en agents de stimulation et de collaboration).

e) *Expérimentation pédagogique et formation continue.* Il est apparu au cours des années passées que le travail en équipe était fécond tant sur le plan de l'expérimentation pédagogique que sur le plan de la formation continue des maîtres. Il y a lieu d'étudier avec la plus grande attention l'interaction de l'expérimentation et de la formation continue : la constatation que chacune a besoin de l'autre pour être véritablement efficace semble se dégager de plus en plus nettement.

f) *La suppression des barrières,* tant horizontales que verticales que tendent toujours à recréer la variété des titres universitaires et celle des enseignements a montré aussi sa fécondité. De même que travailler au sein d'une équipe ne constitue nullement un renoncement à son originalité, de même la collaboration des divers ordres ou espèces d'enseignement ne suppose pas entre eux de subordination, ni de renoncement à leur personnalité propre : en revanche, elle peut augmenter l'efficacité de chacun d'entre eux. Etendre cette collaboration doit être l'objet de nos efforts patients et persévérants.

Il faut spécialement surveiller les points de transition ce qui, en particulier, imposera dans un proche avenir d'informer les maîtres des Cours Moyens de l'enseignement primaire des transformations de l'enseignement du second degré.

g) *Les conditions matérielles du travail,* servantes trop souvent oubliées ou considérées comme mineures ont une importance — souvent irritante — mais capitale. Certaines équipes ont failli être paralysées faute de pouvoir résoudre facilement le problème technique de l'impression des fiches. Il est indispensable que tout établissement dispose d'un matériel et d'un personnel suffisants pour polycopier des documents. Des appareils tels que « vugraphes », projecteurs de films de 8 mm, dont l'intérêt pédagogique n'est pas niable devraient aussi se trouver en nombre suffisant dans tout établissement. Signalons encore l'intérêt d'une salle spécialisée, véritable laboratoire de Mathématiques et celui d'un aménagement des horaires des professeurs de mathématiques d'un établissement qui leur permettrait de consacrer une demi-journée par semaine à des séances de travail en commun. Je suis bien sûr que les chefs d'établissement sous les yeux de qui passeront ces lignes vont penser que je demande là des choses très difficiles ou impossibles à réaliser. Je connais leurs difficultés et il est bien sûr que des dispositions telles que celles que je préconise ci-dessus ne dépendent pas d'eux seuls : il faut qu'à tous les échelons, tous les efforts soient faits pour améliorer le rendement réel de l'enseignement, et que tous les grains de sable administratifs ou financiers qui bloquent trop souvent la machine soient partout éliminés.

Le mouvement qui dans le monde entier anime l'enseignement des mathématiques autorise de grands espoirs, mais ceux-ci ne seront réalisés qu'aux prix d'un travail long et difficile : les conditions fondamentales de sa réussite sont l'enthousiasme réfléchi et l'effort persévérant des professeurs. Le devoir de ceux qui dans chaque pays sont investis de responsabilités importantes dans le domaine de l'enseignement est de leur apporter une aide durable et éclairée tant sur le plan moral que sur le plan matériel.

A. R.

« Fuis les préceptes de ces spéculateurs dont les raisons ne sont pas confirmées par l'expérience. »

Léonard de Vinci.

On peut déplorer que les nouvelles équipes engagées dans l'extension des expériences en 68-69 n'aient pas bénéficié d'aussi bonnes conditions de travail que les équipes de l'année précédente. Certes, celles-ci jouaient un rôle de pionniers. Plusieurs stages étaient cependant prévus pour les nouvelles équipes : un seul eut lieu en septembre 1968, aucun n'est annoncé pour le prolongement de l'extension en Cinquième ; dans de très nombreux cas, les maîtres des nouvelles équipes n'ont bénéficié d'aucune aide pour le travail entrepris. L'administration de l'Education Nationale se défend de cette inconstance par des restrictions imprévues de crédits ; c'est une justification qui ne vaut rien car lorsqu'une tâche est entreprise, ne pas la poursuivre correspond à un gaspillage des dépenses investies.

Il est donc d'autant plus remarquable que les nouvelles équipes aient, malgré les insuffisances dénoncées, poursuivi l'expérimentation. Le cahier Mathématiques en Sixième *édité par l'I.P.N. ayant publié des comptes rendus sur l'expérimentation en 67-68, nous publions ci-dessous des notes sur l'expérimentation 68-69.*

Voici un premier rapport sur les Sixièmes du lycée Paul-Bert (Paris 14) par M^me^ BERRY *(la deuxième partie avec la collaboration de* M^lle^ BENEDETTI*).*

Au lycée Paul Bert

Écrit en janvier.

Le jour de la rentrée, la classe est nombreuse mais ne paraît pas trop dépaysée! Les élèves apprennent tout de suite qu'elles vont faire des mathématiques modernes; deux seules en ont déjà fait à l'école primaire.

Nous commençons ensemble à transformer le « questionnaire de rentrée » en questionnaire organisé où les renseignements seront portés sur une fiche perforée que gardera le professeur. Les élèves préparent sur leur cahier et sur la fiche le graphique des appréciations A, B, C, D qui remplaceront les notes, lors de travaux en classe rigoureusement personnels. (Ces fiches donneront lieu, plus tard, à de nombreux exercices sur les relations et les sous-ensembles.)

Nous introduisons ensuite les exercices sur les ensembles, appartenance ou non appartenance, comme un jeu puisque nous ne donnons pas de définition d'un ensemble ni d'un élément. Les élèves sont surprises mais non choquées. Les diagrammes de Carroll ou de Venn, toujours menés de front car le premier, en général, présente des difficultés pour beaucoup, pour deux ensembles à quelques éléments seulement leur demandent de la réflexion. Les exercices sur les blocs logiques en séances de manipulation par demi-groupes ne sont pas jugés tellement simples. Elles commencent à s'habituer à la précision, à l'emploi du terme exact, aux conjonctions *et*, *ou*, à la négation. Nous ne parlons pas de complémentaire.

Certains, peut-être inconsciemment parce que tout est trop nouveau, n'arrivent pas à placer les éléments dans ces diagrammes. Un moyen a été très efficace : poser les questions suivantes, pour deux ensembles, (en indiquant bien que l'ordre dans lequel sont posées les questions au départ est indifférent, et plus tard il n'y a eu aucune confusion).

Est-il dans A? $\left\{ \begin{array}{l} \text{oui} \Rightarrow 1 \\ \text{non} \Rightarrow 0 \end{array} \right.$

Est-il dans B? $\left\{ \begin{array}{l} \text{oui} \\ \text{non} \end{array} \right.$

10	11	A
00	01	
	B	

Ces exercices les ont ravies. La confiance est revenue, tout s'est éclairé, l'enthousiasme général a commencé. Les exercices de codage ont été étendus à trois puis quatre ensembles, avec des exemples divers. Les diagrammes pour quatre ensembles ont été demandés par certaines élèves qui paraissent aimer les difficultés. Dans les diagrammes de Carroll, les couleurs sont indispensables. Nous établissons aussi les arbres des oui-non à plusieurs questions et leurs applications ont eu un gros succès.

Les élèves manifestent une inquiétude à propos du calcul, et nous commençons à nous exprimer dans le système à base « main », en utilisant les caractères *a, e, i, o, u*, remplaçant 0, 1, 2, 3, 4. (J'ai développé, dans cette partie, le thème d'un groupe de travail à Sèvres en septembre 1968.) Nous avons avancé lentement, en commençant par le « stade maternelle » où on manipule et où on échange; les élèves ont seulement des cartons où sont dessinées les conventions pour ces échanges, elles sont très actives et comparent aisément leurs nombres de jetons. Puis vient le « stade cours élémentaire » avec les casiers (ou niveaux) pour finalement aboutir à l'écriture de position. Elles ont trouvé, en discutant assez longtemps entre elles, comment elles pouvaient écrire la suite naturelle des nombres *a, e, i, o, u*, ea, *ee, ei... uu, eaa...* Des élèves de Terminale du lycée venaient les voir pendant les travaux dirigés et un excellent exercice pour les enfants de Sixième était de leur expliquer ce qu'elles faisaient.

Dans ce système, avec cette écriture, elles ont fait les tables d'addition et de multiplication. Nous avons fait une « règle à calculer » pour additions qui a été instantanément utilisée pour les soustractions par les meilleures élèves. Cela a été pour elles une découverte extraordinaire.

Pendant les cours où elles sont réunies, elles travaillent avec des fiches individuelles, avec possibilité de comparer les résultats avec la voisine et de faire appel au professeur ou à toute élève qui a compris. Quelquefois, les discussions ont lieu par groupes, devant le tableau.

L'appréhension du début a disparu. J'entends souvent « c'est bien aujourd'hui », mais aussi « c'est peut-être un jeu, mais il n'est pas tellement facile ». Le soir, beaucoup de parents ont droit à la leçon du jour.

Le 19 novembre, à ma demande, elles notent rapidement leurs impressions. « Cette année, il faut comprendre; nous ne pouvons rien faire sans cela; rien ne se fait mécaniquement; il n'y a plus de leçons ou de règles à apprendre par cœur, même si elles ne sont pas comprises. Et puis, nous ne travaillons pas pour les notes, et nous sommes beaucoup plus libres de discuter de ce que nous n'avons pas compris. »

Nous commençons à cette date le travail en équipes de quatre ou six. La « secrétaire » doit remettre à la fin de l'heure le travail de l'équipe. Elles décodent le système à base cinq, elles travaillent aisément dans d'autres systèmes, même dans le système binaire sans que j'intervienne auparavant. Elles utilisent plusieurs méthodes de transformation d'un nombre du système décimal dans un système quelconque. Plusieurs d'entre elles savent prévoir le nombre de chiffres du nombre à trouver. Les quelques élèves de Terminale C qui assistent à leurs travaux d'équipe sont très surprises de leurs réactions. Elles m'apportent de précieux renseignements sur le comportement de certaines enfants, dont le caractère et l'activité se manifestent mieux loin du professeur.

Les exercices sur les lois de composition dans un ensemble de lettres, grâce à des jeux simples, les ont ravies. Elles ont bien compris la signification des parenthèses et leur importance avec des lois non associatives. Les exercices sur l'union et l'intersection de parties d'un même univers n'ont guère posé de difficultés. Dans les définitions d'ensembles en compréhension, nous avons introduit les inégalités strictes et larges; en général il y a peu d'erreurs.

Nous avons étudié quelques relations, mais d'une manière générale, elles n'aiment pas les diagrammes sagittaux car elles trouvent que les dessins deviennent vite « embrouillés ». Les tableaux ou les diagrammes cartésiens ont plus de succès. Elles aiment travailler sur des grands cahiers, même pour les exercices de contrôle, elles préfèrent le format 21 × 27. Elles collent les fiches sur une page et font les exercices sur l'autre.

Les parents vus fin décembre sont unanimes : toutes les élèves aiment ces mathématiques. Certains parents se recyclent, pas tous.

A la rentrée de janvier, elles ont, rapidement en classe, et par écrit, répondu aux questions suivantes.

1° Est-ce que le travail avec fiches vous plaît et pourquoi?

Réponse unanime : « oui; nous suivons mieux, nous avons en même temps les explications et les exercices. Quelquefois, nous pouvons avoir une fiche supplémentaire et nous ne nous ennuyons pas quand le travail normal est terminé ».

2° Aimeriez-vous mieux avoir un livre et voir le professeur faire un cours an tableau?

Réponse générale : « non; c'est plus clair avec des fiches et nous suivons exactement le professeur, même quand il explique pour tout le monde ». Une seule réclame un livre, car elle pourrait ainsi avoir d'autres textes d'exercices; une autre dit qu'avec le système de fiches, le professeur doit pouvoir « s'arranger » pour qu'une élève avance en fonction de sa force et non de celle d'une plus faible ou plus forte.

Beaucoup ne veulent pas de fiches toutes faites pour toute l'année, car elles trouvent qu'ainsi elles ne peuvent pas avoir d'idées. Elles préfèrent que le professeur les fasse suivant la classe.

3° Aimez-vous le travail en équipe? Aimeriez-vous travailler en équipe plusieurs fois par semaine?

Réponse générale : « oui, nous aimons travailler en équipe, nous pouvons discuter de nos idées, mais il faut que les équipes soient équilibrées, et que tout le monde travaille ».

Certaines, trop personnelles, n'aiment pas cette activité.

« Une fois par semaine suffit car nous n'avons pas assez d'heures de mathématiques (elles en ont quatre), et nous devons faire beaucoup de travail personnel.

« La secrétaire » trouve qu'elle ne peut pas travailler comme elle veut, mais que sa tâche est nécessaire, pour le contrôle du travail. Les timides arrivent mieux à s'exprimer dans un petit groupe et le professeur les voit sous un jour très différent.

Les mauvais caractères n'ont pas toujours la vie facile, car leurs camarades ne cèdent pas. Les discussions sont parfois très animées.

4° Quelle est votre impression générale depuis la rentrée?

« Nous avons appris à réfléchir, à observer, à organiser, à raisonner (à raisonner à fond disent certaines, et elles insistent). Le travail de cette année est très différent de celui de l'an dernier. Il nous est impossible de faire une comparaison. » Certaines ajoutent « c'est passionnant, et c'est tellement varié ».

Voilà les impressions générales d'un trimestre dans la classe de Sixième 1 du Lycée Paul-Bert, Paris (14e). Tout le monde travaille dans la joie, dans l'effort, commence à s'habituer à la rigueur du raisonnement, accepte ou cherche les difficultés. Déjà pourtant les différences de niveau apparaissent très nettement. Certaines posent des questions très pertinentes. Une partie de la classe réclame des fiches supplémentaires pour faire du travail à la maison le jeudi. Une seule s'adapte mal. Mais les préparations du cours demandent parfois une longue réflexion, d'autant plus que la classe est exigente et confiante.

Il faut tout de même préciser que cette classe, d'un avis unanime, est une bonne classe, active en toutes matières, même en gymnastique.

La deuxième classe de Sixième travaille avec les mêmes fiches, elle a un certain retard car dans l'ensemble et également en toutes matières elle réagit moins bien. J'ai donc noté des impressions personnelles, dans ma classe, mais je suis allée aussi dans l'autre classe et si les élèves sont un peu plus paresseuses ou lentes ou moins curieuses, elles s'adaptent bien au nouveau programme de mathématique.

Écrit en avril.

Pendant le premier trimestre, les élèves avaient abordé les notions sur les ensembles, intersection, union, les diagrammes, l'inclusion. Elles avaient aussi calculé dans les divers systèmes de numération. Ma classe surtout avait commencé à travailler en équipes.

Dès le début au second trimestre, nous abordons d'une façon plus systématique l'étude des relations. La notion de couple ne soulève pas de difficultés. Les relations sont fournies sous toutes les formes possibles. Les diagrammes, tous étudiés d'abord, sont ensuite laissés au choix de l'élève. Les plus timides, les moins sûres prennent en priorité le diagramme sagittal. Les relations binaires dans un ensemble sont les plus difficiles. Souvent, l'élève seule fait deux « patates » ou répète deux fois le même élément. La notion de réflexivité est la moins facile. Nous nous habituons tout de suite à poser les questions nous conduisant à l'étude. Les propriétés de réflexivité, de symétrie et de transitivité, ces mots sont introduits, à la demande d'un groupe de bonnes élèves, mais nous n'avons jamais utilisé le préfixe anti.

La partie la plus difficile, à propos de ces questions, est d'exiger de faire commencer toutes les élèves par : « pour tout » et de leur faire comprendre que la réponse « oui » ne peut avoir lieu qu'après l'examen de tous les cas. Je dois souvent recourir à cet argument : Je demande à trois ou quatre bonnes élèves si elles ont compris, et après leurs réponses « oui » je conclus : « Quelle chance, toute la classe suit! » Les protestations sont alors véhémentes.

Il est curieux de les voir réagir très différemment pour le « non ». Dans des relations telles que « est multiple de », à la question : Pour tout x, pour tout y, si x est multiple de y, est-ce que y est multiple de x? elles répondent : « Pas forcément, mais ça peut arriver. »

Nous avons mené de front le calcul et énoncé les propriétés des opérations : toujours définie, interne, commutative, associative. La notion d'élément neutre s'est dégagée de nombreux exemples et la nécessité de préciser « élément neutre pour telle opération » est apparue dès qu'un élément absorbant pour une autre opération s'est introduit. L'adjectif absorbant est préféré à singulier car il est beaucoup plus imagé.

Dans un travail par équipes, en séance de demi-classe, l'un des exercices proposé était : x et y étant des nombres entiers, que dire d'eux si $xy = y$? Vives discussions dans certains groupes; les unes disent que x est neutre pour la multiplication, donc $x = 1$ (il faut leur demander ce qu'est alors y); les autres disent que y est absorbant pour la multiplication, donc $y = 0$ (et x est ce qu'on veut). Il faut un arbitre pour leur dire que chacune doit envisager le raisonnement de l'autre et le précieux « ou » de l'union, bien compris, établit l'accord entre leurs opinions.

La distributivité de la multiplication sur l'addition, malgré le rappel de la formule bien souvent utilisée à l'école primaire à propos du périmètre :

$$P = (L + l) \times 2 = (L \times 2) + (l \times 2)$$

n'a pas été facile. De bonnes élèves ont trouvé difficiles les calculs sur des suites d'additions et de multiplications; la priorité de la multiplication a été comprise surtout après lecture à haute voix de beaucoup de cas.

Le calcul mental, le calcul bien organisé leur plaisent; là, il faut être actif, réfléchi, faire preuve d'initiative. Un jour où la classe entière était présente, deux élèves travaillaient au tableau noir, ou plutôt sur deux tableaux noirs. L'une avait employé une méthode très longue, l'autre très rapide. La critique, sans aucune indulgence, est venue de la classe, pour les deux méthodes d'ailleurs, plus sévère peut-être encore pour la deuxième. « Tu vas très vite, mais personne ne peut comprendre ce que tu fais; indique donc un calcul intermédiaire pour la compréhension. » Une troisième élève a proposé une solution encore plus élégante, mais quelques élèves seulement ont compris, et malgré mon intervention, la majorité ne se sent pas encore assez évoluée et ne retient pas cette méthode. Les multiples questions posées sont très intéressantes et parfois inattendues; combien de difficultés, insoupçonnées par le professeur, chez ces jeunes enfants sont ainsi vaincues, et il en restera bien pourtant encore.

Pendant les cours de calcul, certaines élèves apportaient une vraie règle à calculer. Fin janvier, nous avions au lycée une vraie règle à calculer de démonstration et, non sans hésitation, un jour en travaux dirigés par demi-classe, j'introduisis cette règle et l'accrochai au tableau noir. Une collègue de Physique était là et toutes deux, nous observions les enfants. Après quelques explications sur le moyen de faire une multiplication, les élèves comprennent : « C'est comme la règle à faire des additions, en base cinq. » Elles calculent seules 32×25. Inutile de leur expliquer comment se fait une division ! Ce sont tout de même les meilleures qui réagissent ainsi, et pendant que celles-là travaillent, les autres viennent demander pourquoi $32 \times 25 = 3{,}2 \times 2{,}5 \times 100$. Nous avons au lycée 10 règles à calculer du modèle le plus élémentaire, mais sérieux, et une récompense le mercredi ou samedi est de prêter une règle. Je n'insiste pas car l'usage de la règle à calcul n'est pas au programme de Sixième, mais il était impossible de refuser des explications.

Le travail en équipes est très apprécié ce trimestre, surtout quand il faut « débrouiller » une notion nouvelle, avec une fiche peu élaborée (celles que je trouve les plus difficiles à faire !). Quelquefois, les élèves indiquent par écrit leurs observations. « Le pire, dit l'une d'entre elles, c'est lorsqu'une élève n'a jamais aucune idée, ou alors lorsque dans un groupe de quatre, trois ont bien compris, et la quatrième qui n'a pas compris est têtue. Que de patience il faut alors ! » Souvent, la quatrième comprend, ou alors j'interviens, mais tout de même assez tardivement.

Deux fois dans le trimestre, elles ont travaillé en équipes et en auto-discipline. La première fois, le travail a été effectif et la discipline correcte. La deuxième fois, c'était lorsque nous étions à l'Institut Pédagogique National, avec tous les collègues ayant des classes de Sixièmes expérimentales. A l'I.P.N., on nous mettait en garde contre une mauvaise introduction à l'ensemble des entiers relatifs. Pendant ce temps, mes élèves, seules pendant une heure dans chaque demi-classe, avaient un premier contact, et mauvais, avec cet ensemble $\mathbb{Z}$. Voici en gros le sujet de cette fiche :

Dans un gratte-ciel à New-York, ou ailleurs...

- Dans une tour de 21 étages, se trouve, au milieu, un jardin suspendu et les étages sont numérotés : 0 au niveau du jardin ; $1\uparrow$, $2\uparrow$ ... vers le haut à partir de 0 ; $1\downarrow$, $2\downarrow$ ... vers le bas, toujours à partir de 0.

- Deux élèves A et B partant toujours de l'étage 0 montent en ascenseur, 4 étages, et à l'étage $4\uparrow$, A descend de l'ascenseur ; B continue et s'élève encore de 2 étages. A quel étage arrive B ? Nous écrivons $4\uparrow + 2\uparrow = \quad\uparrow$.

Il y a ainsi de nombreuses questions pour envisager tous les cas possibles.

- Devinette : que vaut x sachant que $9\uparrow + x = 1\downarrow$?

A mon retour au lycée, je trouvai les feuilles de chaque équipe rangées dans l'armoire comme prévu ; tous les exercices étaient faits, corrects, sauf dans une équipe où il y avait pourtant deux bonnes élèves. Sur beaucoup de feuilles, on voyait : $9\uparrow + 9\downarrow = 0\updownarrow$.
Sur l'une : $9\uparrow + 3\downarrow = 6\uparrow$. Il est « choquant » d'avoir à faire une addition et finalement d'être obligée de faire une soustraction.

Les énoncés des règles s'y trouvaient, parfois bien dits. Et pourtant, il y avait eu beaucoup de bruit !

Au cours suivant, pendant le travail de synthèse, les élèves m'expliquaient comment le bruit était apparu, provoqué par la discussion des exercices, car les réponses étaient différentes.

La bonne élève de l'équipe n'ayant rien compris me dit : « Madame, vous nous dites que A et B vont à l'étage $4\uparrow$, puis que B monte encore deux étages, et vous nous demandez de compléter : $4\uparrow + 2\uparrow = \quad \uparrow$. Moi, je n'ai pas pu répondre, car $2\uparrow$ représente pour moi le numéro d'un étage. Cependant, je comprends bien comment on fait ces additions! »

A la fin de l'heure, une de ses camarades propose : « Quand nous numérotons les étages, nous pouvons mettre les signes devant les nombres; quand nous indiquons le nombre d'étages montés ou descendus, nous mettons les signes après les nombres; ainsi, il n'y aura aucune confusion possible et nous pourrons garder le problème de l'ascenseur. »

Un autre jeu a été envisagé : Gymnastique et mathématique.

Les élèves sont réparties en 3 équipes, A, B, S. Chaque équipe comprend un nombre pair de joueuses. Chaque élève prend un carton.

Les élèves de l'équipe A écrivent A_1, A'_1; A_2, A'_2..., etc.

Celles de l'équipe B marquent B_1, B'_1; B_2, B'_2..., etc.

Celles de l'équipe S, S_1, S'_1; S_2, S'_2..., etc.

Règle du jeu: Dans chaque équipe, les élèves dont les cartons portent le même numéro sont l'une derrière l'autre. Seules celles qui ont le carton portant l'indication *prime* bougent. Les autres servent seulement à marquer le point de départ.

Les élèves évoluent *parallèlement à l'un des murs de la cour;* elles regardent le professeur P.

1° P commande : *6 pas à gauche* (votre gauche) : A'_1, A'_2, A_3, etc., font donc 6 pas à leur gauche; l'équipe B ne bouge pas; S'_1, S'_2, etc., exécutent 6 pas à leur gauche.

2° P dit ensuite, par exemple : *8 pas à droite;* l'équipe A reste immobile, B'_1, B'_2... exécutent 8 pas à leur droite et S'_1, S'_2... aussi.

But. — Les élèves de l'équipe S qui ont bougé deux fois doivent donner leur position par rapport à leurs coéquipières. Toutes les équipes comprennent que

$$6g + 8d = 2d.$$

Tous les ordres possibles sont donnés. Les élèves de l'équipe S devront aussi écouter les deux ordres et, après réflexion, occuper leur position finale.

Observations: Les élèves des deux classes de Sixième étaient ensemble, l'une n'avait pas traité le problème de l'ascenseur; les autres ont fait immédiatement l'analogie entre les deux jeux.

Nous avons, en classe, présenté sous forme de dessins, avec des couleurs différentes, les pas à droite ou à gauche, à partir de positions initiales diverses, et non sur une même droite. Les additions sur ces nombres n'ont offert aucune difficulté.

Les élèves ont cherché des exemples de nombres, températures, dates. Mais à propos des dates, une protestation, car il n'y a pas d'année zéro.

Un autre jeu leur est proposé : Sur une feuille de papier quadrillé, vous portez : droite, gauche; bas, haut. Vous partez d'un point A au croisement de deux lignes; vous devez suivre uniquement les lignes dans l'une ou l'autre des deux directions. Vous comptez, par exemple, 4 « carreaux » à droite (notés $4d$), vous marquez B, puis à partir de B vous comptez 5 carreaux vers le bas, vous notez C.

Au couple de points A et C, soit (A, C), vous faites correspondre le couple $(4d, 5\downarrow)$.

En répétant des constructions analogues à celle-là, vous définissez une relation entre l'ensemble des couples de certains points du plan et l'ensemble des couples de nombres, notés d ou g, $\uparrow$ ou $\downarrow$:

1º vous construisez des points avec d'autres couples;

2º vous vous donnez des points, vous cherchez les couples, etc.

Ce jeu est un devoir de vacances pour jours de pluie.

L'étude de $\mathbb{Z}$ sera poursuivie au troisième trimestre. Elle n'a soulevé aucune difficulté, beaucoup moins que les additions et multiplications dans $\mathbb{N}$. Le reste du programme nous attend. La classe est toujours aussi vivante, active, curieuse. Il faut résister à l'envie de faire plus qu'on ne doit, il ne faut pas spécialiser, il ne faut pas décourager les moyennes en faisant avancer trop rapidement les bonnes. L'autre classe est bien adaptée aussi, un peu plus lente mais les notions essentielles semblent bien assimilées.

Mme B et Melle B.

Écrit en juin.

Dans nos deux classes, l'ensemble $\mathbb{Z}$ a beaucoup de succès; nous utilisons des notations variées : $\downarrow$, $\uparrow$; d, g, $^+$, $+$. Si nous devions adopter une seule notation, nos élèves, *à une très forte majorité*, nous demandent les signes $\uparrow$, $\downarrow$.

Dès que les ouvrages de Sixième nous parviennent, nous les confions à nos élèves et celles-ci nous font part de leurs réflexions personnelles. Les premières observations indiquent que souvent les livres sont trop touffus, trop compliqués, qu'il y a trop de mots dont elles ne savent pas bien le sens (mots qui n'appartiennent pas au langage mathématique). C'est regrettable que dans les livres, les auteurs introduisent tant de notions qui sont du programme de Cinquième. Les enfants de Sixième sont pourtant très sensibles à la rigueur, à la clarté, mais il faut des phrases qui ne soient pas, pour elles, exprimées en français trop compliqué. S'il y a trop d'exercices, elles sont aussi troublées, car elles ont une impression pénible... Toutes savent pourtant bien nous faire part de leurs difficultés, et les professeurs comprennent de temps en temps pourquoi tant d'élèves se sont détournées des mathématiques, dès leur plus jeune âge! Il suffit d'avoir la patience de les écouter, de réfléchir à tout ce qu'elles peuvent dire et de penser qu'elles nous apprendront beaucoup au sujet de la pédagogie. Ne soyons pas si ambitieux (mais restons très rigoureux)!

Mme B.

L'équipe de Lorient, sous la plume de son animatrice, Mme RIOU, *nous adresse un rapport très critique:*

A Lorient

Le travail de l'équipe des professeurs.

Sept professeurs (six certifiés et un agrégé) constituent à Lorient l'équipe E des « mathématiques en Sixième », équipe souvent renforcée par la présence de Mlle DELAVAULT, professeur à la Faculté de Rennes, et d'un conseiller d'orientation scolaire.

Le bilan de nos séances de travail hebdomadaire est incontestablement très positif. L'ordre du jour, immuable — ce qui n'excluait nullement les digressions sérieuses ou distrayantes — comportait trois titres :

1° Critique des fiches utilisées pendant la semaine, étude des réactions des élèves;

2° Discussion et mise au point des projets de fiches préparées par les éléments de sous-ensembles de E (de cardinal 1 ou 2);

3° Schéma général des fiches à préparer pour la réunion suivante.

Titre 1. — Ici, l'apport du conseiller d'orientation scolaire a été fondamental. Spectateur attentif et intéressé, il a fréquemment suivi le travail des élèves pendant les heures de classe et ses analyses des réactions des enfants nous ont été précieuses.

Chacun expose les difficultés rencontrées dans sa classe et elles sont nombreuses, surtout au cours des premiers mois :

— Les enfants sont souvent bruyants, agités; l'adaptation au travail par fiche est difficile et certaines heures de travail ont un bien maigre bilan;

— Faut-il intervenir pour toute la classe, interrompre le travail par groupe pour apporter quelques éclaircissements sur un point qui paraît difficile à plusieurs?

— Comment pouvons-nous tout vérifier? Une solution correcte sur le cahier dit « cahier d'essai » est souvent mal recopiée.

Voici, après de nombreuses discussions et de nombreuses tentatives, les réponses apportées à ces questions dans notre équipe :

— Il faut accepter un certain fond sonore et se résigner à une progression très lente au début; dès le second trimestre, l'amélioration du travail est sensible.

— Les enfants n'aiment pas être interrompus dans leur recherche. Chacun d'eux, ou chaque groupe, suivant les cas, avançant à son propre rythme, une intervention du professeur intéresse au plus le tiers de la classe : elle est évidemment inutile pour ceux qui ont dépassé ce stade et les retardataires n'en tirent aucun profit : ils sont aux prises avec une autre difficulté, celle-ci sera rencontrée plus tard et l'explication, écoutée d'une oreille distraite, sera oubliée. Il faut donc que le professeur aide un ou plusieurs groupes en peine, quitte à reprendre cinq ou six fois la même explication donnée à mi-voix.

— La vérification des cahiers d'essai est insuffisante. Il faut s'astreindre à un contrôle régulier des cahiers. Mais un problème subsiste : les erreurs relevées sur le cahier doivent être corrigées, l'enfant n'aime pas ce travail, il le fait de mauvaise grâce chez lui. On peut le lui imposer en classe, lors des séances de travail par demi-classe où la surveillance est plus facile. Mais ce sont aussi les heures où le travail de recherche est le plus fructueux et où le professeur peut récupérer les élèves les plus lents. Doit-il les consacrer partiellement à vérifier si les corrections ont été faites et sinon à exiger qu'elles le soient sur le champ?

Titres 2 et 3. — La rédaction définitive et l'élaboration des projets de fiches donnent lieu à des échanges très intéressants qui débordent largement le problème étudié. C'est un véritable recyclage permanent pour toute l'équipe dont chaque membre est soumis à la critique — amicale mais sans concession — des autres. Un désaccord sur un point — de détail semble-t-il d'abord — oblige souvent à élargir le débat. Puis, l'habitude est prise, les discussions débordent le cadre des fiches et plus d'une fois nous avons été entraînés à l'étude de points difficiles des programmes du second cycle.

Ici apparaît une condition fondamentale de la bonne marche de l'équipe des professeurs : c'est l'homogénéité. Il faut que chacun puisse apporter sa contribution à la discussion, participe à l'élaboration de la fiche, se sente responsable du travail réalisé. En ce sens, la création, envisagée par certains, d'équipes de professeurs de C.E.G. n'ayant suivi aucun recyclage, animées par un professeur certifié ou agrégé, nous paraît très dangereuse, dans la mesure où les collègues, mal à l'aise sur des théories qui ne leur sont pas familières, hésiteraient à discuter les suggestions et les projets de l'animateur. Or, l'expérience démontre combien la discussion est enrichissante pour tous et combien est difficile la rédaction d'une fiche qui reste cependant loin de la perfection.

Étude d'un paragraphe.

Prenons un exemple : l'étude de la réunion. Au cours d'une séance de travail des professeurs, un premier plan est élaboré :

— Une première fiche introduira la notion nouvelle, la définira, en donnera les représentations (diagramme de Venn et Caroll appelés respectivement pour les élèves en patate et en tableau carré). Un tableau d'appartenance mettra en évidence les triplets 1, 1, 1; 1, 0, 1; 0, 1, 1; 0, 0, 0 pour A, B, $A \cup B$.

— Une deuxième fiche consacrée aux exercices : on y rencontrera, sans qu'elles soient dégagées et systématiquement étudiées, quelques propriétés $A \cup \varnothing$; $A \cup B$ si $B \subset A$; associativité...

— Une troisième fiche, complémentaire, destinée aux élèves rapides, abordera des exercices plus difficiles.

Les rédactions provisoires des trois fiches sont confiées à trois équipes de deux collègues et la semaine suivante les projets sont discutés, les fiches rédigées en commun sous une forme acceptée par tous.

Le jour J, toute la classe est prête à aborder l'étude de la réunion. Avant de distribuer les fiches, le professeur accorde vingt à vingt-cinq minutes à une présentation orale. Nous avons utilisé des cartes perforées, fiches de renseignements remplies au début de l'année par les élèves (est né en 1957, a un frère au moins, déjeune au lycée... et même « parle couramment le breton »). Elles permettent à l'enfant de fixer une image claire de la réunion à laquelle il se reportera souvent par la suite. Commence alors le travail, individuel ou par groupe selon le choix de chacun, période éprouvante, sinon exténuante, pour le professeur qui doit vérifier les résultats de l'un, corriger un autre, dépanner un troisième et en même temps maintenir dans des limites raisonnables les manifestations de triomphe de celui qui a vaincu une difficulté ou les discussions acharnées d'un groupe sur la solution d'un exercice. Chacun avance cependant à son rythme, les plus rapides feront une ou deux fiches supplémentaires jusqu'à ce que tous aient terminé les deux fiches fondamentales.

La classe entière est alors reprise en main pour l'élaboration d'une récapitulation notée sur le cahier (et si 9 classes ont travaillé sur les mêmes fiches, les 9 récapitulations ont toutes leur caractère propre et leur originalité).

L'étude de ce chapitre a demandé environ 4 heures, soit deux semaines, car il est mené de front avec des exercices de numération. Un devoir — de fréquence bihebdomadaire — fait en classe permet de vérifier les acquisitions.

Voici un exemple de devoir proposé après l'étude de ce chapitre sur la réunion.

1er exercice : Dans l'univers U des entiers naturels compris entre 1 et 35 considère les ensembles suivants :

$$M = \{5, 12, 27, 32, 15\}$$
$$N = \{7, 32, 8, 12\}$$
$$P = \{3, 27\}$$

1° Écris en extension les ensembles : $M \cup N$; $M \cup P$; $N \cup P$.
2° Fais le diagramme en patate.
3° Cherche dans l'univers U :
— un ensemble X tel que $M \cup X = M$,
— un ensemble Y tel que $N \cup Y = Y$,
— un ensemble Z comportant 3 éléments tel que $P \cup Z = \{10, 2, 3, 27\}$ et écris alors $P \cap Z$.

2e exercice : L'univers est constitué par les noms des mois de l'année; on désigne par E l'ensemble des noms des mois de 31 jours, par P l'ensemble des noms des mois commençant par la lettre « m ».
— Écris P et E en extension. Quelle remarque peux-tu faire?
— Cherche $P \cup E$.
— Fais le diagramme en tableau carré.
— Écris en extension le complémentaire F de l'ensemble E dans l'univers étudié et forme $E \cup F$.

Résultats : Sur une classe de 27 élèves

note	[20, 18[	[18, 16[	[16, 14[	[14, 12[	[12, 10[	[10, 8[	[8, 6[	[6, 4[	[4, 2[
effectif	2	7	3	5	3	2	1	2	2

médiane 14

Remarques. — Les élèves disposent d'une heure pour traiter ce devoir. Le 2e exercice a, dans l'ensemble, été moins bien traité que le 1er à cause surtout de la notion de complémentaire qui, ne figurant pas au programme de la classe, n'avait pas été étudiée de façon systématique, mais seulement rencontrée au cours d'une fiche.

Quelques remarques sur le programme.

Maintenu aussi strictement que possible dans ses limites, le programme a été presque terminé : restent les deux chapitres du paragraphe « mesures » : masse et durée.

Titre I. — Relations : il ne nous semble pas raisonnable de développer ces notions et d'atteindre relations d'ordre, relations d'équivalence en émaillant l'exposé des symboles d'implication ou même d'équivalence logique. L'enfant a déjà tendance à utiliser, dès le début, le symbole d'appartenance comme signe de sténo ; on imagine facilement quel usage il ferait de $\Rightarrow$ ou $\Leftrightarrow$.

Titre III. — Etude d'objets géométriques ou physiques donnant lieu à mesures. C'est la partie du programme qui nous a posé le plus de problèmes et nous a donné le moins de satisfaction.

Les problèmes : faut-il considérer qu'il s'agit d'une première approche de la notion de mesure ? Il nous a semblé que cette interprétation nous mènerait très loin et après de longues discussions nous avons convenu d'attribuer deux rôles à ce paragraphe : amener les enfants à revoir et préciser leur vocabulaire sur les objets géométriques ; les entraîner à des calculs numériques sur les décimaux.

Nous n'avions pas, pour autant, levé les difficultés ! Il fallait choisir ce vocabulaire, il fallait choisir l'écriture des unités. Nos choix sont résumés en ces trois phrases :

la mesure, en centimètres, de la frontière du carré est 28 ;
la mesure, en centimètres, du segment AB est 7 ;
la mesure, en centimètres-carrés, du carré est 49.

Il serait trop long de résumer ici les discussions qui nous ont conduit à supprimer les mots « longueur », « aire ». Mais nous souhaitons vivement qu'un débat s'instaure et que tous les collègues accordent le même sens... au mot « carré » et à bien d'autres (bandes, polygones...).

Peu de satisfaction... Nous avons tous vu l'enthousiasme des enfants décroître. Autant ils étaient capables d'imagination et de réflexion sur les parties nouvelles du programme, autant ils étaient, ici, étouffés par des vieux mécanismes qui émergeaient, et refusaient tout effort. Ceci ne s'appliquant, bien sûr, qu'aux élèves moyens ou faibles qui avaient gardé de mauvais souvenirs du calcul ! Nous sommes donc arrivés à cette conclusion : ce paragraphe est trop long pour qu'il puisse être abordé sous un nouvel éclairage, mais la méthode que nous avons choisie le rend peu passionnant pour les enfant et bien décevant pour leurs professeurs.

Quelques statistiques sur l'expérimentation à Lorient.

Neuf classes, soit 269 élèves, ont expérimenté les nouveaux programmes. Sept de ces classes appartiennent au même établissement, le lycée Dupuy de Lome, groupe féminin, et représentent toutes les Sixièmes de type I et II de ce lycée.

Ages: 50 % nés en 1957, 25 % en 1956, 25 % en 1958.

Résultats: en pourcentages :

	1er trimestre	2e trimestre	3e trimestre
$x \geqslant 14$	41	48	44
$x \leqslant 7$	7	6	9

Commentaires : Le second trimestre est centré sur l'étude des relations, jugée facile par 95 % de l'effectif, d'où la progression sensible. Le problème des mesures, abordé au troisième trimestre, rencontre beaucoup moins d'enthousiasme. Il est classé sous la rubrique « pas très facile » par 47 % des élèves et l'intérêt porté aux entiers relatifs (facile pour 94 %) ne suffit pas pour maintenir le niveau du second trimestre. La méthode de travail par fiches est jugée plus attrayante que la méthode traditionnelle par 93 % des enfants, mais 27 % d'entre eux marquent une préférence pour le travail individuel.

M^{me} R.

Voici maintenant une expérience en milieu rural. De la part de son équipe, M. PUYGRENIER *nous rend compte du travail accompli.*

A Montmorillon

Les cinq divisions de Sixième du C.E.S. de Montmorillon, *y compris* la *Sixième III ancienne transition,* ont appliqué le programme expérimental. Les élèves ne sont pas sélectionnés, le recrutement du C.E.S. portant sur tout le secteur. D'autre part ils proviennent d'un milieu *rural* assez défavorisé.

Les élèves sont répartis en *groupes mobiles de niveau* qui ne sont pas les mêmes en mathématique et dans les autres disciplines : un enfant peut être en groupe 3 en mathématique et en groupe 1 en français. La répartition dans les groupes a été faite à partir des résultats scolaires en CM2 et des *tests* passés dans l'école d'origine en fin de CM2 avec le concours des conseillers d'Orientation Scolaire et Professionnelle de Poitiers.

L'équipe des enseignants en Mathématique, professeurs de collège, certifiés, maîtres de transition est regroupée *dans sa totalité* en section locale de l'Association des Professeurs de Mathématique qui se réunit tous les mercredis après-midi. Cette réunion est *prévue dans l'emploi du temps,* tous les maîtres qui enseignent la mathématique à *quelque niveau que ce soit* n'ont pas cours le mercredi après-midi. L'équipe des cinq professeurs expérimentateurs (deux professeurs de collège, deux certifiés, un maître de transition) s'occupe de la rédaction des fiches et du déroulement du programme suivant un schéma classique : discussion pour dégager les grandes lignes d'un chapitre, rédaction de fiches par un collègue, puis critique collective de cette fiche, mise au point par un autre collègue et enfin nouvelle critique après utilisation.

Nous ne nous sommes pas contentés de rédiger les fiches en commun. La disposition des salles, toutes groupées, et le fait qu'une personne étrangère au Lycée (assistant en Faculté des Sciences de Poitiers) a pu avec l'accord de l'Administration venir de temps en temps prendre une classe en main, nous a permis d'aller dans les classes les uns des autres, (toutes les divisions de Sixième ont mathématique en même temps).

Nous avons renoncé à tout cours magistral. Les élèves travaillent par groupes de quatre, les tables sont placées face à face.

De plus, nos fiches ont été *conçues pour le travail de groupe.* Elles appellent *la discussion* et demandent aux enfants de dégager eux-mêmes, dans *chaque groupe,* les concepts et même *l'énoncé* de ces concepts.

Schéma d'étude d'une question :

1° *Travail individuel :* des fiches présentent à *chaque* élève du groupe de quatre, quatre situations *différentes* de la même notion à introduire.

2° *Travail collectif :* a) Etude par le groupe d'une situation nouvelle. b) La fiche suivante demande aux élèves de faire *ensemble la synthèse* des différentes situations et d'énoncer éventuellement les définitions correspondantes. c) La fiche suivante apporte le *vocabulaire* et propose l'étude d'un exercice *collectif* qui va servir de première fixation.

3° *Travail individuel* (mais possibilité de travail collectif si nécessaire). Fiches donnant de nombreux exercices d'application.

4° *Travail strictement individuel :* fiche test de contrôle d'acquisition de la notion.

Sur un exemple précis voilà ce que donne ce schéma ; étude des relations de E vers F : nous voulions obtenir le classement application, non-application, bijection. (Les numéros correspondent au schéma précédent).

1° *Chaque* élève du groupe de quatre, à partir de *cinq* histoires doit établir sur une fichette les représentations sagittales et cartésiennes (recto-verso) des cinq relations, puis indiquer dans le coin gauche de la fichette le nombre de flèches partant de chaque élément de l'ensemble de départ.

2° *a) b)* les vingt fichettes sont mises en commun et la consigne est la suivante : « classer les relations en deux parties ».

c) la fiche apporte le vocabulaire « application », « non-application », les élèves collent les fichettes correspondant à « non-application » de façon qu'il soit possible de lire recto-verso.

a) b) reprise collective des fichettes restantes. Classement en deux groupes après indication du nombre de flèches arrivant à chaque élément de l'ensemble d'arrivée.

c) Vocabulaire : « bijection ». Chaque élève colle les dernières fichettes.

3° Les fichettes classées sont retournées et il faut caractériser chaque catégorie sur la représentation cartésienne. Exercices sur applications et bijections.

4° Test.

Que fait donc le professeur ? Son rôle est alors celui d'un animateur. Il intervient *à la demande* et surtout n'apporte jamais directement la réponse mais à l'aide de questions et de précisions supplémentaires permet aux élèves de trouver la solution. Il doit *dialoguer* au maximum avec chaque élève ou avec chaque groupe. Il ne nous semble pas que le « dialogue » avec la division entière soit particulièrement intéressant et surtout bénéfique. En fait, il n'y a plus de distinction à faire dans le travail, cours, travail dirigé, travaux pratiques (comme il semble que l'indiquent les Instructions officielles). En classe de mathématique c'est *toujours du travail dirigé.*

L'atmosphère de la classe est très détendue malgré l'effectif très élevé (35 élèves pour les divisions 1-2-3). Les élèves prennent eux-même la fiche n + 1 dès que la fiche n est terminée. Les différents groupes ne sont pas tous au même niveau en même temps, *chaque groupe de quatre est autonome* et chaque élève est *solidaire* de son groupe. Pour éviter que chaque groupe soit isolé dans la division, de *nombreux changements ont été effectués* soit à l'intérieur de la division, soit entre les divisions.

Pour éviter une trop grande dispersion, tous les groupes se retrouvent ensemble avant d'aborder la notion suivante. Il est facile de l'obtenir par le jeu d'exercices supplémentaires. Nous avons beaucoup utilisé les jeux et manipulations (blocs logiques, matériel multi-bases, cartes, etc...) à la grande joie des enfants.

Dans l'ensemble, les élèves sont *très heureux* de venir en classe de mathématique ce qui est nouveau. Nous pensons que les manipulations, les jeux, le travail sur fiches et par groupe, l'attrait de la découverte par soi-même, la liberté laissée dans l'organisation du travail nous ont permis d'atteindre ce résultat. Le plus important pour nous est que, dans chaque division, l'opposition à la mathématique ou au professeur *n'existe plus.*

Le programme a été dans l'ensemble traité. Certaines questions « limite » (relations dans un ensemble et propriétés par exemple) n'ont été traitées que par les groupes les plus rapides. Toutefois ce programme nous semble *déjà trop important pour l'ensemble des élèves de Sixième.* Le chapitre consacré à la mesure est à restreindre, d'autant plus qu'il semble coupé du reste.

Notre progression a été établie sur *deux ans* (Sixième-Cinquième). Nous n'avons ainsi aucun *redoublement* en Sixième. Si nécessaires, les redoublements interviendront en fin de Cinquième.

Enfin nous n'avons pas rencontré d'opposition véritable de la part des parents d'élèves.

M. P.

Voici un témoignage sur l'attitude des parents, dans un lycée où des classes expérimentales avaient fonctionné en 1967-68.

A Marseille-Veyre

Cette année, dans les classes de Sixième, l'adaptation semble avoir posé moins de problèmes que l'année dernière ; ceci pour deux raisons. La première, c'est que ce n'était plus le début d'une expérience semblable dans l'établissement, et la plupart des parents étaient sensibilisés à cette forme d'enseignement. La seconde, et peut-être la plus importante, est que l'Administration de l'établissement a pu organiser tout à fait au début de l'année une réunion d'information pour tous les parents d'élèves de Sixième, au cours de laquelle M^{me} la Directrice a rassuré les familles au sujet des « risques » encourus par leurs petits dans la poursuite de l'expérience... A l'issue de cette réunion, un ou deux parents, dont les enfants ne faisaient pas partie des classes expérimentales, ont posé la question de savoir comment les enfants suivant un enseignement traditionnel des mathématiques, pourraient combler ce qu'ils considéraient maintenant comme un handicap.

Certains parents d'élèves participant à l'expérience avaient d'ailleurs devancé la réunion et avaient demandé à la Direction du Lycée de changer leur enfant de section car à l'école primaire, celui-ci s'avérait médiocre en calcul et qu'ils pensaient que ces mathématiques n'étaient compréhensibles qu'à des sujets exceptionnellement doués. Déçus de l'insuccès de leur démarche, ils ont fait contre mauvaise fortune bon cœur et ont suivi les cours d'initiation réservés aux adultes qui sont assurés par un professeur de l'établissement. Une maman témoigne, à la petite réunion de fin d'année, des progrès de son enfant dans cette discipline qui était sa bête noire.

M. Cayssials.

A Clermont-Ferrand

1. — L'expérience en 1968-1969.

Cette année, quatre classes de Sixième expérimentales ont fonctionné dans notre Académie. Deux au Lycée Mixte de Montferrand, dirigées par M^{lles} Deramoudt et Cognet ; deux au Lycée Blaise-Pascal, dirigées par M^{lle} Becamel et M. Braquemond. M. Braquemond coordonnait les travaux de cette équipe. Ces classes ont été contrôlées par M. Bretagnolle, Inspecteur Pédagogique Régional. M. Perol, Maître Assistant, assurait le contact avec la Faculté des Sciences.

Durant cette première année de fonctionnement, l'équipe a limité ses ambitions à l'expérimentation pure et simple :

1° Du programme de Sixième établi par la « Commission Lichnerowicz » qui sera généralisé à toutes les Sixièmes à la rentrée d'octobre 1969.

2° De la méthode de travail par fiches.

2. — Le programme.

Les observations de l'équipe confirment celles qui ont été exprimées par d'autres expérimentateurs au cours de divers stages auxquels nous avons pu participer, notamment au stage de Lyon auquel M. Braquemond nous représentait.

Certains paragraphes du programme passent parfaitement : par exemple, celui, entièrement nouveau, des relations. D'autres paragraphes présentent une certaine difficulté notamment la mesure et la numération. Or, ces paragraphes reprennent des notions déjà utilisées par les élèves à l'Ecole Primaire. Il est alors difficile de les intéresser à des choses qu'ils croient bien connaître. Pourtant, ils n'en ont qu'une connaissance mécanique non raisonnée ; il en résulte leur incapacité d'utiliser ces notions d'une manière créatrice. Un nouveau progrès sera fait lorsque la réforme atteindra l'enseignement du Premier Degré ; car c'est presque au début de l'Ecole Elémentaire que le codage des cardinaux doit être enseigné en y consacrant tout le temps nécessaire et après avoir introduit successivement, avec le langage convenable, les correspondances bijectives entre ensembles et la notion de cardinal.

3. — *La méthode d'enseignement par fiches.*

1° Elle a été pratiquée en utilisant les fiches GALION. L'expérience en a montré l'efficacité. Tous les élèves sont actifs à de rares exceptions près.

Certes, la différence de vitesse de travail est mise en évidence ; mais la méthode traditionnelle, loin de la supprimer, ne fait que dissimuler cette différence ; c'est la source de nombreux échecs et blocages. Pour occuper les élèves les plus rapides, divers moyens se présentent :

a) les dernières questions de chaque fiche peuvent leur être réservées.

b) des fiches plus difficiles, qui vont plus loin, peuvent leur être proposées après avoir traité parfaitement les fiches normales. Les fiches GALION permettent ces utilisations.

c) la libre recherche, enfin, peut offrir aux meilleurs, la possibilité de développer leurs aptitudes les plus intéressantes.

2° Un jeu de fiches peut être adapté plus facilement que le livre au niveau de la classe : il suffit de remplacer quelques fiches par d'autres, polycopiées par le maître. C'est un avantage très sérieux. Par contre, si les élèves écrivent sur les fiches, elles ne pourront servir qu'une seule année. Les règlements actuellement en vigueur ne permettront pas d'inclure le jeu de fiches au nombre des quatre livres payés par l'établissement, mais rien n'empêchera de reporter le crédit sur le livre d'une autre discipline.

3° Il importe enfin de souligner, pour répondre à des arguments mal fondés, que, loin d'interdire l'usage des fiches, les instructions officielles insistent au contraire sur la totale liberté du maître dans le choix de sa méthode.

4. — *Les diverses rencontres.*

1° Confrontation des quatre professeurs qui, dans une réunion hebdomadaire, comparaient le rythme d'avancement de leur programme, les réactions de leurs élèves, leurs appréciations sur le matériel utilisé, la rédaction et le contenu des fiches.

2° Confrontation interacadémique au cours de réunions ou stages à Lyon ou à Paris. L'expérience a permis surtout de préparer de nombreux maîtres de notre Académie à enseigner le nouveau programme. Les professeurs des quatre classes expérimentales ont assisté M. l'Inspecteur Général Magnier au cours des deux journées académiques qui rassemblaient une trentaine de professeurs des quatre départements. M. Braquemond et Mlle Becamel ont accompagné M. Bretagnolle, Inspecteur Pédagogique Régional, à Aurillac et à Moulins où ils ont présenté les nouveaux programmes aux professeurs de Sixième du Cantal et de l'Allier. Divers professeurs sont venus participer aux réunions de coordination hebdomadaires mentionnées plus haut. Un certain nombre de débats ont été animés par des membres de l'équipe.

3° Signalons encore :

— Une séance du jeudi de la Régionale de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (une trentaine de participants) ;
— Une séance au C.E.S. de Saint-Eloy-Les-Mines, une séance au C.E.S. de l'Avenue Charras ;
— Une séance pour les parents d'élèves du C.M.2 de Clermont-Ferrand organisée par l'Association Laïque des Parents d'élèves de Clermont.

Le manque de temps et de moyens financiers a empêché les membres de l'équipe de prendre des initiatives et aussi de répondre à certaines invitations (par exemple au C.E.G. du Mayet-en-Montagne).

5. — *Conclusions.*

1° Toutes ces activités de coordination et de diffusion des résultats constituent, pour les professeurs, un lourd surcroît de travail qu'est loin de compenser la décharge de service d'une heure qui leur est accordée.

2° Les expérimentateurs ont estimé le terrain d'expérience (4 classes) trop exigu. Ils suggèrent que, pour des prochaines expériences, le nombre de classes engagées soit plus important.

3° L'existence d'un I.R.E.M. (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) à Clermont permettrait, entre autres choses, une collaboration et une information incomparablement meilleures dans notre Académie.

M. Bretagnolles,
Inspecteur Pédagogique Régional.

M. Perol,
Maître Assistant,
Faculté des Sciences.

A Nancy

(Extrait d'un rapport sur quatre classes de Sixième, année 1968-69)

Organisation du travail de l'équipe des professeurs.

Une réunion hebdomadaire dont la durée était, au minimum, deux heures.

Ces réunions avaient pour buts :

— d'harmoniser le rythme du travail dans les différentes classes ;
— de définir un programme minimum ;
— de rédiger des fiches communes à toutes les classes, lorsque nous étions d'accord sur la façon de présenter les questions.

Or, nous avons vite constaté que, les réactions des élèves étaient différentes d'une classe à l'autre. Les exercices à traiter ne pouvaient donc être les mêmes, tant du point de vue de leur difficulté que de leur nombre. C'est pourquoi, chaque professeur a, dans une assez large mesure, conservé son autonomie et préparé des fiches personnelles d'exercices. Nous pensons que la standardisation n'est pas de mise en ce domaine, il est préférable avant tout, de travailler pour sa classe et avec elle.

Cependant, la réflexion en commun sur les différents aspects du programme, fût pour chacune d'un grand intérêt et d'un profit certain. Toutes les informations échangées sur les réactions des élèves face aux diverses méthodes de travail proposées, ainsi que l'enthousiasme variable qu'elles manifestaient envers les multiples exercices, nous ont permis de dégager un certain nombre d'idées que je vais essayer d'exposer maintenant.

Tout d'abord, nous voulions nous rendre compte si, le programme proposé était effectivement réalisable dans l'année scolaire, objectif fixé à Strasbourg par M. l'Inspecteur Général Magnier. Il nous était, dès lors, impossible de consacrer trop de temps à certaines questions. Nous avons, dans l'ensemble, respecté notre plan, sauf sur la partie réservée à l'étude des objets géométriques, où nous nous sommes laissées entraîner un peu trop loin.

Nous étions également résolues à tenir le plus grand compte de l'âge de nos élèves, et par conséquent, à limiter nos ambitions mathématiques à ce qu'elles avaient envie et possibilité de faire, elles.

Conduite de la classe.

Nous avons essayé le travail uniquement par fiches. Nous n'étions pas douées pour cette forme d'activité, car nous n'avons pas obtenu de résultats satisfaisants.

Tout d'abord, le travail des élèves était très lent. Nous répondions à de nombreuses questions individuelles, qui, trop souvent, se ressemblaient. Ceci nous paraissait une perte de temps.

Il nous est apparu clairement qu'au début de l'année de Sixième, les élèves ne savent pas toujours lire un texte tout en comprenant le sens de ce dernier. Nous avons alors utilisé les fiches différemment :

1° fiches introduisant une notion nouvelle à partir d'exemples et d'exercices : nous les remettions aux élèves et le premier travail effectué était le commentaire détaillé du texte fait avec toute la classe. En cours d'année, le commentaire est devenu plus succinct, et la part d'initiative laissée aux élèves s'est augmentée.

2° fiches de synthèse et de contrôle : remises après un travail oral et collectif.

Cette participation orale des élèves nous semble essentielle. Elles s'habituent, peu à peu, à exprimer leurs idées pour leurs camarades. Les questions posées permettent de découvrir le travail de réflexion qui se fait dans l'esprit de l'élève et de juger si, en définitive, la notion présentée est comprise ou non.

Quant au travail des élèves par groupes, la disposition de nos salles de classe permettait le travail commun de deux voisines, sans exclure cependant des échanges plus larges. Pour ma part, ayant laissé aux élèves entière liberté de choisir leur associée, j'ai constaté que les groupes variaient tout au long de l'année, certaines préférant même le travail individuel. D'ailleurs, la manière dont ces groupes évoluent, fournit au professeur de précieuses indications.

Cependant notre libéralisme à l'égard des élèves n'était pas total. Nous nous sommes efforcées d'obtenir d'elles une rigueur certaine dans l'expression tant orale qu'écrite. Ceci nous a conduites à faire retenir, après les avoir abondamment illustrées, quelques définitions comme celles relatives aux opérations sur les parties d'un ensemble. C'est un effort dont la plupart des élèves sont capables et cela les aide ensuite à bâtir leurs raisonnements sur des bases solides. Or, beaucoup de nos élèves oubliaient vite. Il a donc été indispensable de retrouver, tout au long de l'année, les idées de base du premier paragraphe du programme.

Dans quel esprit avons-nous traité le programme ?

Nous avons pensé qu'il n'était pas souhaitable de se laisser influencer par le titre « Relations » du paragraphe 1. C'est pourquoi nous avons présenté assez tôt dans l'année, après six semaines de cours environ, les premiers exemples de relations. Nous sommes d'ailleurs arrivées très vite à des exemples numériques, en liaison avec l'introduction des représentations graphiques. Il ne nous paraît pas indiqué de multiplier les exemples tirés de la vie courante car, ils sont souvent artificiels et bâtis pour les besoins de la cause. Nous avons donc limité volontairement les exemples de ce genre et n'avons pas étudié les relations pour elles-mêmes, mais plutôt en pensant à leur utilité pour l'étude des autres parties du programme, à commencer par le paragraphe : nombres naturels.

A propos de ce paragraphe, et, particulièrement en ce qui concerne le contrôle du sens des opérations, nous avons mis l'accent sur l'utilisation des différentes opérations pour résoudre des problèmes simples d'ordre pratique. J'insiste sur ce point car, il ne semble pas avoir retenu l'attention de nombreux professeurs ayant participé à l'expérience et dont nous avons eu l'occasion de connaître les idées grâce aux émissions de télévision. Nous avons constaté que certaines élèves effectuaient, un peu au hasard, des opérations sur les nombres donnés par l'énoncé du problème. Il nous semble qu'elles sont arrivées en Sixième sans idée précise du fait suivant : addition et soustraction d'une part, multiplication et division d'autre part, sont des opérations inverses. Il est souhaitable de s'assurer non seulement de l'acquisition de la technique, dans l'ensemble satisfaisante, mais aussi du lien établi par les élèves, entre les manipulations réalisées sur certains objets et les opérations correspondantes sur les nombres associés à ces mêmes objets. La partie du programme consacrée à l'étude des objets géométriques et physiques donnant lieu à mesures offre de nombreux exemples de telles situations qu'il serait peut-être bon d'exploiter.

Nous avons également, lors de l'étude de ces objets géométriques, établi la liaison avec les notions concernant les ensembles, introduites en début d'année. L'idée d'ensembles infinis de points est intéressante à présenter en classe de Sixième, bien qu'elle soulève, parfois, quelques difficultés. Je voudrais signaler, à ce propos, qu'il peut être dangereux d'utiliser des représentations d'ensembles sous forme de diagrammes de Venn. Des précautions s'imposent en ce domaine. En effet, ce mode de représentation crée, dans l'esprit de certains élèves, une confusion au moment où l'on introduit les domaines plans.

C'est surtout dans cette troisième partie du programme qu'il est intéressant de montrer à nos élèves que la mathématique que nous leur présentons n'a rien de révolutionnaire, mais n'est, en fait, qu'effort d'unification et de simplification.

Pourquoi ne pas leur dire : D1 et D2 désignant deux domaines plans, la relation aire D1 + aire D2 = aire (D1 $\cup$ D2) + aire (D1 $\cap$ D2) n'est qu'une traduction d'un raisonnement fait depuis toujours par le simple bon sens. Proposons alors aux élèves un petit problème relatif à des superficies de champs et rédigeons-le sous ces deux aspects : celui du notaire chargé de la vente et celui de l'élève de Sixième très fière d'utiliser son savoir tout neuf sur les ensembles.

Si nous donnons des exemples du même ordre à l'occasion de l'étude des longueurs et des volumes, elles se rendront compte que l'idée de départ est la même et, si en Sixième, elles sont un peu jeunes pour mesurer tout l'intérêt du point de vue adopté, espérons qu'il n'en sera pas de même plus tard. Si mathématiser les situations peut être une excellente chose, perdre contact avec le réel serait navrant.

Concernant les mesures, il nous semble possible de construire des instruments de mesure. Nous avons insisté sur cette construction dans le cas des longueurs, l'unité étant arbitrairement choisie. Les élèves ayant compris le principe ont alors imaginé très facilement des instruments adaptés à la mesure des secteurs angulaires (ou de leur amplitude ?). La méthode s'étend sans difficulté aux aires. Dans le cas des volumes, surgissent des obstacles d'ordre pratique. Ce procédé nous a permis également d'expliquer la notion d'encadrement et la nécessité d'affiner l'instrument de mesure.

N'oublions pas, non plus, la construction de figures géométriques faisant intervenir les différents instruments dont disposent les élèves : double-décimètre, équerre, compas... La classe de Sixième paraît toute indiquée pour cet apprentissage manuel développant les qualités d'attention et de soin. La figure une fois construite, réfléchir, découvrir tous ses aspects, tous les renseignements indispensables à la solution de la question posée, est un travail des plus instructifs.

Tout ceci concernant le troisième paragraphe du programme peut paraître bien long. Nous souhaitons voir notre plaidoyer en faveur de cette partie géométrique, injustement sacrifiée, entendu des collègues. Nous reconnaissons volontiers, que l'étude des relations est parfois plus amusante et nous ne songeons nullement à nier son intérêt.

Ceci dit, nous pensons avoir consacré trop de temps à cette partie géométrique du programme, certaines d'entre nous ayant attaché trop d'importance aux problèmes liés à la vie courante. Je ne dirai rien des autres parties du programme, bénéficiant de la sollicitude générale. Je souhaite seulement que la sagesse de tous nous permette d'établir un juste équilibre.

J. GIES,
Lycée Jeanne-d'Arc, Nancy.

Le printemps en Auvergne...

Voir p. 281

2

F.P.M.

F.P.M. = Formation Permanente des Maîtres.

De même que l'A.D.N., l'acide désoxyribonucléique est porteur, dans la cellule vivante, de toute l'information génétique, la F.P.M. est le nerf de la réforme.

Ce qu'elle a été, ce qu'elle est devenue, ce qu'elle deviendra: G. W. en avait amorcé la présentation aux Journées d'études de Besançon (5 juin 1969).

Des informations sur les I.R.E.M.

Des exemples du travail qu'on y fait, même quand l'administration de l'Éducation Nationale n'a pas les crédits pour en créer.

Passé et avenir des I.R.E.M.

Gilbert WALUSINSKI

Pour corriger deux propositions fausses qui ont été formulées, savoir : 1° après quatre mois de fonctionnement, les I.R.E.M. sont en déficit ; 2° la seule tâche des I.R.E.M. est de recycler les professeurs, pour corriger ces deux propositions d'actualité (*), il faut revenir brièvement sur le passé.

(*) Exposé prononcé aux Journées d'étude de Besançon, le 5 juin 1969.

1. Le passé.

Quand l'A.P.M.E.P. reprit son activité, après 1945, des conférences organisées par notre collègue CROZES, au lycée Henri-IV, sous la dénomination générale « Axiomatique et Redécouverte » permirent à des mathématiciens tels que H. CARTAN et G. CHOQUET de présenter des exposés qui, en général, ont été publiés dans le Bulletin. En même temps, un groupe de professeurs intéressés par les « classes nouvelles » se réunissait à Sèvres, sur l'initiative de M[lle] DIONOT et se préoccupait surtout de l'enseignement au premier cycle.

Les cycles réguliers de conférences organisés en commun par la Société Mathématique de France et l'A.P.M. ont commencé en 1956, grâce à l'initiative de G. CHOQUET. Rappelons le succès, inattendu pour certains, de la première conférence de Henri CARTAN sur les structures algébriques. Les conférences, publiées dans le *Bulletin,* ont fourni la matière de plusieurs volumes. *Structures algébriques et structures topologiques* (épuisé), *Problèmes de mesure* (monographie de l'*Enseignement Mathématique*), etc.

Le cours assuré bi-mensuellement par A. REVUZ de novembre 1960 à mai 1963 a donné lieu, grâce à la précieuse collaboration de M[me] G. REVUZ pour la rédaction, à la publication des trois volumes du *Cours de l'A.P.M.*

On notera que pendant les années correspondantes, de 1956 à 1965, l'Education Nationale, je veux dire l'administration, sans doute trop occupée par ailleurs (en particulier à mettre au courant une dizaine de ministres successifs), ne faisait *rien* pour l'information des maîtres. De là, entre nous, un conflit toujours ouvert : ou bien les maîtres attendront que l'administration se décide à consacrer des crédits et du temps, à mobiliser un certain nombre de personnes pour la formation permanente (et alors le travail de formation permanente sera légalement inséré dans le service des maîtres), ou bien les maîtres eux-mêmes organiseront à leurs frais, par leurs propres moyens, leur formation permanente. Chaque solution présentait ses dangers : la première, celui de remettre toute réforme aux calendes grecques (et les spectateurs du film « Z » savent que la dictature n'aime pas les « mathématiques modernes »), la seconde, celui de permettre à l'administration de prolonger son sommeil, le travail se faisant sans qu'elle ait à délier la bouche ni la bourse. Chaque solution présentait ses avantages : la première que nous n'avions rien à faire qu'à attendre, la seconde que nous avions tout à faire donc toute liberté d'action.

Est-ce cette dernière raison qui a poussé la majorité des collègues de l'A.P.M. à faire comme s'ils préféraient la seconde solution ? Peut-être ; il y avait aussi, j'en suis profondément persuadé, le sentiment que notre devoir pédagogique nous imposait ces efforts. Egalement l'idée astucieuse que si nous prenions l'initiative, nous aurions l'avantage d'être « bien placés » pour fournir à l'Education Nationale une ou des solutions (des principes d'organisation et des personnes qualifiées pour les mettre en pratique) lorsque celle-ci se réveillerait. Car, entre temps, l'A.P.M.E.P. essayait de la réveiller.

Nous n'y sommes pas complètement parvenus. Mais la création de la Commission Ministérielle dite « Commission Lichnérowicz » (C. L.) en janvier 1967 par M. FOUCHET n'est pas sans liaison avec le travail préparatoire depuis 1965 d'une commission « Recherche et Réforme » dont le rapport (voir *Bulletin* 257 de mars 67) proposait la création des I.R.E.M. Le premier rapport de C. L. (*Bulletin* 258 de juin 67) reprenait l'essentiel du projet A.P.M. en atténuant cependant son étendue (pour nous, il était évident qu'il devait y avoir un I.R.E.M. par académie et qu'il avait mission de gérer l'enseignement des mathématiques « de la Maternelle aux Facultés ») et son caractère démocratique (conseils d'administration élus).

La *Charte de Chambéry,* rédigée en janvier 1968 et adoptée par l'assemblée de l'A.P.M.E.P. en avril, fixait le plan-calendrier de la réforme que nous souhaitions en faisant de la création des I.R.E.M. la pièce motrice de la machine.

En fait, il était important d'obtenir une première création. Or d'avril 1967, date de rédaction du rapport C. L. à juillet 1968, le Ministère ne fit rien. Il faut donc reconnaître que la création de trois I.R.E.M. décidés en août 1968 est due au mouvement de mai 1968.

2. Les trois premiers.

Les I.R.E.M., Instituts de Recherche sur l'Enseignement Mathématique, de Paris, Lyon et Strasbourg, créés en août 1968 ont fonctionné à plein à partir de janvier 1969. Leur mise en place, de septembre à décembre 1968, a exigé de ceux qui en ont eu la charge, un travail accablant d'administration dans des conditions déplorables (et qui l'étaient d'autant plus que certains administrateurs et certains professeurs, même dans l'enseignement supérieur, ne comprenaient pas leur nécessité).

De là cette allusion, faite plus haut, à un « déficit » dans le budget des I.R.E.M. Les auteurs de cette perfidie montrent leur ignorance des conditions de travail des I.R.E.M. durant cette première année. Pensez que l'Education Nationale proposait à l'I.R.E.M. de Paris de « recycler » en 68-69 deux cents personnes, 80 % des crédits alloués étant prévus pour des remboursements de frais de voyage. C'était assimiler les I.R.E.M. à des agences S.N.C.F. pour privilégiés (200 pas plus). Alors que plus de 1 500 maîtres ont suivi, de janvier à juin 1969 plus de mille séances de trois heures d'information mathématique et de discussion pédagogique (grâce en particulier au dévouement de plusieurs dizaines d'agrégibles).

Quatre objectifs ont été fixés aux I.R.E.M. : 1° participer, en liaison étroite avec les facultés qui les hébergent, à la formation initiale des maîtres ; 2° animer, organiser la F.P.M. ; 3° animer l'expérimentation pédagogique ; 4° assurer la publication de documents utiles pour les trois premiers secteurs d'activité.

Sans pouvoir avec précision dresser le bilan pour l'I.R.E.M. de Paris aux travaux duquel j'ai participé dans la mesure de mes moyens, je peux témoigner des résultats pour le moins encourageants obtenus sur les points 1, 2 et 4. Des séminaires sur l'enseignement de la logique et celui de la mesure se sont réunis. Une création comme celle du G.E.F.E.M. (Groupe d'Etude des Futurs Enseignants en Mathématiques) est indépendante de l'I.R.E.M. mais a trouvé dans celui-ci les conditions favorables à l'initiative de ses fondateurs. Enfin si le point 3 n'a pas été traité, c'est faute de temps et d'hommes alors que les expériences continuaient à être gérées par l'I.P.N. en liaison avec l'I.R.E.M.

[Je renvoie plus loin le lecteur à la note de DUVERT sur l'I.R.EM. de Lyon].

Enfin, il ne faut pas oublier que là où l'administration n'a pas créé d'I.R.E.M., il existe soit dans le cadre des C.R.D.P., soit en étroite (très étroite) liaison avec les Régionales de l'A.P.M., des I.R.E.M. clandestins qui n'attendent que la décision ministérielle pour s'officialiser et recevoir enfin des crédits qui leur manquent cruellement. Exemples : Caen, Poitiers, Clermont, Bordeaux,... J'en oublie. Le conflit « action-revendication » rappelé ci-dessus n'a pas trouvé sa solution.

3. Demain et après-demain.

Deux problèmes très différents se posent à l'A.P.M.E.P. pour les I.R.E.M. :

1° *Obtenir leur multiplication.* L'objectif reste « un I.R.E.M. par académie ». Bien sûr, nous savons ne pas pouvoir tout obtenir d'un coup et tout réaliser. M. Edgar FAURE a accepté le principe de quatre nouveaux I.R.E.M. à la rentrée 69 : Besançon, Bordeaux, Marseille et Rennes. C'est un minimum ; à la cadence de trois ou quatre par an, il faut attendre encore cinq ans pour réaliser la généralisation. Ce n'est pas beaucoup, c'est trois ans de trop.

Comment l'A.P.M.E.P. pourra-t-elle faire pression sur l'E.N. pour obtenir ces créations ? Toutes les Régionales intéressées feront bien d'en discuter.

2° *Empêcher la sclérose administrative.* Il faut éviter à tout prix que les I.R.E.M. ne deviennent des machines à papier. Les Régionales A.P.M.E.P. ont certes vocations pour talonner les I.R.E.M. et leur montrer qu'ils n'auront jamais accompli toutes leurs tâches.

D'après ce que j'ai vu ou vécu au cours de cette première année, je me permets de présenter les suggestions suivantes :

a) développer, dans chaque I.R.E.M., les séminaires permettant la collaboration des maîtres en exercice avec les étudiants n'ayant pas achevé leur formation initiale ; cela permettrait d'associer plus étroitement au travail des I.R.E.M. tous ceux qui participent à des expériences (alors que l'I.P.N. s'est révélé incapable d'encadrer les Sixièmes expérimentales en 68-69 et de préparer les Cinquièmes de 69-70) ;

b) assurer une liaison entre les divers I.R.E.M., liaison d'autant plus utile qu'il est certainement préférable de laisser chaque I.R.E.M. libre de ses initiatives ;

c) prouver par toute son action que l'I.R.E.M. anime la F.P.M. et devient par conséquent le moteur permanent de la réforme : gestion et contrôle des expériences, animation des équipes de maîtres au travail dans les établissements, préparation des grands thèmes d'étude qui peu à peu remplaceront les textes de programmes au style des inventaires de PRÉVERT (avec la poésie en moins).

Car après-demain, quand les I.R.E.M. auront partout fait leurs preuves, pourquoi ne prendraient-ils pas en main la complète gestion pédagogique de notre enseignement ? Il dépend de tous ceux qui les animent aujourd'hui de préparer avec audace des réformes plus profondes que celle d'une ligne de programme.

G. W.

Chaque I.R.E.M. a été laissé libre de l'organisation de ses tâches. Louis Duvert nous donne des précisions sur les travaux de l'I.R.E.M. de Lyon. Nous donnons ensuite la liste des documents élaborés et, à titre d'exemple, l'un d'eux, sur un sujet qui intéresse tout le monde.

A l'I.R.E.M. de Lyon

La structure des I.R.E.M. n'a pas été codifiée par des textes pour l'instant; les trois premiers I.R.E.M. représentent une sorte de stade expérimental.

A Lyon, une quinzaine de formateurs (professeurs du Secondaire et assistants ou maîtres-assistants du Supérieur) ont obtenu une décharge correspondant en principe à un demi-service; ils conservent un demi-service d'enseignement habituel.

Dans l'Académie de Lyon, 450 collègues (enseignant dans les C.E.G., C.E.S., Lycées, C.E.T.) se sont inscrits et se sont engagés à suivre régulièrement les séances.

L'I.R.E.M. s'est donc fixé comme objectif prioritaire de contribuer à la F.P.M. Les séances sont hebdomadaires, durent trois heures, et ont lieu le jeudi ou le samedi après-midi selon les groupes, dans des locaux choisis de manière à imposer aux professeurs des déplacements aussi faibles que possible (un défraiement est accordé à ceux qui sont contraints à des déplacements importants). Ces locaux se trouvent à Lyon, Bron, Bourg-en-Bresse, Roanne, Saint-Étienne, Villefranche-sur-Rhône.

Trois niveaux ont été distingués : premier cycle (11 groupes) destiné à la formation théorique nécessaire pour enseigner le nouveau programme de Sixième; second cycle, 1^er^ niveau (2 groupes) en vue du nouveau programme de Seconde; second cycle, 2^e^ niveau.

L'équipe des formateurs rédige des documents comportant des questions, des exercices, des thèmes de réflexion. Chaque document est distribué une semaine à l'avance, étudié individuellement par les collègues, commenté et discuté en séance, soit collectivement, soit par petits groupes de cinq ou six personnes, sous la conduite d'un formateur. Au cours des discussions sont abordées les questions d'ordre pédagogique. En particulier, dans les groupes du premier cycle, les formateurs sont pour la plupart engagés dans l'expérience pédagogique lancée par l'I.P.N. en 67-68 pour une durée de quatre ans dans le premier cycle (expérience que l'I.R.E.M., dans la région lyonnaise, a prise en charge). Ils peuvent donc faire état de l'enseignement qu'ils donnent dans les Sixièmes et Cinquièmes expérimentales (en particulier de la méthode par fiches).

On évite en principe le cours magistral; on travaille par équipe : équipe des formateurs, groupes de travail, parfois équipes de maîtres enseignant dans un même établissement. L'atmosphère est active, le ton est celui de la contestation amicale...

Il est prévu, pour les maîtres qui suivent les séances, une décharge de trois heures hebdomadaires. En fait, pour cette année : d'une part, le Ministère n'a pour l'instant accordé qu'un nombre de décharges inférieur au nombre des inscrits, et de plus le statut des maîtres de C.E.G. crée des difficultés en matière de décharges; d'autre part, du fait que l'I.R.E.M. n'a commencé à fonctionner qu'en janvier, il a été matériellement impossible d'assurer des décharges effectives; elles se traduiront par une rétribution en heures supplémentaires.

Bien des problèmes restent à régler :

— décharge effective de trois heures hebdomadaires pour tous les maîtres qui suivent les séances, y compris les maîtres de C.E.G.;

— augmentation du nombre des formateurs qui ont actuellement fort à faire;

— moyens matériels accrus (secrétariat, bibliothèque, etc.);

— extension à la formation continue des instituteurs;

— création de nouveaux I.R.E.M. (un par Académie) et mise au point de leur statut;

— création d'instituts analogues pour les autres disciplines, car l'A.P.M.E.P. se garde de tout « impérialisme des mathématiques ».

L. D.

Publications de l'I.R.E.M. de Lyon.

Pour obtenir ces publications, s'adresser à M[me] Pieri, secrétaire de l'IREM, 43, bd du 11-Novembre-1918, 69-Villeurbanne.

Documents établis pour la formation permanente des maîtres du premier cycle :

1, 2, 3 sur les ensembles; 4, 5 les relations; 6, 7 algèbre des parties d'un ensemble; 8 équivalence et ordre; 9, 10, 11, 20 fonctions et applications; 13 lois de composition; 14 monoïdes; 15, 16 groupes et structures; 17 $(\mathbb{Z}, +)$; 18 groupes et isomorphisme; 19, 20, 21 pour l'enseignement de quelques éléments de logique; 22 l'intérêt de la géométrie et les défauts de son enseignement actuel.

Documents pour les maîtres du second cycle :

1, 2, 3 espaces vectoriels; 4, 5 géométrie affine; 6 les angles; 7 à 13 topologie générale; 14 espaces métriques euclidiens; 15 à 18 relations; 19 lois de composition; 20 homomorphismes; 21 groupes; 22 algèbre des ensembles et application caractéristique; 23 connecteurs et quantificateurs; 24 théorie des ensembles.

Document 14 de la série 1.

Monoïdes

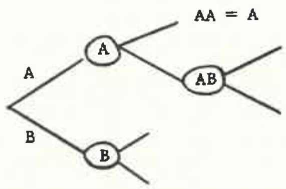
André Myx

1. Un jeu de mots.

Avec les deux lettres A et B, nous allons former des mots. Par exemple, AB, BA, AABA..., sont des mots. De même, A, B sont des mots.

Donnons-nous une règle : Deux lettres X qui se suivent peuvent être remplacées par X. Ce que nous écrivons XX = X ou encore $X^2 = X$.

Pour former tous les mots, on pourra utiliser un arbre; il est ébauché ci-contre :



Les mots d'une lettre seront dits de longueur 1; les mots de *n* lettres, de longueur *n*. Ainsi les mots de longueur 1 sont : A et B; ceux de longueur 2 sont : AB et BA. Quels sont les mots de longueur 3? de longueur 4?...

Combien a-t-on de mots d'une longueur donnée?

On appellera M l'ensemble de tous ces mots. Sur M, on définit une loi de composition *interne* (appelée aussi juxtaposition); on juxtapose deux mots pour en former un troisième. Exemple : (ABAB) (BAB) = ABABBAB. Simplifiez cette écriture. On pourra commencer la table de Pythagore pour cette loi :

	2 \ 1	A	B	AB	BA	ABA	...
		2e mot					
	A						
	B						
	AB						
1er mot	BA						
	ABA						
	...						
	...						

Un ensemble muni d'une *loi de composition interne associative* prend le nom de monoïde. M est donc un monoïde.

Cette loi (juxtaposition) n'est pas commutative. Calculez (AB) (BA) et (BA) (AB).

On peut maintenant définir sur M une relation d'équivalence : deux mots sont équivalents s'ils commencent par la même lettre et se terminent par la même lettre; ainsi ABABAB et AB sont équivalents. Il y a quatre classes de mots :

$$\overline{ab}, \quad \overline{ba}, \quad \overline{aa} \quad \text{et} \quad \overline{ab}$$

$\overline{ab}$ est la classe des mots commençant par A, se terminant par B.

Donc $m = \{\overline{ab}, \overline{ba}, \overline{aa}, \overline{bb}\}$ est l'ensemble quotient de M par cette relation d'équivalence.

Peut-on structurer l'ensemble quotient m?

Exemple : un mot de la classe $\overline{ab}$ suivi d'*un* mot de la classe $\overline{bb}$ donne un mot de la classe $\overline{ab}$.

Examinez tous les cas possibles en complétant la table ci-dessous :

1 \ 2	$\overline{aa}$	$\overline{ab}$	$\overline{ba}$	$\overline{bb}$
$\overline{aa}$				
$\overline{ab}$				
$\overline{ba}$				
$\overline{bb}$				

Obtient-on un nouveau monoïde?

A-t-on, pour ce nouveau monoïde, $\bar{x}\bar{x} = \bar{x}$ pour tout $\bar{x}$ de m?

Sous-monoïde : Considérons le singleton $\{\overline{ab}\}$.

$\overline{ab}\,\overline{ab} = \overline{ab}$.

$\{\overline{ab}\}$ a une structure de monoïde; on dit que c'est un sous-monoïde de m.

$\{\overline{ab}, \overline{bb}\}$, $\{\overline{ab}, \overline{aa}\}$, $\{\overline{ba}, \overline{aa}\}$ et $\{\overline{ba}, \overline{bb}\}$ sont-ils des sous-monoïdes de m?

Même question pour $\{\overline{ab}, \overline{ba}\}$?

Quels sont tous les sous-monoïdes de m?

2. Thème de réflexion : un autre monoïde.

Avec les lettres O, A et B écrivons des mots en convenant que :

$$\text{OA} = \text{AO} = \text{A}; \quad \text{OB} = \text{BO} = \text{B} \quad ;$$
$$\text{AA} = \text{A} \quad ; \quad \text{BB} = \text{O} \quad \text{et} \quad \text{OO} = \text{O}$$

Soit M′ l'ensemble de tous les mots que l'on peut écrire avec cet alphabet en appliquant les règles imposées.

Commencez l'arbre.

Quels sont les mots de longueur donnée?

Peut-on définir un monoïde associatif quotient m'? Pour quelle relation?

3. Monoïde muni d'un élément neutre.

Le monoïde M′ (cf. 2) a pour la loi de composition interne un élément neutre, le mot O.

Très souvent, on s'intéressera à de tels monoïdes (loi interne, associative et munie d'un élément neutre).

Application : Précisez si les ensembles suivants, munis de la loi de composition interne indiquée, sont ou non des monoïdes. Précisez aussi s'ils ont un élément neutre.

a) $(\mathcal{P}(E), \cap)$ avec $(X, Y) \mapsto X \cap Y$.

b) $(\mathcal{P}(E), \cup)$ avec $(X, Y) \mapsto X \cup Y$.

c) $(\mathcal{P}(E), \Delta)$ avec $(X, Y) \mapsto X \,\Delta\, Y$.

d) $(\mathbb{N}, +)$.

e) $(\mathbb{N}, \times)$.

f) Dans $\mathbb{N}$, la loi $(x, y) \mapsto x^y$.

g) Dans $\mathbb{R}$, les deux lois $(x, y) \mapsto \mathrm{Sup}\,(x, y)$
et $(x, y) \mapsto \mathrm{Inf}\,(x, y)$.

4. Équation dans un monoïde.

On construit un nouveau monoïde P dont les éléments seront encore des mots et la loi de composition interne, la juxtaposition de mots.

Les axiomes pour écrire ces mots sont les suivants :

1° L'alphabet utilisé contient deux lettres X et Y.

2° $XX = X$ et $YY = Y$.

Avec ces deux règles, on construit un monoïde connu : M. Ajoutons une troisième règle.

3° Deux mots identiques juxtaposés sont remplacés par le mot lui-même, soit $mm = m$.

L'axiome 2 est-il indispensable?

a) Formez tous les mots possibles (à l'aide d'un arbre). Nous obtenons alors un ensemble fini de mots. Donnez-le en extension.

b) Construisez la table de Pythagore pour la loi de composition interne (juxtaposition). Cette loi est associative; possède-t-elle un mot neutre? Est-elle commutative?

c) Quels sont les sous-monoïdes de P?

d) Équations dans P.

Trouvez, s'ils existent, tous les éléments m de P satisfaisant à :

1. $mX = Y$.
2. $mX = X$.
3. $XYm = XY$.
4. $XmY = YX$.
5. $\begin{cases} Xm = XY \\ Ym = YXY. \end{cases}$

5. Du monoïde vers une structure plus riche...

Examinons à nouveau le monoïde $(\mathcal{P}(E), \Delta)$.
Établir la table de Pythagore pour $E = \{a, b\}$.
La différence symétrique est une loi associative; vous avez montré qu'elle possédait un élément neutre $\varnothing$. Est-elle commutative? Tout élément de $\mathcal{P}(E)$ est-il symétrisable pour cette loi?

6. Thème de recherche.

Soit un ensemble E et l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ de ses parties. Dans $\mathcal{P}(E)$, on définit la loi suivante :

$$X \top Y = X \cup Y \quad \text{si} \quad X \cap Y = \varnothing$$
$$X \top Y = E \quad \text{si} \quad X \cap Y \neq \varnothing$$

Montrez que $(\mathcal{P}(E), \top)$ est un monoïde. La loi $\top$ est-elle commutative? Existe-t-il un élément neutre pour cette loi?
On pourra supposer dans un premier temps que l'ensemble E est fini; par exemple : $E = \{a, b\}$ et former la table de Pythagore de la loi $\top$.

Les clandestins

N'oublions pas, comme il l'a été dit plus haut, l'action efficace de toutes les sections locales ou régionales de l'A.P.M. qui ont effectivement assuré des tâches de F.P.M. en marge des I.R.E.M. J. Dautrevaux fait état du travail de la section de Belfort. Nous publions ensuite la déclaration finale adoptée par le colloque de Sèvres organisé par la Régionale Parisienne; celle-ci a organisé en 68-69 17 chantiers qui ont touché plus de 1 000 maîtres; elle a édité une série de six cahiers qui, tirée à 15 000 exemplaires, a été épuisée et réimprimé.

A Belfort.

La section locale de Belfort, animée par M[me] Michau, professeur au Lycée de garçons, et M. Dautrevaux, maître-assistant à la Faculté des Sciences de Strasbourg, avec la collaboration active de MM. les Inspecteurs de l'Enseignement Primaire, a organisé entre janvier et mai une série de séances de formation et d'information destinées en premier lieu aux instituteurs et maîtres de C.E.G. amenés à enseigner lors de la prochaine rentrée les nouveaux programmes de Sixième dans les établissements du département; ont participé également à ces sessions un certain nombre de professeurs de C.E.S. et des maîtres auxiliaires. Ce stage comportait une séance hebdomadaire de deux heures, et il me faut rendre hommage aux participants qui ont fait preuve d'une assiduité remarquable, bien que nombre d'entre eux aient résidé assez loin de Belfort. Ces séances ont permis de fructueux échanges de points de vue et de réflexions, dont il est résulté la nécessité absolue :

1° du travail en équipes au sein de chaque établissement, l'équipe regroupant l'ensemble des maîtres enseignant au niveau considéré;

2° de rencontres périodiques de l'ensemble des maîtres afin de pouvoir procéder à des échanges, de mettre en commun les difficultés rencontrées, et éventuellement de recevoir le complément d'information théorique qui pourrait être nécessaire.

Nous osons espérer qu'aucun obstacle matériel n'empêchera ces projets de se réaliser ni ces résolutions de survivre aux vacances d'été...

Aux documents de travail utilisés dans le stage de cette année (*), je voudrais ajouter ces quelques réflexions qui me sont apparues non seulement dans les discussions mais encore à l'occasion de l'examen des nombreux manuels de la classe de Sixième édités récemment, peut-être un peu hâtivement pour la plupart, et sans s'être entourés des garanties nécessaires de rigueur scientifique.

Il est essentiel que les concepts fondamentaux soient correctement assimilés par les enfants, à cet âge où toute erreur d'acquisition peut être catastrophique; et c'est tout d'abord une question de langage : les mathématiques dites « modernes » ne sont pas différentes des mathématiques dites « classiques », elles font sans doute plus volontiers appel à l'abstraction, mais elles utilisent un outil différent et plus neuf, cette nouveauté ayant permis de dégager un langage particulièrement précis, et c'est en ceci que l'enseignement des mathématiques va interférer avec celui du français, du langage ou de la linguistique : chaque mot du vocabulaire mathématique a une signification bien précise (même si tous les mathématiciens ne sont encore pas d'accord sur certains mots ou certaines notations; mais pour un mathématicien déterminé et pour ceux qui lisent ses œuvres, parce qu'ils en ont été informés, chaque mot a une signification bien précise) et il est essentiel que les enfants soient très tôt habitués à ne pas dire (ou écrire) n'importe quoi, et même rien du tout, n'importe comment; et ceci est très important car grande est la tentation du « verbalisme » qui me fait croire que j'ai tout compris et tout assimilé parce que j'utilise les mots du jargon de la mathématique « moderne ».

Un second défaut que nous rencontrons jusque dans l'enseignement supérieur est ce que j'appelle le « fixisme », c'est-à-dire l'illusion que la formulation d'un concept faite dans la classe de niveau n est définitive, ce qui entraînera, dans la classe de niveau $> n$ où on reprendra ce concept, un refus d'approfondissement ou de formulation différente. Et c'est là une seconde caractéristique qui différencie profondément la mathématique dite « moderne » des mathématiques de papa, où celle-ci était arrivée à un état de perfection tel qu'on ne rencontrait aucune surprise en passant d'un niveau au suivant, l'ensemble étant un tout cohérent non susceptible de progresser, alors que dans notre enseignement des mathématiques « modernes » (excusez-moi, j'ai oublié les guillemets, car la mathématique n'a pas d'âge) il est nécessaire de laisser une place à l'évolution, à l'approfondissement progressif des concepts, et surtout à la construction progressive de concepts nouveaux englobant d'autres concepts plus élémentaires et jusque-là distincts : la voie doit rester libre pour toute synthèse.

Enfin, et c'est là que l'information des maîtres doit être complète, afin qu'eux au moins sachent ce qu'ils disent, il faut absolument éviter de mêler des concepts qui se situent à des niveaux différents : je prendrai l'exemple, que j'ai partout vu très

(*) ... que nous nous excusons de ne pouvoir reproduire (N.D.R.L.).

mal traité, des relations et applications, faute d'idées claires sur la question. Et je me permets d'exposer ici un certain nombre d'idées de base.

Une RELATION (ou « relation binaire » si on veut préciser, ce qui va de soi' qu'elle fait intervenir deux ensembles) est, au sens le plus élémentaire et le plus concret du terme, une *assertion* d'un type particulier : elle comporte donc un premier terme qui doit être un élément d'un ensemble; un second terme qui doit être un élément d'un autre ensemble, ces deux termes étant reliés par une « forme verbale » ; si l'assertion est *vraie*, la relation est vérifiée par les deux éléments; si l'assertion obtenue est fausse, la relation n'est pas vérifiée, ou plutôt la relation contraire (ou « complémentaire ») est vérifiée. Une RELATION fonctionne donc essentiellement par « VRAI » ou « FAUX ». A ce moment on peut introduire le graphe de la relation, ainsi que les notions habituelles de « coupes » et de « projections », et s'apercevoir que les propriétés des relations qui nous seront utiles en mathématiques dépendent seulement du graphe, et non de la forme verbale, de sorte que la première étape dans l'abstraction consistera à se libérer de la forme verbale et à ne considérer, dans une relation, que les deux ensembles (« SOURCE » et « BUT ») et le graphe — autrement dit d'introduire déjà un quotient; cependant on ne pourra pas appeler *égales* deux relations ayant même source, même but et même graphe (parce qu'elles pourront différer par la forme verbale), mais seulement « équivalentes ». De toute façon, en mathématique, nous ne travaillons que sur des relations de la forme suivante :

Soient A la source, B le but, $G \subset A \times B$ le graphe : nous pouvons canoniquement associer à ce triplet la relation $\mathcal{R}$ définie par : $a \in A$, $b \in B$: $a\mathcal{R}b$ si $(a, b) \in G$. La forme verbale particulière serait ici « est élément de », et à ce moment deux relations ayant même source, même but et même graphe seront effectivement égales puisque, par convention, elles auront la même forme verbale.

La notion de Relation va nous conduire, à un niveau supplémentaire d'abstraction, à celle de CORRESPONDANCE : la correspondance définie par une relation $\mathcal{R}$ est l'*opération mentale* (nous l'appellerons l' « opérateur ») qui, à un élément donné, a de la source associe ceux des éléments b du but (s'il en existe), tels que l'assertion $a\mathcal{R}b$ soit vraie. A ce stade, il nous est loisible d'introduire, ce qui ne fait aucune difficulté, la relation réciproque ainsi que la correspondance réciproque.

Alors, une APPLICATION d'un ensemble A dans un ensemble B apparaît comme une CORRESPONDANCE d'un type particulier — et non, j'insiste bien là-dessus — comme une relation particulière, faute que l'on trouve dans nombre d'ouvrages imprimés, et pas seulement à l'usage des élèves de Sixième! On verra alors que, dans ce cas, toute application admet une *correspondance réciproque*, ce qui éclaire la notion d'image réciproque d'un élément ou d'une partie du but, ainsi que les conditions auxquelles cette correspondance réciproque est elle-même une application, ce qui nous conduit tout naturellement à la notion d'application injective, puis bijective.

En passant, précisons que la notion de surjectivité est tout à fait secondaire et que, parmi les applications, l'essentiel est de bien distinguer celles qui sont injectives de celles qui ne le sont pas.

Bien entendu, rien n'empêche une *relation* d'admettre le même ensemble comme source et comme but, et d'introduire les notions de transitivité (facile, car amusante), de réflexivité (facile aussi, mais on ne pense jamais assez que $a\mathcal{R}a$ doit être vraie pour *tout* élément sans exception de l'ensemble A), puis les notions plus difficiles de symétrie et d'antisymétrie, que bien des enfants auront tendance à considérer comme contraires l'une de l'autre, alors qu'un diagramme sagittal judicieusement construit peut montrer des exemples de relations qui sont à la fois symétriques et antisymétriques, ou de relations qui ne sont ni l'une ni l'autre : on trouve toujours l'exemple de l'égalité entre nombres (entiers ou réels) comme celui d'une relation symétrique qu'elle est effectivement; mais qui pense que cette relation est également antisymétrique? On trouve aussi toujours l'exemple de l'inégalité large (: $\leqslant$) comme celui d'une relation antisymétrique, mais qui pense que l'inégalité stricte ($<$) l'est également? Ce dernier exemple repose en fait sur la définition correcte de l'implication mathématique qui s'impose évidemment dès ce niveau : si A et B sont deux assertions, l'implication $A \Rightarrow B$ est vraie, soit lorsque A et B sont vrais tous deux, soit lorsque A est faux (sans qu'on s'occupe de B); on peut d'ailleurs analyser de cette manière, pour bien illustrer cette définition, de nombreuses propositions du langage courant ou de la vie pratique.

On voit donc l'importance de la précision du langage et du vocabulaire, et de la connaissance rigoureuse de la signification des mots. Sans aller jusqu'à dire que la mathématique moderne se réduit à une linguistique un peu poussée, on peut admettre que celle-ci en est un passage obligé, et que la clé du succès se trouve dans l'observation rigoureuse de cette règle.

Jacques DAUTREVAUX.

A Sèvres.

Le colloque sur la formation permanente des maîtres réuni à Sèvres les 21 et 22 juin 1969 au Centre International d'Etudes Pédagogiques sur l'invitation de la Régionale Parisienne de l'A.P.M.E.P., a réuni 80 participants enseignant dans les divers ordres d'enseignement, de la Maternelle aux Facultés, ou parents d'élèves.

Au terme de leurs travaux, ils ont adopté la déclaration suivante.

Un vaste et profond mouvement de rénovation de l'enseignement mathématique se développe dans tous les pays du monde. Il prend vie dans notre pays et s'épanouit dans la mesure où, dépassant de simples changements de programmes ou d'horaires, il entraîne une mutation de la fonction enseignante s'inspirant des principes suivants :

a) le maître qui enseigne est de moins en moins transmetteur de connaissances et de plus en plus éveilleur de consciences ; dans le domaine mathématique, il apprend beaucoup moins des résultats qu'il n'apprend à observer, à concevoir, à déduire, à appliquer, autrement dit à appréhender la réalité pour la transformer grâce à une pensée organisatrice ;

b) pour les maîtres, ne doivent plus exister de frontières entre les degrés d'enseignement : tout de même que les enfants au cours de leurs études parcourent les cycles successifs, les idées pédagogiques doivent circuler entre tous les maîtres à quelque degré d'enseignement qu'ils exercent ;

c) l'évolution de l'enseignement mathématique favorise toutes les formes de coopération interdisciplinaire ; si la mathématique utilise les langues vivantes usuelles, avec celles-ci elle participe à l'apprentissage des moyens d'expression sans lesquels l'individu ne peut vivre en société ;

d) cette évolution de l'enseignement ne peut avoir de fin ce qui entraîne le maître dans une recherche pédagogique également permanente ; c'est le mélange et l'équilibre dynamique de perfectionnement scientifique et de recherche pédagogique qui constitue *la formation permanente des maîtres* (au contraire de ce qui est appelé « recyclage » et ne concerne qu'une acquisition supplémentaire de connaissances théoriques ou pratiques pendant une période limitée) ;

e) le climat de la F.P.M. étant celui du dialogue entre ceux qui enseignent, à la lumière des contacts avec les enseignés, les parents et les professionnels de toutes catégories, ne peut s'épanouir qu'en l'absence de tout esprit hiérarchique.

En conséquence, les participants du colloque souhaitent que l'A.P.M.E.P. :

1° réclame avec force la création d'un I.R.E.M. dans chaque académie, ces I.R.E.M. étant dotés de moyens financiers suffisants pour assurer la F.P.M. selon les principes énoncés ci-dessus ;

2° obtienne que partout où les I.R.E.M. n'existent pas encore, les administrations académiques soient invitées à favoriser et aider les initiatives individuelles ou collectives pour la F.P.M. ;

3° recommande à toutes les Régionales de l'A.P.M.E.P. de prendre les initiatives utiles pour animer des équipes de F.P.M. quel que soit le cadre dans lequel elles sont organisées.

Dans le cadre particulier de la Région parisienne, la Régionale Parisienne de l'A.P.M.E.P. s'efforcera de multiplier les Chantiers de Pédagogie Mathématique qu'elle anime en en diversifiant la formule pour l'adapter aux besoins de tous. Elle publiera six *Bulletins* dans l'année scolaire à l'intention spéciale de contribuer à ce travail de F.P.M.

A ce titre les membres du colloque invitent leurs Collègues à les rejoindre dans un stage de formation d'animateurs de Chantiers de Pédagogie Mathématique que la Régionale organise du 3 au 6 septembre 1969.

Les participants au Colloque de Sèvres affirment leur conviction que l'évolution de l'enseignement mathématique pour laquelle ils travaillent réunit l'avantage d'augmenter l'attrait de la fonction enseignante pour les jeunes mathématiciens à la vertu plus éminente encore de mieux servir à former chez les élèves des esprits clairs, imaginatifs, libres.

P.S. — Le stage du 3 au 6 septembre 1969 a réuni, au Centre International de Sèvres 25 participants qui, par équipes de trois à cinq collègues, ont rédigé cinq documents sur des présentations élémentaires de la notion de groupe. Ces travaux seront repris dans les *Chantiers de Pédagogie Mathématique,* cahiers devenus bulletin de la Régionale.

A la lumière de ces travaux et des difficultés de la rentrée, il apparaît bien que l'exigence d'un I.R.E.M. par académie est une première étape qu'il faudrait franchir *rapidement*. Dans les académies étendues ou surpeuplées, il faudra bien créer plusieurs I.R.E.M. si l'on veut éviter le gigantisme et la paralysie.

Les conditions de la F.P.M. ayant été précisées dans les articles précédents, nous donnons ensuite un exemple des études que cette formation permanente nous engage à entreprendre. Traiter, en Sixième, des problèmes de mesure n'est pas nouveau. Ce qui l'est peut-être c'est de se poser à ce sujet le problème mathématique général de la mesure.

On s'aperçoit alors que divers exposés sont possibles. En classe, un seul point de vue sera peut-être adopté. Mais comment le maître choisira-t-il? S'il ne connaît sur chaque sujet qu'un seul chemin, comment les élèves connaîtront-ils tout le pays?

C'est pourquoi après l'exposé de notre Collègue BUISSON, *il nous a paru utile de présenter un point de vue différent. Nous espérons revenir sur ce thème dans d'autres* Bulletins.

Mesure et géométrie

P. BUISSON
I.R.E.M. de Strasbourg

Cet exposé, qui a été présenté à un stage interacadémique à Strasbourg concernant l'expérience en Sixième, comprend trois parties. Une première, algébrique, est consacrée à l'étude de l'existence de mesures des segments de l'espace affine invariante par les translations et vérifiant une certaine propriété d'additivité. Son but est de donner un certain nombre de définitions et de notations en accord avec la théorie; celles-ci n'ont d'ailleurs rien d'original. La deuxième concerne les programmes de Sixième et de Cinquième et recherche comment appliquer les résultats de la première partie à ces niveaux en respectant les programmes et les instructions ministérielles. La dernière partie est consacrée aux autres mesures figurant dans ces programmes. Cet exposé tient compte des résultats de la discussion qui a eu lieu à ce sujet au moment du stage.

1. Mesure des segments.

1.1. Définition d'une droite affine.

Une droite affine (D) *est la donnée d'un ensemble de points et d'une famille de bijections appelées translations* f_t de (D), *paramétrée par les nombres réels* $\mathbb{R}$ *et vérifiant :*

(1.11.) $f_t\,(f_{t_1}(\mathrm{A})) = f_{t+t_1}(\mathrm{A})$ *pour tout* $\mathrm{A} \in (\mathrm{D})$ *et tous* $t, t_1 \in \mathbb{R}$.

(1.12.) *Pour tout point* $\mathrm{O} \in (\mathrm{D})$ *l'application de* $\mathbb{R}$ *dans* (D) *qui à* t *associe* $f_t(\mathrm{O})$ *est une bijection.*

On dit alors que le groupe additif des réels opère simplement et transitivement dans (D).

Il résulte de (1.12) que si $A \in (D)$ alors il existe $a \in \mathbb{R}$ unique tel que $A = f_a(O)$. Ce nombre a est l'abscisse du point A, le point O étant pris comme origine. Si O′ est un point d'abscisse x par rapport à O on aura

$$A = f_a(O) = f_{a'}(O') = f_{a'}(f_x(O)) = f_{a'+x}(O)$$

ce qui donne la formule de changement d'origine $a' = a - x$.

1.2. Définition des segments.

Si a et b sont deux nombres réels, on note I (a, b) l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $x \geqslant \inf(a, b)$ et $x \leqslant \sup(a, b)$.

Définition : *Soient* A et B *deux points d'une droite affine* (D) *tels que* $A = f_a(O)$ *et* $B = f_b(O)$ *avec* $O \in (D)$; *on appelle segment d'extrémité A et B l'ensemble des points* $f_t(O)$ *avec* $t \in I(a, b)$. *On le note* [*AB*].

La formule de changement d'origine entraîne que cette définition est indépendante du choix du point O. Si A = B, on obtient le segment point noté [A]; la définition étant symétrique en A et B on a [AB] = [BA].

1.3. Mesure d'un segment.

Définition : *Soit* F *l'ensemble des segments d'une droite affine* (D); *une mesure sur* (F, D) *est une application non identiquement nulle* m : $F \to \mathbb{R}^+$ *vérifiant :*

(1.31) *Pour tout* $t \in \mathbb{R}$, $m[f_t(A)f_t(B)] = m[AB]$.

(1.32) *Si* $B \in [AC]$ *alors* $m[AB] + m[BC] = m[AC]$.

Comme $A \in [AC]$, on déduit de $m[A] + m[AC] = m[AC]$ que la mesure d'un point est nulle. D'autre part si S_1 et S_2 sont deux segments tels que $S_1 \cap S_2$ soit non vide, on aura :

$$m(S_1 \cup S_2) + m(S_1 \cap S_2) = m(S_1) + m(S_2).$$

Remarquons que $m(S_1 \cup S_2)$ est seulement définie dans ce cas, car la réunion de deux segments dont l'intersection est vide n'est plus un segment.

1.4. Cas de la droite réelle affine.

La droite réelle est la donnée de $\mathbb{R}$ et des translations $f_t(a) = a + t$. La première condition s'écrit : $m(I(a, b)) = m(I(a + t, b + t))$; on aura, en particulier, $m(I(a, b)) = m(I(0, b - a))$ et $m(I(0, x)) = m(I(0, -x))$. La mesure sera donc entièrement déterminée par la donnée pour $x \geqslant 0$ de $g(x) = m(I(0, x))$. Pour $0 \leqslant x \leqslant y$, la condition (1.32) s'écrit $g(x) + g(y - x) = g(y)$.

La fonction g est additive, à valeurs positives, donc croissante et continue.

Cela implique que g est une fonction linéaire : $g(x) = \lambda x$ avec $\lambda > 0$ et par suite $m(\mathrm{I}(a, b)) = \lambda|b - a|$ avec $\lambda > 0$. On en déduit qu'il existe une mesure, que deux mesures sont proportionnelles, et qu'une mesure est entièrement déterminée par la donnée d'un segment [OU] tel que $m[\mathrm{OU}] = 1$.

1.5. Droite affine quelconque.

A toute mesure m_{D} sur une droite affine (D) on peut associer une mesure $m_{\mathbf{R}}$ sur la droite réelle affine par :

$$m_{\mathrm{D}}(\mathrm{I}(a, b)) = m_{\mathrm{R}}\ [\mathrm{AB}] \text{ avec } \mathrm{A} = f_a(\mathrm{O}),\ \mathrm{B} = f_b(\mathrm{O}) \text{ et } \mathrm{O} \in (\mathrm{D}).$$

Cette définition est indépendante du choix de O car la mesure $m_{\mathbf{R}}$ doit être invariante par translation. D'une manière analogue on associe à toute mesure $m_{\mathbf{R}}$ sur la droite réelle affine une mesure m_{D} sur (D) invariante par translation, ce qui permet d'obtenir une correspondance biunivoque entre les mesures d'une droite affine quelconque et celles de la droite affine réelle.

En utilisant les résultats démontrés en 1.4, nous obtenons :

Théorème : *Si* D *est une droite affine réelle et* F *l'ensemble de ses segments, alors il existe sur* (F, D) *une infinité de mesures. Deux mesures sont proportionnelles entre elles et une mesure est entièrement déterminée par sa valeur sur un segment.*

1.6. Longueur d'un segment dans l'espace affine.

Soit E l'espace affine de dimension 3, on admettra que deux points A et B définissent une droite affine D(A, B), ce qui permet de mesurer le segment [AB].

Choisissons une mesure $m_{\mathbf{R}}$ sur $\mathbb{R}$; nous dirons que *deux segments* [AB] *et* [CD] *ont même longueur* si $m_{\mathrm{D(A,B)}}\ [\mathrm{AB}] = m_{\mathrm{D(C,B)}}\ [\mathrm{CD}]$, ces deux mesures correspondant à la mesure choisie sur $\mathbb{R}$. Cela définit une relation d'équivalence dans l'ensemble des segments indépendamment du choix de la mesure sur $\mathbb{R}$. Si on désigne par u la classe des segments qui mesurent 1 pour une mesure donnée sur $\mathbb{R}$, on dit que cette dernière définit une *u mesure* pour l'ensemble des segments de E et on notera u mes [AB].

On appellera *longueur du segment* [*AB*] la classe d'équivalence de ce segment, on la notera AB.

Remarquons qu'on peut aussi mesurer des longueurs, car les applications mesures passent au quotient; ceci justifie la notation *u mes* [*AB*] = *u mes AB*.

Somme de deux longueurs.

Étant donnés deux segments [AB] et [CD], il existe sur la droite affine D(A, B) un segment [BE] tel que $[\mathrm{AB}] \cap [\mathrm{BE}] = [\mathrm{B}]$ et BE = CD.

On peut ainsi définir dans l'ensemble des longueurs une opération notée additivement, *appelée somme de deux longueurs* définie par

$$\mathrm{AB} + \mathrm{CD} = \text{classe de } [\mathrm{AE}].$$

Produit d'une longueur par un nombre.

Si [AB] est un segment et λ un réel positif, alors il existe sur la droite D(A, B) un segment [AC] tel que *u mes* [AC] $= \lambda u$ *mes* [AB]; on peut aussi définir une opération externe, appelée *multiplication d'une longueur par un réel positif* par λAB = classe de [AC].

Cette opération justifie l'écriture AB $= \beta u$ si *u mes* AB $= \beta$. L'écriture habituellement utilisée AB = 3 cm est donc tout à fait correcte dans cette théorie.

Remarque : Au cours de la discussion, plusieurs enseignants ont fait part des difficultés pédagogiques auxquelles ils se heurtent quand ils abordent les conséquences du théorème de Thalès et les triangles semblables car ils manient alors les longueurs qu'ils ont définies comme classes de segments superposables, comme des nombres. C'est pourquoi *on propose*, par définition, de *noter* $\overline{AB}$ la mesure du segment [AB] ou de sa longueur AB, chaque fois qu'il est inutile de préciser le choix de la mesure. C'est un nombre alors que [AB] et AB n'en sont pas.

1.7. Extension aux lignes polygonales.

On peut étendre, additivement, la mesure à des lignes polygonales, réunion finie de segments, en posant $m(L_1 \cup L_2) = m(L_1) + m(L_2)$, si L_1 et L_2 sont deux lignes polygonales dont l'intersection est soit vide, soit réunion d'un nombre fini de segments points.

2. Mesure d'un segment physique.

Cette étude a été faite pour expliciter les notions de mesure et de longueurs *des segments géométriques sur une droite affine ;* une telle étude est évidemment impossible en classe de Sixième et de Cinquième où l'espace est considéré comme espace « physique » et non pas affine.

Cela montre que le titre des programmes « Mesure d'objets géométriques et physiques » n'est pas clair et qu'il aurait fallu se contenter de « Mesure d'objets physiques », les objets géométriques étant impossible à définir.

2.1. En classe de Sixième.

La droite est ce qui se dessine avec une règle et un segment [AB] est l'ensemble des points de la droite « compris entre A et B ». On a également la notion de segments adjacents et on possède le compas à pointes sèches. *Deux segments qui déterminent le même écartement de compas seront dits isométriques.* On introduit alors la notion de mesure en utilisant l'axiome d'Archimède.

Axiome : Étant donné un segment [AB], *alors à tout segment* [OU] *on peut associer un plus petit entier* N *tel que le segment réunion des* N *segments adjacents, tous isométriques à* [OU], *construits à partir du point* A, *contient le point* B.

Si on désigne par u l'ensemble des segments isométriques à [OU], on dira que les deux entiers $N - 1$ *et* N *définissent un encadrement de la* u *mesure de* [*AB*] et on notera :

$$N - 1 < u \text{ mes } [AB] \leqslant N.$$

Si le point B est exactement l'extrémité du segment construit on notera u mes [AB] = N, car il faut pouvoir écrire u mes [OU] = 1.

Il est peut-être bon de mesurer avec les différentes unités de mesure utilisées dans l'histoire, en particulier le système métrique qui permet d'utiliser les nombres décimaux et de donner une première intuition des nombres réels comme limite d'une suite de Cauchy de nombres décimaux.

On peut encore plus facilement utiliser les nombres à virgule dans le système binaire, car construire à partir d'une unité u un segment S tel que u mes S = 10 (système décimal) est impossible pour un élève de Sixième alors que le pliage permet de construire un segment S_1 tel que u mes $S_1 = 10$ (système binaire).

Il n'est pas possible de définir la longueur comme classe d'équivalence. Par contre on doit pouvoir dire que u mes [AB] = β est synonyme de longueur du segment [AB] = βu et que cela s'écrit AB = βu. Cela doit d'ailleurs surtout s'énoncer pour les encadrements.

Pour les mesures de lignes polygonales on introduit l'axiome d'additivité, ce qui permet d'étudier dans $\mathbb{N}$ le comportement de l'addition par rapport à la relation d'ordre.

2.2. *En classe de Cinquième.*

L'élève a été habitué, par l'écriture des entiers relatifs, à noter une classe d'équivalence. Il est possible alors de préciser, à titre d'exemple de relation d'équivalence, la notion de longueur : deux segments [AB] et [CD] sont équivalents si pour toute u mesure on associe aux deux segments le même encadrement; *on appelle longueur du segment* [AB] *la classe d'équivalence du segment* [AB] *et on la note* AB.

Il est plus normal d'introduire la longueur comme classe d'équivalence à partir de la relation « a même mesure que » qu'à partir de la relation « est isométrique à » car cette dernière ne se généralise pas pour la définition de l'aire à partir des surfaces.

3. Autres mesures.

3.1. *Mesure des surfaces.*

Le problème théorique est encore plus difficile que pour les mesures de segments, car elle repose sur la notion de mesure produit.

La théorie nous permet d'affirmer qu'on peut mesurer les polygones en définissant à partir d'une u mesure de segments une, u^2 mesure des polygones en posant :

1° Si ABDC est un rectangle R alors

$$u^2 \text{ mes } R = u \text{ mes } [AB] \times u \text{ mes } [BC].$$

2° Si P_1 et P_2 sont deux polygones dont l'intersection est réduite à des points, des segments ou est vide, alors

$$u^2 \text{ mes } (P_1 \cup P_2) = u^2 \text{ mes } P_1 + u \text{ mes } P_2.$$

3° Si P_1 et P_2 sont « superposables » alors u^2 mes $P_1 = u^2$ mes P_2.

L'intérêt est certainement en classe de Sixième de déterminer un encadrement de la mesure d'un rectangle, à partir de la mesure des côtés, et d'étudier le comportement du produit par rapport à la relation d'ordre. On peut aussi en Cinquième introduire la notion d'aire comme autre exemple de relation d'équivalence.

3.2. Mesure de solides.

Le problème est encore plus difficile, car on ne peut pas, sans passage à la limite, mesurer les polyèdres à partir de la mesure du parallélépipède rectangle. Dans ces classes il vaudrait peut-être mieux faire de la géométrie expérimentale en construisant des solides, en les développant, en regardant les relations entre les différents éléments pour que les élèves apprennent à « voir dans l'espace ».

3.3. Cas des secteurs angulaires.

Problème de définition et de notation. Un secteur angulaire est l'intersection de deux demi-plans s'il est saillant, la réunion s'il est rentrant. De nombreux enseignants ont fait part des difficultés qu'ont soulevé ces définitions car c'est la première fois dans le cours de Sixième qu'intervient formellement la notion d'infini. D'autre part, cela soulève également un problème de notation; *si* Ox *et* Oy *sont les demi-droites frontières du secteur angulaire, on propose de le noter* [Ox, Oy] *s'il est saillant et Rent* [Ox, Oy] *s'il est rentrant. Ces deux secteurs sont appelés associés.*

Mesure de secteurs angulaires saillants.

On désigne par φ l'ensemble des secteurs angulaires saillants et par G le groupe des isométries du plan, groupe engendré par les symétries par rapport à une droite.

Définition : *On appelle mesure sur S une application non identiquement nulle* m : $\rightarrow \mathbb{R}^+$ *vérifiant.*

(3.31) *Pour tout* $S \in \varphi$ *et pour tout* $g \in G$, $m(g(S)) = m(S)$.

(3.32) *Réciproquement si S et S′ vérifient* $m(S) = m(S')$ *alors il existe* $g \in G$ *tel que* $S' = g(S)$.

(3.33) *Si* $S = [Ox, Oy] \in \varphi$ *et si* $Oz \subset S$ *alors*

$$m([Ox, Oz]) + m([Oz, Oy]) = m(S).$$

Si l'énoncé est identique à celui de la définition d'une mesure des segments, le problème de l'existence et de l'unicité à un facteur multiplicatif près n'est pas simple à résoudre. En fait c'est un problème équivalent à la mesure des angles et conduit à construire un homéomorphisme additif de S sur $[0, 1]$.

Ce qu'on peut faire dans le premier cycle.

Il faut se contenter d'admettre que le rapporteur est un instrument mystérieux qui permet de « mesurer » un secteur saillant au sens défini ci-dessus, donc en particulier de constater que deux secteurs sont isométriques.

On peut aussi faire construire un rapporteur à l'aide des pliages. On obtient ainsi une graduation avec $2^n + 1$ éléments, ce qui permet de faire des encadrements de plus en plus fins et d'utiliser les nombres à virgule dans le système binaire, un représentant de l'unité de mesure pouvant être le secteur droit.

On peut aussi généraliser à la mesure des secteurs rentrants en passant au secteur associé.

Conclusion.

Il résulte de toute cette analyse que la *terminologie* COHÉRENTE suivante a été proposée, laquelle s'écarte peu de la terminologie traditionnelle.

Dans la ligne 1 on désigne des ensembles de points de l'espace, dans la ligne 2 les classes d'équivalence correspondantes par la relation $\mathfrak{R}(A, B)$ si, et seulement si pour toute mesure μ on a $\mu(A) = \mu(B)$ (il suffit que l'égalité ait lieu pour *une* mesure adaptée à la situation).

Segment	Surface	Solide	Secteur angulaire
Longueur	Aire	Volume	Amplitude

On peut donc aussi bien mesurer un segment qu'une longueur. Le centimètre carré est une aire (ce n'est ni un nombre, ni une surface) et le degré une amplitude. La mesure d'un secteur angulaire est un nombre réel.

Par définition deux ensembles isométriques vérifient la relation d'équivalence $\mathfrak{R}$, mais la réciproque n'est pas vraie s'il s'agit de surfaces ou de solides.

Remarque. — En fait, on ne mesure ici que des longueurs, des aires, des volumes, etc. On pourrait, sur un segment, mesurer bien autre chose (sa capacité, son potentiel, son aire, son âge, en sorte que le mot *mesure* se rapporte à celles explicitement définies ici, et construites essentiellement à partir de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. A proprement parler — c'est-à-dire hors du cadre où nous nous plaçons ici — l'expression mesure d'un segment n'a pas de sens précis. La longueur se définit explicitement comme classe d'équivalence par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, de sorte que « mesure d'une longueur » est une expression sans ambiguïté, et désigne une fonction déterminée à une constante multiplicative près. Sur un segment (ensemble de points), il existe d'autres mesures non proportionnelles à celle-ci. Chacune d'elles définit une « grandeur mesurable ». Ce n'est donc tout de même que par abus de langage que l'on parle de la mesure d'un segment sans dire quelle sorte de « grandeur » on mesure.

P. B.

Une approche de la mesure

La mesure des longueurs, dans les anciens manuels de Sixième, insistait essentiellement sur le mesurage : comment utiliser les instruments. Pour la culture, on rappelait l'histoire du système métrique, et même on indiquait la station de métro la plus proche du Pavillon de Breteuil!

Ou bien la partie 3 du nouveau programme « études d'objets géométriques et physiques donnant lieu à mesures » n'est rien d'autre que le programme ancien (et alors mieux vaudrait n'en rien traiter du tout, car on n'a pas de temps à perdre), ou bien elle peut constituer une approche de la théorie de la mesure et alors c'est un sujet difficile. Au niveau des élèves de Sixième, la géométrie est une partie de la physique (en donnant à ce mot le sens : étude du monde réel et de ses phénomènes). Le problème posé est donc celui de la mathématisation d'une situation physique, ou tout au moins d'une partie importante de cette mathématisation. Il est douteux que nous puissions mener la théorie de la mesure jusqu'à satisfaire à la fois les mathématiciens et les physiciens. Ce n'est pas une raison pour ne rien faire, mais il faut savoir quelles sont les exigences des uns et des autres pour rechercher par quels moyens nous pouvons nous engager dans une bonne route.

L'objectif.

Celui que je me propose est la mesure dite de Jordan. Dans un ensemble E, on définit une famille de parties $\mathcal{A}$ qui soit stable par les opérations de réunion et de différence. Cela signifie : $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$; si $X \in \mathcal{A}$ et $Y \in \mathcal{A}$, alors $X \cup Y \in \mathcal{A}$, $X \setminus Y \in \mathcal{A}$, $Y \setminus X \in \mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ est alors dit *clan* sur E. On remarque : $\varnothing \in \mathcal{A}$ puisque, si $X \in \mathcal{A}$, alors $X \setminus X = \varnothing \in \mathcal{A}$.

Une mesure est alors une application m de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}^+$ qui, à tout élément X du clan, associe un réel positif noté $m(X)$, cette application vérifiant les propriétés :

$$m(X \cup Y) + m(X \cap Y) = m(X) + m(Y)$$
$$m(\varnothing) = 0$$

Les parties de E qui sont éléments du clan sont alors dites parties mesurables de E par la mesure m ou encore parties m mesurables de E.

Si nous définissons un autre clan $\mathcal{B}$ tel que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{P}(E)$, on pourra prolonger l'application m sur $\mathcal{B}$ de telle façon que toute partie du clan $\mathcal{A}$ qui était mesurable le reste (et conserve la même valeur $m(X)$), mais que les parties du clan $\mathcal{B}$ qui n'étaient pas des parties du clan $\mathcal{A}$ soient mesurables.

Si E est un ensemble de points dans un espace choisi (par exemple l'espace métrique euclidien à trois dimensions), on peut imposer à la m-mesure qui y aura été définie d'être invariante par déplacement ou symétrie.

Difficultés pédagogiques.

La plus importante, au premier examen, provient du fait que les élèves ne connaissent pas les réels. Traditionnellement, ce sont les difficultés de la mesure (longueur de la diagonale du carré, périmètre du cercle) qui sont invoquées pour donner conscience qu'il existe (ou qu'il devrait exister) des nombres réels.

La nécessité de définir un clan avant de définir une mesure ne peut apparaître sans préparation. D'autant que les élèves ne nous ont pas attendus pour pratiquer des mesurages... et traiter des « problèmes » sur les dallages de cuisine qui ont fait (et font encore) l'orgueil de manuels du Cours Moyen.

Supposons surmontées les difficultés précédentes, pour les ensembles « géométriques », l'invariance par déplacement ou symétrie sera d'autant plus difficile à définir que déplacements et symétries ne le sont pas.

Le programme officiel parle aussi de masse, de masse volumique, de débits. Comme le dit plus loin DEHAME, dans ce cas c'est le programme officiel qui est trop ambitieux. Nous nous limiterons, par exemple, à mesurer les longueurs et les aires. Et encore, pas toutes les longueurs, pas toutes les aires. Nous n'étudierons pas tout ce que le programme nous indique et nous garderons la conscience libre : les élèves ont-ils achevé leurs études à la fin de la Sixième?

Une première suite d'exercices.

1. Soit $E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$; nous pouvons dénombrer toutes les parties de E qui sont des paires, toutes celles dont le cardinal est 3, etc. Autrement dit, nous savons appliquer $\mathfrak{P}(E)$ dans $\mathbb{N}$, cette application faisant correspondre à $X \in \mathfrak{P}(E)$ un naturel noté card X et nous vérifions :

$$\text{card } \varnothing = 0, \qquad \text{card } (X \cup Y) + \text{card } (X \cap Y) = \text{card } X + \text{card } Y$$

2. Sur la ligne de chemin de fer de Saint-Lazare à Saint-Cloud nous connaissons la suite des stations intermédiaires : Pont Cardinet, Clichy, Asnières, Bécons, Courbevoie, Puteaux, Suresnes, Val d'Or. Pour un voyageur qui va de Bécons à Suresnes, il est assez naturel de penser que c'est au troisième arrêt qu'il descend; définissons ainsi une application t de l'ensemble des voyages possibles (sur cette ligne) dans $\mathbb{N}$; ici t (Bécons, Suresnes) $= 3$; de même t (Courbevoie, Saint-Cloud) $= 4$. Nos deux voyageurs se sont trouvés côte à côte sur le trajet (Courbevoie, Suresnes) et $t(C, S) = 2$. Ils ont été les seuls occupants de ce compartiment qui a donc été occupé par un voyageur au moins sur le trajet (Bécons, Saint-Cloud) tel que $t(B, SC) = 5$. On vérifie : $t(B, S) + t(C, SC) = t(C, S) + t(B, SC)$.

Pour le voyageur étourdi qui est entré dans le compartiment à Bécons mais qui est redescendu aussitôt parce qu'il se trompait de train, $t(B, B) = 0$.

Dans E, $\mathfrak{P}(E)$ est un clan; l'application card est une mesure. Sur la ligne Saint-Lazare, Saint-Cloud, les trajets de station à station constituent un clan (avec les conventions précitées pour intersection et réunion); t est une mesure (qui n'est pas sans lien avec le prix du billet).

3. *Sur un damier*, le premier joueur dispose les jetons blancs sur les cases (blanches ou noires) de son choix; il définit ainsi un sous-ensemble B de l'ensemble D des cases du damier; le deuxième joueur opère de la même façon avec les jetons noirs (il a le droit d'occuper une case déjà occupée par un jeton blanc); soit N le sous-ensemble des cases marquées d'un jeton noir.

B et N peuvent être considérées comme deux surfaces incluses dans la surface du damier. Le nombre b des jetons qui définissent B est une mesure de B.

Il apparaîtra rapidement aux élèves que ces trois exercices, sous des aspects différents, sont de la même nature : ils définissent une mesure, chaque fois sur un ensemble discret. Avant d'aller plus loin, on peut donc conclure que sur toute ligne (fig. 1) jalonnée de points marqués, dans toute surface (fig. 2) partitionnée ou carrelée, il est possible de définir un clan de « segments » ou de « surfaces » mesurables.

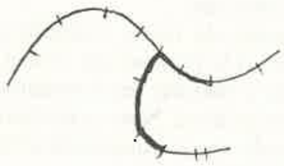


FIG. 1.

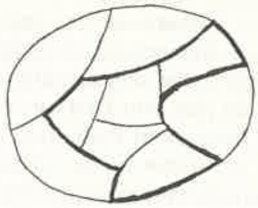


FIG. 2.

Essai de formalisation.

Simplifions les situations précédentes en considérant les segments sur une droite, un quadrillage dans le plan (fig. 3 et 4).

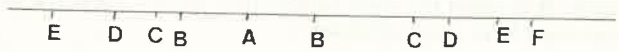


FIG. 3.

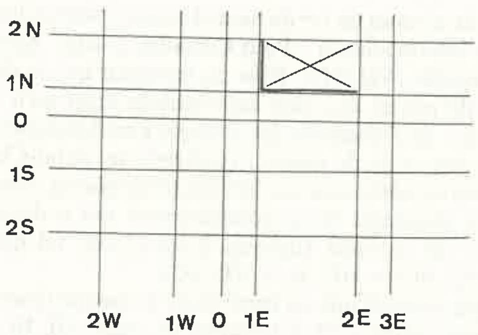


FIG. 4.

Les segments semi-ouverts tels que [BC[, les « carreaux » semi-ouverts tel que le carreau marqué (1E, 1N) du nom du sommet Sud-Ouest de ce carreau (fermé au Sud et à l'Ouest, ouvert au Nord et à l'Est) constituent des clans.

La définition de segments mesurables, de surfaces mesurables, dans ces cas de figure, ne présente pas de difficulté. L'expérience montre que la notion d'ouvert ou de fermé, pour abstraite qu'elle soit, n'est pas hors de la portée des élèves de Sixième. Faute de l'accepter, on en est réduit à introduire les « segments » de mesure nulle tels que [BB], les « surfaces » de mesure nulle telles que le segment [1 E, 2 E] sur la ligne 1 S, etc.

A propos de l'introduction des ouverts ou des fermés, l'introduction de la notion de *bord* (le bord d'un segment est l'ensemble de ses extrémités, le bord d'un carré l'ensemble de ses côtés) est commode. Si le carré est l'ensemble de son bord et de sa surface intérieure, n'est-il pas naturel de distinguer carré ouvert et carré fermé selon que le bord n'est pas compris ou l'est?

Sur les figures 3 et 4, nous avons, à dessein, utilisé des points marqués quelconques, des « carreaux » qui, pour être rectangulaires (pour la commodité du dessin sur le cahier) n'en sont pas moins irréguliers. En Sixième, l'isométrie sera définie par la superposition (par exemple deux faces d'un cube sont dites isométriques parce qu'elles ont la même *empreinte*, deux cubes sont isométriques s'ils sont issus du même *moule ;* c'est de la physique). Il n'est pas difficile de passer des mesures avec segments ou carreaux irréguliers à mesures avec segments ou carreaux isométriques : on obtient une mesure invariante par translations et certaines symétries.

Généralisation.

Reste le problème très général : comment mesurer un segment quelconque de la droite graduée (à graduations régulières désormais), comment mesurer la surface d'une pièce à cloisons mobiles posées sur un sol carrelé?

Il est instructif de prendre conscience d'une difficulté nouvelle. On a une mesure approchée de la surface d'un rectangle en dénombrant les carreaux du clan intérieurs à la surface du rectangle. Mais, par translation du rectangle, sur le quadrillage, il apparaît que deux rectangles isométriques ont, pour mesures approchées par défaut de leur surface, dans un cas 2, dans l'autre cas 6. Par contre, les mesures approchées par excès (obtenues par dénombrement des carreaux du clan *recouvrant* la surface du rectangle est, selon les cas, 12 et 20). Admettons provisoirement l'existence de deux nombres a et a' exprimant les mesures des deux rectangles :

$$2 < a < 12 \qquad 6 < a' < 20$$

Il faudra sans doute freiner l'ardeur de certains élèves ayant tôt fait de poser

$$a = a' \quad \text{et} \quad 6 < a < 12$$

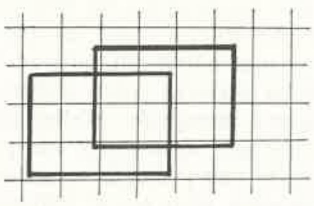


FIG. 5.

Mieux vaut, plus posément, plonger le premier clan dans un second plus riche (par subdivision des segments en deux si le système de numération binaire a été adopté, en dix si c'est en numération décimale) et étudier les nouvelles mesures b et b' obtenues.

L'exercice est à effectuer sur papier millimétrique avec une surface de forme quelconque obtenue par reproduction mécanique mais la position de la surface sur le quadrillage variant d'une copie à l'autre. On peut d'ailleurs se contenter de faire dessiner par les élèves soit un cercle de rayon donné, soit pour éviter chez des faux malins le recours à une formule connue, une surface plus compliquée (fig. 6).

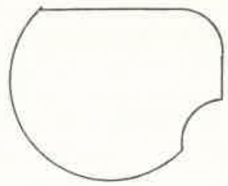


Fig. 6.

Aurons-nous, par de tels exercices, préparé nos élèves à comprendre, plus tard, une théorie de la mesure qui leur sera indispensable dès qu'ils prendront contact avec les probabilités? Il me semble, en tout cas, que cela ne les empêchera pas de résoudre les problèmes de carrelage de cuisine que je paraissais mépriser au début alors que, à Ostia ou à Vaison-la-Romaine, j'admire les solutions que des artisans des vieux âges ont imaginées.

G. W.

N'allez pas croire...

Extrait d'une lettre d'un collaborateur qui nous a beaucoup aidé dans la composition de ce *Bulletin* et qui, par conséquent, en a lu les matériaux.

« N'allez pas croire que les manuels, les nouveaux qui viennent de paraître, soient nécessairement plus mauvais que les anciens, ou meilleurs. N'allez pas croire que si vous enseignez autrement qu'avec des fiches ou que, si vous utilisez des fiches vous ne les perforez point, n'allez pas croire que pour cette raison vous êtes un pédagogue rétrograde. N'allez pas croire enfin, si vous ne savez pas travailler en équipe, que votre œuvre très personnelle soit sans valeur.

Je reviens sur les manuels dont j'entends les critiques les plus vives. Je m'en réjouis s'il y a là manifestation d'un esprit critique aiguisé et si la critique est faite sous la forme qui convient, c'est-à-dire favorable à un progrès collectif de notre enseignement. Je m'en inquiète au contraire si la diversité des conceptions, les écarts entre les terminologies font progresser cette opinion qu'un manuel unique et officiel nous préserverait de ces maux. Même si c'était vrai, pensez aux maux bien plus graves que nous infligerait de façon certaine le manuel officiel, je veux dire le catéchisme de Grenelle.

Mieux vaut mille fois cette diversité et notre coopération au sein de l'A.P.M.E.P. pour trier et apprendre à trier. »

Evariste Dupont.

3

Les mots

Aucune préoccupation n'est plus vive, chez les maîtres, que celle du choix d'un bon vocabulaire. Malheureusement, les mots ont une vie ; donc ils changent, certains naissent, d'autres meurent. Pour la langue elle-même, c'est une bonne chose qu'elle soit vivante. Pour l'enseignement, cela présente des difficultés.

Le sujet n'est pas nouveau. C'est une des raisons qui animent la Commission du Dictionnaire de l'A.P.M.E.P., responsable de la rédaction des notices *insérées dans chaque* Bulletin *et dont la réunion forme ce recueil « La Mathématique parlée par ceux qui l'enseignent » en perpétuelle évolution. On trouvera d'ailleurs dans ce Bulletin deux de ces notices : « fraction », « quotient ».*

Le problème du vocabulaire se pose-t-il de façon particulièrement aiguë à propos de la réforme en Sixième ? Si nous en croyons nos correspondants, la réponse est « oui ».

En tout cas, toutes les occasions sont bonnes d'étudier le sens des mots, la vie des mots. Et ce que nous ferons pour la Sixième, nous en profiterons tous, élèves et professeurs.

Ne dites pas... mais dites...

J.-M. Chevallier,
Secrétaire de la Commission du Dictionnaire de l'A.P.M.E.P.

Ce petit « Guide du langage » ne vise, en dépit de son titre, ni à interdire, ni à imposer; d'ailleurs la langue mathématique, comme toutes les langues, ne connaît pour maître que l'usage, et c'est une coupable imprudence de légiférer contre lui. C'est pourquoi dans la plupart des cas les « conseils » donnés seront en fait de simples constatations; parfois on a essayé de dégager un choix ou une tendance lorsque l'usage hésite ou évolue; c'est seulement lorsqu'il risque de créer des confusions graves qu'on a cru devoir en faire la critique. La même ligne de conduite a été adoptée en ce qui concerne les notations. Sous ces réserves, nous croyons cependant nécessaire d'attirer l'attention des collègues sur les inconvénients qui résultent, surtout au niveau élémentaire, d'une trop grande dispersion du vocabulaire et des notations : si l'on multiplie l'individualisme des auteurs de manuels par l'individualisme des enseignants, le « produit » sera la confusion chez nos élèves. Pensons à eux!

1. Ensembles.

1.1. Lien d'*appartenance* entre un élément et un ensemble : $\in$, lu « est élément de » ou « appartient à »; *non-appartenance :* $\notin$.

1.2. Définition des ensembles dite *en extension :* l'ensemble constitué des trois éléments a, b, c se note $\{a, b, c\}$, l'ordre des lettres n'intervenant pas. Proscrire comme *fautive* une écriture telle que $\{a, b, a\}$ est sévère, mais il faut absolument éviter de dire qu'elle représente un ensemble à *trois* éléments, c'est en réalité la *paire* $\{a, b\}$. On rappelle par ailleurs la distinction entre l'élément a et le *singleton* $\{a\}$; l'écriture $a \in \{a\}$ est correcte.

1.3. Définition des ensembles dite *en compréhension* par une « propriété caractéristique » de leurs éléments : notations $\{x;\ x \text{ a la propriété } p\}$, $\{x \mid x \text{ a la propriété } p\}$, le plus souvent abrégées en $\{x; p\}$ ou $\{x \mid p\}$. Rejeter les écritures telles que {les doigts de ma main droite} qui n'ont d'ensembliste que l'accolade.

1.4. *Ensemble vide :* $\varnothing$; quel que soit l'élément a, $a \notin \varnothing$.

1.5. On rappelle qu'il est impossible de considérer « l'ensemble de tous les ensembles » sans tomber dans des paradoxes. Élémentairement, il sera sage de se placer d'emblée dans un *univers* (ou *référentiel*) dont on s'interdira de sortir, afin d'éviter des difficultés de langage qui, à ce niveau, seraient des subtilités.

2. Parties d'un ensemble, sous-ensembles.

(Pour l'inclusion, voir § 7.)

2.1. *Intersection :* $A \cap B$, lu « A inter B »; on dit que deux ensembles sont *disjoints* si leur intersection est l'ensemble vide. Se rappeler que l'intersection est elle-même un ensemble, éventuellement un singleton, *jamais* un élément a : on peut écrire $A \cap B = \{a\}$, mais non $A \cap B = a$.

2.2. *Réunion :* $A \cup B$, lu « A union B ».

2.3. La *différence ensembliste*, la *différence symétrique*, le *complémentaire* ne sont pas explicitement au programme; leurs notations respectives les plus usuelles sont : $\setminus$ (de préférence à — pour éviter toute confusion avec la soustraction), Δ, et $\complement$ ou le surlignage : A\B, A Δ B, $\complement$A ou $\overline{\text{A}}$. (On croit parfois devoir préciser $\complement$ en $\complement_{\text{B}}$: ce n'est pas absolument recommandable si l'on veut garder le parallélisme entre la complémentarité ensembliste et la négation logique; on dispose d'ailleurs de E\A pour la nuance qu'on souhaite exprimer ainsi.)

3. Produit cartésien; couple.

3.1. Le *produit cartésien* ne figure pas explicitement au programme; si le mot et la notation A $\times$ B risquent de créer des confusions avec le produit de deux nombres, l'expérience semble prouver que la notion « passe » bien chez les élèves.

3.2. *Couple:* notation (a, b). A distinguer rigoureusement de la paire $\{a, b\}$ en ce sens que (a, b) *diffère* de (b, a) et que (a, a) est un véritable couple. Éviter d'appeler a et b les « éléments » du couple (a, b); on peut dire *première* et *deuxième composantes*. Généralisation : triplet (a, b, c), etc.

4. Ensembles numériques.

4.1. L'ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3...\}$ est l'ensemble des *naturels*; si les élèves ont été habitués à dire « entiers » dans l'enseignement primaire, l'expression « entiers naturels » semble tout indiquée pour faciliter la transition.

4.2. L'ensemble $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des *entiers;* l'expression « entiers relatifs », actuellement pléonastique, ne présente pas grand intérêt; elle peut être conservée à titre transitoire.

4.3. On peut désigner par $\mathbb{D}$ l'ensemble des décimaux, par $\mathbb{D}_1$, $\mathbb{D}_2$..., l'ensemble des décimaux ayant 1, 2... décimales (décimaux d'ordre 1, 2...).

4.4. Une convention assez générale consiste à marquer d'un astérisque les symboles des ensembles précédents (ainsi d'ailleurs que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$) lorsque ces ensembles sont privés de l'élément zéro; par exemple $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$. On a également coutume de les marquer d'un + pour indiquer le sous-ensemble de leurs éléments positifs ou nuls, par exemple $\mathbb{Z}^+$.

5. Ensembles géométriques.

5.1. Les mots *droite*, *demi-droite*, *segment*, *plan*, *demi-plan*, *cercle*, *disque* ne prêtent pas à controverse au niveau élémentaire, non plus que les adjectifs *fermé*, *ouvert*, *semi-ouvert* qui les précisent en cas de besoin.

5.2. Le mot *secteur* (auquel « angulaire » n'ajoute rien) ne sert guère que dans les énoncés de caractère très général; il peut donner lieu — suivant la définition adoptée — à quelques difficultés lorsque les bords sont confondus. De toute façon il est réservé à la désignation d'ensembles ponctuels (les anciens « angles saillants » et « angles rentrants »); dans la plupart des cas pratiques les mots *saillant* et *rentrant*, employés seuls (substantivement), le remplacent avantageusement. Par exemple : si deux saillants aigus sont adjacents, leur réunion est un saillant (on évitera naturellement de parler de « somme »).

L'ancienne expression *secteur circulaire* — ou *secteur de disque* — reste utilisable mais l'abréger en « secteur » comme on le faisait fréquemment ne peut plus être admis.

5.3. Le mot *angle* — dont le programme *tolère* assez malencontreusement la synonymie avec *secteur* — est en fait employé par les manuels avec des acceptions discordantes; un sondage fait par l'A.P.M. auprès des professeurs n'a pas donné de résultats nets; dans l'état *actuel* des choses, c'est un mot dont il convient de se défier. On peut parler de « classe angulaire » de secteurs; le mot « amplitude » est également controversé.

5.4. Le sens du mot *bande* — partie du plan comprise entre deux parallèles — était devenu classique depuis plusieurs années. Le changement de vocabulaire introduit par certains auteurs (« bande » pour la réunion des bords, et « ruban » pour l'ancienne « bande ») est d'un intérêt très discutable.

5.5. Notations. Il subsiste des divergences notables d'un manuel à l'autre; un essai d'harmonisation tenté par le *Bulletin* a été adopté localement par certains collègues. Nous le donnons à titre indicatif :

Droite : (AB), (xy);
Demi-droite : [AB), $[\mathrm{A}x)$;
Segment : [AB], de « longueur » AB;
Saillant : $[\widehat{x\mathrm{O}y}]$, de « classe angulaire » $\widehat{x\mathrm{O}y}$;
Rentrant : $[\overset{\smile}{x\mathrm{O}y}]$, de « classe angulaire » $\overset{\smile}{x\mathrm{O}y}$;
Arc : $[\overset{\frown}{\mathrm{AB}}]$ ou $[\overset{\smile}{\mathrm{AB}}]$, de classe $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ ou $\overset{\smile}{\mathrm{AB}}$;
Bande : [D, D'].

Remarques :

1. En cas d'ensembles ouverts ou semi-ouverts, changement habituel du sens des crochets.

2. Je ne maintiens pas ma suggestion du n° 268 d'appeler « arceau » l'ensemble ponctuel $[\overset{\frown}{\mathrm{AB}}]$ ou $[\overset{\smile}{\mathrm{AB}}]$.

6. Relations.

6.1. L'*ensemble de départ* ou *source* étant E, l'*ensemble d'arrivée* ou *but* étant F, le *graphe* étant G, on dit « relation *de* E *vers* F » et l'on peut préciser « *par* G ».

6.2. Lorsque F se confond avec E, on peut dire « relation *dans* E »; on a intérêt à réserver « relation *sur* E » pour le cas où la relation est définie *à partir de* n'importe quel élément de E et aussi *vers* n'importe quel élément de E (par exemple, relation d'équivalence sur E, relation d'ordre total sur E, relation d'ordre partiel dans E).

6.3. Réserver la flèche strictement aux applications : $\mathrm{E} \rightarrow \mathrm{F}$; ne pas confondre cette flèche, écrite entre les ensembles, avec le *béquillon* $\mapsto$ (beaucoup plus précis et également réservé aux applications) qu'on fait précéder de l'élément qui décrit l'ensemble de départ, par exemple l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par $n \mapsto 3n$.

7. Relations particulières.

(entre ensembles ou nombres).

L'attention est attirée sur le fait que le langage parlé énonce en général les symboles qui vont suivre sous une forme *adjective ;* cette abréviation, tolérée bien qu'abusive, ne doit pas faire oublier que dans l'écriture ces symboles (ainsi que le symbole d'appartenance $\in$) ont exclusivement valeur de *verbes.*

7.1. Égalité : $=$ « est égal à »; *non-égalité :* $\neq$ « est différent de ».

7.2. Inclusion : $\subset$ « est inclus dans »; *non-inclusion :* $\not\subset$ « n'est pas inclus dans ». Après beaucoup d'hésitations, la tendance est nettement favorable au sens « large », c'est-à-dire que $A \subset A$; si l'on veut exprimer que l'inclusion est « stricte » on écrit : « $B \subset A$ et $B \neq A$ ».

7.3. Supériorité et infériorité :
$>$ « est supérieur à »; $<$ « est inférieur à »;
$\geqslant$ « est supérieur ou égal à », « est au moins égal à », « n'est pas inférieur à »;
$\leqslant$ « est inférieur ou égal à », « est au plus égal à », « n'est pas supérieur à ».

7.4. Les signes d'opérations dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ ne font pas de difficulté.

8. Symboles logiques.

On peut considérer que leur emploi n'est pas indispensable en Sixième et se contenter en particulier des mots *non* pour la négation, *et* pour la conjonction, *ou* pour la disjonction. On ne saurait trop mettre en garde les collègues contre les pièges des symboles $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$, imprudemment introduits par beaucoup de manuels. A ce niveau, et en l'absence de quantificateurs, le rejet pur et simple paraît une attitude sage; en tout cas, contrairement à la remarque du § 7, on notera que ces symboles *n'ont pas valeur de verbes,* si bien que leur traduction par « implique » et « équivaut à » aboutit presque régulièrement à un contre-sens. (Voir l'article de M GLAYMANN, *Fonctions caractéristiques des connecteurs, Bulletin* 258, p. 165.)

J.-M. C.

Tout le monde sait qu'il y a des dictionnaires qui ne se mentionnent pas. Le mot *mathématique* figure-t-il parmi les notices de « mathématique parlée par ceux qui l'enseignent » ?

Réponse : p. 373; ou mieux : consultez *votre* exemplaire.

Notions et vocabulaire modernes en Sixième

E. DEHAME,
et l'équipe des expérimentateurs de Poitiers-Couhé

1. Mise en garde contre l'abus du vocabulaire et du symbolisme.

1.1. En quoi consiste l'introduction en Sixième de mathématiques dites « modernes »?

Une croyance trop répandue consiste à assimiler les mathématiques modernes à un langage un peu pédant réservé à quelques initiés. S'il est vrai que le traité de N. BOURBAKI paraît plus hermétique aux non-mathématiciens que les traités de mathématiques classiques, il est absolument hors de question d'introduire en Sixième l'esprit et le langage de cet éminent mathématicien.

La réforme actuelle de l'enseignement des mathématiques dans le premier cycle ne devrait pas s'appeler « introduction des mathématiques modernes », car il n'y a pas deux sortes de mathématiques, mais une science unique — la mathématique — qui évolue avec le temps. Et personne ne peut prétendre introduire en Sixième la mathématique de 1969.

Plutôt que de « mathématiques modernes », il faudrait parler d' « enseignement moderne de la mathématique ». Contrairement à l'enseignement traditionnel qui se bornait trop souvent à dresser les élèves à des techniques opératoires et à la résolution de problèmes-types, cet enseignement moderne est une initiation à de véritables notions mathématiques à partir de situations familières :

— Un premier objectif de cet enseignement est d'amener les élèves à raisonner, à prendre des initiatives, à se poser des problèmes sur des sujets qui ne comportent aucune notion mathématique apparemment nouvelle.

— Ensuite, par le rapprochement de plusieurs situations familières comportant une analogie de structure non perçue *à priori* par les élèves, un nouveau concept mathématique s'élabore dans leur esprit.

— C'est seulement quand les élèves ont pris conscience de ce concept que se fait sentir la nécessité d'un mot pour le désigner, et éventuellement d'un symbole pour le noter.

— Ensuite, ce concept, appelé par son nom, est appliqué à l'étude d'autres situations.

Les fiches de Poitiers sur l'introduction de la notion d'application fournissent un exemple où ces quatre étapes sont nettement démarquées (voir ci-dessous : § 3).

1.2. *Dangers de l'abus du vocabulaire et du symbolisme.*

L'introduction prématurée d'un vocable ou d'un symbole présente, entre autres, les dangers suivants :

— Le risque qu'un contre-sens systématique sur ce vocable ou sur ce symbole s'établisse dans l'esprit de l'élève, y demeure au cours de toutes ses études et lui rende obscures toutes les phrases où figure ce vocable ou ce symbole.

— La perte d'intérêt pour une étude ultérieure du concept sous-jacent que l'enfant croit déjà posséder.

— L'incitation à jongler avec les mots ou avec les symboles en faisant abstraction de leur sens : encouragement au verbalisme, développement d'automatismes nouveaux aussi néfastes que les automatismes que nous reprochons à l'enseignement traditionnel.

L'engouement pour la mathématique des élèves des classes de Sixième expérimentales nous laisse espérer que l'enseignement moderne de cette discipline préservera un grand nombre d'entre eux de la désaffection à l'égard des études scientifiques, si fréquente dans nos actuelles classes de Quatrième et de Troisième. Cet espoir risque d'être déçu si nous cédons à la tentation d'introduire dès la Sixième un trop grand nombre de mots qui font partie du langage mathématique des adultes, mais qui, chez l'enfant de 11 ans, n'évoquent qu'une idée vague, un concept mal assimilé; le discours mathématique risquerait de n'être compris que par quelques privilégiés et de se réduire à un verbalisme vide de sens pour les autres : nous ne sortirions pas des préjugés actuels sur la « bosse des maths ».

Or une conclusion indéniable de l'expérience sur l'introduction en Sixième des nouveaux programmes est précisément la possibilité d'éliminer ces préjugés : peu d'élèves se déclarent « faibles en mathématiques », et la nouveauté de la matière et de la méthode d'enseignement a permis aux « faibles en calcul » de l'école primaire de s'épanouir.

Ne gâchons pas cet espoir de revalorisation des études scientifiques en cherchant à trop bien faire! Une certaine sobriété dans le choix des notions (et par suite des symboles et des mots) à introduire est une des meilleures garanties de succès.

1.3. *Manuels ou fiches?*

Or, si on ouvre l'un quelconque des manuels récemment parus sur le nouveau programme de Sixième, on y trouve un grand nombre de notions ne figurant pas explicitement au programme : réflexivité, symétrie, transitivité, associativité, commutativité, distributivité, etc., et même parfois des notions de logique : « ou non exclusif », « si et seulement si », etc.

Il est peu vraisemblable qu'un élève moyen soit capable de posséder correctement toutes ces notions en sortant de Sixième. Le professeur qui utilise le manuel devra donc faire un choix parmi toutes ces notions.

Pour chaque classe C de Sixième, on peut chercher à définir l'ensemble E_c des connaissances qu'il est raisonnable d'exiger des élèves à la fin de l'année scolaire. Cet ensemble dépend du nombre d'élèves, de leur niveau, de l'horaire et peut-être aussi du dynamisme du professeur.

Il semble que les auteurs de manuels aient choisi de présenter dans leur ouvrage la borne supérieure (la réunion) de tous les ensembles E_c. Ce choix est facilement compréhensible (les manuels s'adressent à toutes les classes) et présente l'intérêt d'apporter aux professeurs une information sous une forme directement enseignable, ce qui complète utilement les autres formes de recyclage (livres destinés aux professeurs).

Le programme officiel — heureusement pas trop explicite — peut être considéré comme la borne inférieure (l'intersection) des ensembles E_c (1). Seul le professeur de la classe C est qualifié pour déterminer E_c, mais il ne peut le faire que par approximations successives, selon les réactions des élèves.

Comment utiliser le manuel? Le professeur pourrait recommander aux élèves la lecture de certains paragraphes (ceux qui traitent de questions appartenant à E_c) et l'étude des exercices correspondant à ces paragraphes. Mais j'avoue que cette solution n'est pas facilement réalisable : le manuel forme un tout; les notions hors-programme introduites dans un chapitre sont utilisées dans les chapitres suivants. Je crains que le seul choix effectivement réalisable consiste à conserver intégralement les deux premiers tiers du manuel et à laisser tomber le dernier tiers, ce qui n'est évidemment pas une solution satisfaisante.

La méthode d'enseignement par fiches est plus souple. Les fiches sont distribuées aux élèves au début de chaque séance. Même si les fiches ont été élaborées dans le même esprit d'universalité que les manuels, c'est-à-dire si elles présentent la borne supérieure des ensembles E_c, il est toujours possible au professeur de ne pas distribuer une certaine fiche, et éventuellement de la remplacer par une fiche de sa fabrication ou par des exercices dont il dicte l'énoncé.

L'utilisation d'un manuel ou de fiches ne sont pas les seules méthodes possibles. Le professeur peut, par exemple, dicter des énoncés d'exercices choisis dans les manuels ou les fiches actuellement édités, et ensuite élaborer avec la classe une synthèse d'où se dégage une nouvelle notion mathématique.

De toute façon, quelle que soit la méthode adoptée, le rôle du professeur pour la détermination des notions à introduire est primordial. Ce serait un grave danger de croire que tout ce qui figure dans les manuels constitue un bagage indispensable pour l'entrée en Cinquième.

1.4. Un minimum de vocabulaire est toutefois nécessaire.

Quand un concept est acquis, il n'y a pas lieu d'hésiter à lui donner un nom. Une notion qui n'a pas reçu de nom se fixe difficilement dans la mémoire de l'enfant.

La mémoire, dira-t-on, n'a rien à faire dans un enseignement qui se veut moderne! Personnellement, je ne suis pas de cet avis, mais je pense que la fixation dans la mémoire est simultanée à l'acquisition du concept : il ne s'agit pas de fixer une phrase ni une formule, mais un ensemble de situations où intervient le concept.

Définir dans toute sa généralité la réunion de deux ensembles au moyen d'une phrase est un exercice d'expression orale ou écrite qui a une valeur formatrice indéniable; mais tant que l'enfant n'est pas capable de bâtir lui-même cette phrase, il serait vain et même nuisible de la lui faire apprendre par cœur. Dans une première phase de l'initiation, le concept de réunion peut être mémorisé à la fois visuellement par des diagrammes de Venn et affectivement par le souvenir des exemples concrets de

(1) Sauf en ce qui concerne la mesure (voir 2.5.).

réunion qui ont de plus frappé l'enfant (la réunion de l'ensemble des internes et de l'ensemble des élèves qui font de l'anglais, etc.). Mais que resterait-il dans la mémoire de l'enfant si celui-ci ignorait que tous ces exemples illustrent une même notion qu'on appelle la réunion?

Le symbole, comme le mot, favorise la mémorisation; il a même l'avantage d'être plus visuel. Mais est-il vraiment nécessaire que chaque notion soit accompagnée à la fois d'un mot et d'un symbole? Si la notion (hors-programme) de complémentaire peut éclairer certaines parties du programme de Sixième, je ne trouve pas que le symbole $\complement_E A$ soit particulièrement éclairant.

On pourrait penser que, pour des enfants, un vocabulaire choisi par eux ou, tout au moins puisé dans leur univers, serait préférable au vocabulaire mathématique des adultes. Ce principe me paraît défendable jusqu'à un certain âge, mais je pense qu'à partir de la Sixième il ne faut pas en abuser : tous les ans, les élèves seraient amenés à réviser leur vocabulaire; l'ensemble des mots introduits au cours de leur scolarité en serait alourdi.

Toutefois, si les notations normalisées sont des sources de confusion, on peut utiliser des notations provisoires. Ainsi, dans

$$-(-6)-(+4)=+2$$

le signe — a trois sens différents; cette ambiguïté disparaît si on écrit :

$$\text{opp}\,(\bar{6})-\overset{+}{4}=\overset{+}{2}.$$

Signalons enfin que certaines locutions qui ne correspondent pas à proprement parler à des notions mathématiques peuvent être introduites pour faciliter le dialogue avec les élèves : par exemple, il est commode de parler du « lien verbal » d'une relation, de sa représentation sagittale, etc.

2. Notions et vocabulaire introduits à Poitiers.

Les nouveaux programmes de Sixième ont été expérimentés deux années consécutives (1967-1968 et 1968-1969) par l'équipe de Poitiers-Couhé. Il s'agit ici des notions qui ont été introduites durant la deuxième année d'expérience (1968-1969).

Les notions d'ensemble et de relation intervenant tout au long du programme, il a paru naturel de les introduire en début d'année et de leur consacrer une bonne partie du premier semestre, *en alternance avec le calcul numérique qui n'a pas été négligé.*

2.1. Les ensembles. ont été introduits à partir d'exemples tirés de la vie courante. Le symbole $\in$ a été lu *« est élément de »* plutôt que « appartient à », afin d'éviter la confusion entre l'appartenance et l'inclusion (et aussi entre l'appartenance mathématique et l'appartenance au sens commun : « le ballon de football appartient à l'équipe »). C'est aussi pour éviter cette confusion qu'il nous a semblé préférable de n'introduire l'inclusion qu'après l'étude des relations.

Les instructions officielles du 28 février 1969 précisent qu'il n'y a pas lieu de s'attarder sur la définition en extension et la définition en compréhension; en effet, il n'est pas nécessaire d'introduire ces mots, mais il est intéressant de mettre en évidence ces deux façons de définir un ensemble et de proposer en exercice le passage de l'une des définitions à l'autre pour un même ensemble : c'est l'occasion de faire en même temps un exercice de mathématiques et un exercice d'utilisation de la langue française. Il est bien entendu que la définition en compréhension pour un élève de Sixième consiste à exprimer en français une propriété caractéristique (1) des éléments de l'ensemble et que l'écriture

$$\{x;\ x \in \mathrm{E},\ x \text{ possède la propriété } p\}$$

n'est pas à recommander en Sixième, surtout au début de l'année, les élèves n'étant pas habitués à utiliser une lettre comme variable. A défaut de variable, nous avons renoncé aux accolades pour les ensembles définis en compréhension : nous n'avons pas remplacé

$$\{x;\ x \in \mathbb{N},\ x < 10\}$$

par l'écriture incorrecte

$$\{\text{naturels inférieurs à } 10\}$$

mais par la définition en français :

« l'ensemble des naturels inférieurs à 10 »

Les *accolades* ont donc été réservées exclusivement aux définitions en extension :

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

2.2. La notion de relation. (2) est une des plus faciles pour un élève de Sixième et peut être abordée dès le début de l'année à partir de situations familières.

Une relation de E vers F est tout d'abord définie par les trois données suivantes :

— un *ensemble de départ* E,
— un *ensemble d'arrivée* F,
— un *lien verbal.*

Il est ensuite possible de considérer des relations qui ne sont pas définies par un lien verbal, mais par un ensemble de couples dont le premier terme est élément de E et dont le second est élément de F. Nous n'avons pas introduit les termes « graphe » ni « produit cartésien », mais le mot *« couple »* demande à être précisé et bien distingué du mot *« paire ».*

L'élève est en général séduit par les schémas *sagittaux* et *cartésiens* utilisés pour représenter les relations, et il éprouve un sentiment de réconfort à pouvoir exprimer clairement une situation parfois compliquée sans se heurter aux difficultés que présente pour lui l'utilisation de la langue française.

La notion de *relation réciproque* d'une relation donnée est naturelle et son interprétation sur les schémas est facile. Le passage du lien verbal d'une relation au lien

---

(1) Ce mot n'a pas été employé devant les élèves. Estimant qu'une véritable initiation à la logique ne pouvait être entreprise qu'en Cinquième, nous avons écarté tout le vocabulaire de la logique, et nous n'avons pas utilisé de symboles tels que $\Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall, \exists$.

(2) Nous avons dit « relation » et non « relation binaire ». N'ayant pas à envisager en Sixième de relations entre plus de deux éléments, ce qualificatif nous a paru encombrer inutilement le langage.

verbal de la relation réciproque donne d'ailleurs l'occasion de « cultiver chez l'élève le souci d'expression » comme le recommandent les instructions officielles.

Par l'étude des schémas sagittaux, on est conduit à s'intéresser plus particulièrement aux relations pour lesquelles, de chaque élément de l'ensemble de départ, part une flèche et une seule : ce sont les *applications* (voir § 3). Une application dont la réciproque est une application est une *bijection.*

C'est toujours à partir d'exemples tirés de la vie quotidienne que la *composition de deux relations* a été présentée : si $\mathcal{R}$ est une relation de E vers F, $\mathcal{S}$ une relation de F vers G, on peut définir une relation de E vers G que l'on appelle, pour les élèves de Sixième, $\mathcal{R}$ *suivie de* $\mathcal{S}$.

2.3. *Commentaires.*

Dans le paragraphe 1 du programme de Sixième, on lit : « description précise de relations et de leurs propriétés ». Comment doit-on interpréter cela? Les instructions du 28 février laissent entendre que les mots « symétrie », « réflexivité » et « transitivité » peuvent être prononcés, mais qu'il faut éviter le mot « bijection ».

Nous ne sommes pas d'accord avec cette interprétation.

— D'abord parce que les notions d'application et de bijection (surtout de bijection) sont facilement assimilées par les élèves et peuvent être utilisées tout au long du programme. S'il ne fallait conserver qu'une seule de ces deux notions, ce serait celle de *bijection* (qu'on peut présenter sans parler d'application) : on trouve des bijections partout, depuis la première leçon où on est amené à coder de deux façons différentes les éléments d'un même ensemble jusqu'à la dernière où l'on met en évidence une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}^+$; la notion de bijection est une source de jeux (codes secrets) qui intéressent beaucoup les élèves.

— Ensuite parce que l'expérimentation du nouveau programme de Cinquième a montré que l'étude des relations dans un ensemble présentait des difficultés, en particulier à propos de la transitivité : il faut déjà avoir une certaine formation mathématique pour admettre que l'implication :

$$\text{« si } x\mathcal{R}y \quad \text{et} \quad y\mathcal{R}z, \quad \text{alors } x\mathcal{R}z \text{ »}$$

est vérifiée quand il n'existe dans $E \times E$ aucun couple d'éléments distincts (x, y) tel que $x\mathcal{R}y$.

L'antisymétrie est aussi une notion difficile. Aussi avons-nous considéré que les relations d'équivalence et les relations d'ordre sont entièrement en dehors du programme de Sixième (en cela, nous sommes d'accord avec les instructions officielles).

Toutefois, des exercices où interviennent des relations dans un ensemble E (cas où E est à la fois ensemble de départ et ensemble d'arrivée), mais ne conduisant à aucune notion nouvelle, ont permis de préciser la notion de couple : distinction entre les couples (a, b) et (b, a), introduction de couples du type (a, a).

2.4. *Notions sur les parties d'un ensemble.*

Les notions de *sous-ensemble* (ou *partie*) et *d'inclusion*, ainsi que le symbole $\subset$ ont été introduits plusieurs mois après le symbole $\in$. Plusieurs exercices avaient pour but la distinction de ces deux symboles et de ces deux notions. Cette expérience n'a pas été très concluante : même introduites à deux époques éloignées l'une de l'autre, ces deux notions sont encore souvent confondues par les élèves; il faudra y revenir en Cinquième.

Des exercices de dénombrement (au moyen d' « arbres ») ont permis de construire toutes les parties d'un ensemble et de donner une première idée de la notion de complémentaire, mais c'est seulement en Cinquième que ces notions seront étudiées et que l'on introduira les locutions « ensemble des parties », « complémentaire » et les symboles $\mathcal{P}(E)$, $\complement_E A$.

La définition de l'*intersection* (ensemble des éléments communs à A et B) et des *ensembles disjoints* ne présente pas de difficulté. Pour définir la *réunion* en évitant toute ambiguïté sur le sens du mot « ou », nous avons précisé : « les éléments qui appartiennent soit à l'ensemble A, soit à l'ensemble B, soit aux deux ensembles à la fois ».

Les exercices sur l'intersection et la réunion n'avaient pour but que de préciser ces notions en variant les exemples concrets et en variant la situation mathématique (cas de deux ensembles disjoints, de deux ensembles inclus l'un dans l'autre, de deux ensembles égaux), mais l'étude des propriétés des lois de composition $\cap$ et $\cup$ (associativité, commutativité, etc.) ne sera abordée qu'en Cinquième.

Les trois symboles $\subset$, $\cap$, $\cup$ se ressemblent; mais le premier symbolise une relation entre les parties d'un même ensemble, les deux derniers des lois de composition dans l'ensemble des parties. Autrement dit, si A et B sont deux parties de E :

$A \subset B$ est l'énoncé d'une propriété vérifiée par (A, B),
$A \cap B$ est la désignation d'une troisième partie C.

Cette distinction a parfois été mal faite par les élèves : certains ont affirmé que « $A \cap B$ signifie qu'il y a des éléments communs à A et à B ».

Il semble qu'on pourrait éviter cette confusion en donnant la priorité aux mots (« est inclus dans », intersection) sur les symboles, et en prenant soin de faire souvent entrer ces mots dans des phrases :

« L'intersection de l'ensemble des blocs carrés et des blocs bleus est l'ensemble des blocs carrés bleus »; « L'ensemble des blocs carrés bleus est inclus dans l'ensemble des blocs bleus ».

Il est peut-être aussi préférable de ne pas prononcer le mot « inclusion » qui ressemble au mot « intersection ». La relation $\subset$ peut très bien être désignée par son lien verbal « est inclus dans », de même que la relation $\in$ a été désignée par « est élément de ».

2.5. Étude d'objets géométriques et physiques donnant lieu à mesure.

Nous avons considéré cet alinéa du programme comme une borne supérieure de ce qu'on peut traiter en Sixième : c'est une liste d'exemples parmi lesquels il faut choisir ceux qui se prêtent le mieux à l'introduction de la notion d'*encadrement* et aussi, dans la mesure où cela est possible en Sixième, à la *notion mathématique* *de mesure :* une mesure est une application qui, à certaines (1) parties d'un ensemble, associe un réel positif de façon que, si A et B sont des parties mesurables disjointes, la mesure de $A \cup B$ soit la somme des mesures de A et de B.

Des exercices sur les relations numériques et leurs représentations graphiques ont fait intervenir des mesures de longueur, de vitesse, de temps, de masse et de volume. La masse volumique a été introduite, mais sans grand succès.

La pratique de la mesure des longueurs a permis de préciser la notion d'encadrement.

Les aires et les volumes ont donné lieu à des exercices de caractère plus théorique, mais sans aucune prétention. Une tentative plus poussée avait été faite dans cette direction en 1967-1968 (notion de segment ouvert, de segment fermé; de carré ouvert, de carré fermé; étude de la réunion et de l'intersection de deux carrés fermés; relation entre l'aire de chacun des carrés, l'aire de leur réunion et l'aire de leur intersection; approche de l'aire d'un polygone quelconque par des encadrements de plus en plus fins), mais ces préoccupations théoriques sont trop éloignées de l'univers de l'enfant; cette année, nous avons préféré y renoncer.

En somme, dans ce chapitre, la seule notion nouvelle qui intéresse vraiment les élèves de Sixième est celle d'encadrement, mais il s'agit de la notion physique d'encadrement (imprécision des instruments de mesure) et non de la notion mathématique (encadrements de plus en plus fins conduisant à une mesure définie comme une limite).

2.6. Naturels, décimaux, entiers.

On lit dans le programme : « Contrôle de l'acquisition de la technique et du sens des opérations sur les nombres naturels... » Nous avons séparé nettement ce qui concerne la technique et ce qui concerne le sens.

Pour la technique, des exercices de calcul numérique (calcul mental, calcul écrit, calcul à la machine), sur les naturels et les décimaux en base dix, ont été répartis sur toute l'année.

Pour le sens, il ne s'agit pas simplement, comme le dit le programme, de contrôler une acquisition. Les opérations sur les naturels s'interprètent grâce à la notion de *nombre d'éléments* (ou *cardinal*) d'un ensemble fini (les mots « fini », « infini », n'ont pas été prononcés) Cette notion est introduite à partir des bijections.

Des exercices sur la numération dans différentes bases ont permis d'introduire la notion de *système de numération* et de consolider les techniques opératoires en ne les réduisant pas à de simples mécanismes (dans les systèmes non décimaux, nous nous sommes contentés de l'addition).

Les entiers (relatifs) ont été introduits, à partir de jeux, comme classes de couples de naturels (cf. *Bulletin* 259, p. 355). Les seules notions nouvelles pour les élèves étaient les notions classiques de valeur absolue, de signe, d'opposé, de « supérieur à », d' « inférieur à ». Les notations utilisées étaient $\overset{+}{5}$, $\overset{-}{3}$, ..., opp, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $>$, $<$. Nous n'avons pas introduit le symbole $\leqslant$ qui semble ne pas présenter d'intérêt pour les élèves tant qu'il relie deux nombres dont on sait à l'avance s'ils sont égaux ou non;

(1) Les parties mesurables d'un ensemble E pour une mesure donnée m forment un clan (si A et B sont mesurables, il en est de même de leur réunion et de leur différence). Il n'est pas question de préciser cela en Sixième.

ce symbole ne deviendra intéressant que quand les élèves auront la notion de variable (lettre susceptible de représenter n'importe quel élément d'un ensemble).

Nous avons systématiquement laissé de côté toute la terminologie relative aux lois de composition (associativité, commutativité, élément neutre, etc.). Nous pensons en effet que la notion même de loi de composition ne peut être acquise par les élèves de Sixième que si on y consacre une longue étude que les horaires et les programmes ne permettent pas. Il vaut mieux ne pas parler de commutativité que de dire « la somme est commutative » au lieu de « l'addition est commutative ». Pour l'intersection et la réunion, il y a une difficulté supplémentaire : « intersection » désigne à la fois une loi de composition (l'intersection est commutative) et le résultat d'une opération (l'intersection de A et de B); cette subtilité du langage ne pouvant pas être perçue par un élève de Sixième, nous n'avons jamais employé le mot « intersection » dans le sens de loi de composition.

3. Exemple d'introduction d'une notion.

Dans les classes de Sixième expérimentales de Poitiers et de Couhé, la notion d'application a été introduite en début d'année, aussitôt après les ensembles et les relations. Cette introduction a fait l'objet des fiches 3 et 4 reproduites ci-dessous.

3.1. Fiche 3 : Notion d'application.

Exercice I : — Voici les représentations incomplètes de deux relations; si vous savez que les ensembles représentés sont des ensembles de personnes et si vous savez que le lien verbal de l'une est « a pour mère », de l'autre est « a pour frère », pouvez-vous placer sur chaque représentation le lien verbal qui lui correspond.

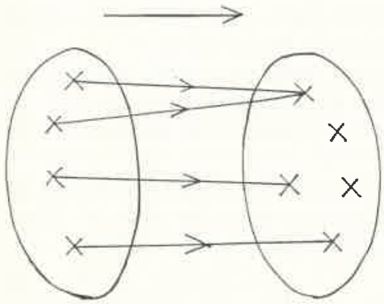


FIG. 1.

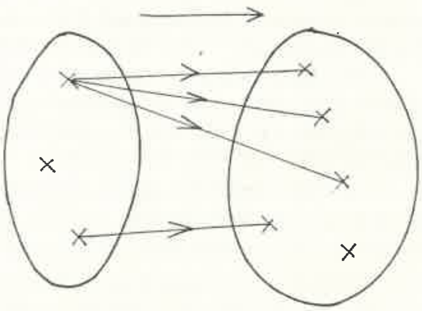


FIG. 2.

Exercice II : — Question analogue, mais vous savez que les ensembles de départ sont deux ensembles de départements et les ensembles d'arrivée deux ensembles de villes et les liens verbaux à placer sont « a pour préfecture », « a pour sous-préfecture ».

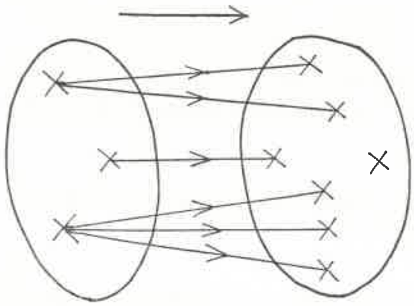


FIG. 3.

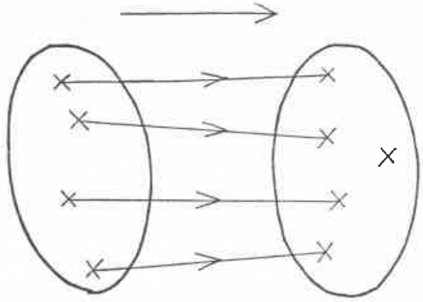


FIG. 4.

Exercice III : — 1° Question analogue. Les ensembles de départ et d'arrivée sont des ensembles de nombres et les liens verbaux à placer sont « est diviseur de », « est la moitié de ».

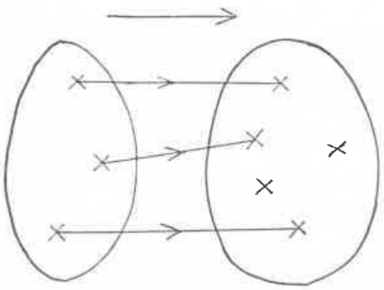


FIG. 5.

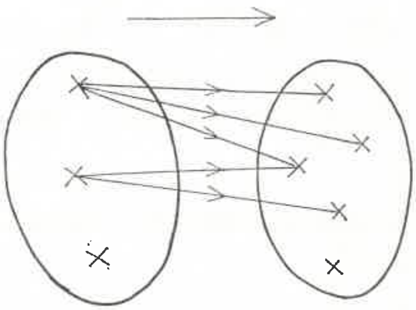


FIG. 6.

2° Complétez ces relations en attribuant à chaque élément des représentations, un nombre qui convienne.

3° Représentez par des tableaux cartésiens les deux relations que vous avez définies.

Exercice IV : — Les relations précédentes définies par « a pour mère », « a pour préfecture », « est la moitié de » possèdent une propriété commune. Énoncez-la.

3.2. Fiche 4 : Applications.

Dans la fiche précédente, vous avez remarqué qu'une personne a un père et un seul père, mais qu'une personne peut ne pas avoir de frère ou en avoir plusieurs; de même un département a une préfecture et une seule préfecture et un nombre a un double et un seul double. Ces remarques conduisent à poser la définition suivante :

On appelle *application* une relation dans laquelle chaque élément de l'ensemble de départ est en relation avec un seul élément de l'ensemble d'arrivée.

E. D.

Conséquence de cette définition.

On reconnaît qu'une relation est une application en remarquant que, dans la représentation saggitale, une flèche unique part de chaque élément de l'ensemble de départ.

Exercice I : — Comment reconnaissez-vous qu'une relation est une application lorsqu'elle est représentée par un tableau cartésien?

Exercice II : — Reprenez la première fiche sur les relations et indiquez pour chaque exercice si la relation étudiée est ou n'est pas une application.

Exercice III : — Parmi les relations suivantes, quelles sont celles qui sont certainement des applications?

ensemble de départ	lien verbal	ensemble d'arrivée
l'ensemble des élèves de la classe	a visité	un ensemble de villes de France
l'ensemble des élèves de la classe	est né à	l'ensemble des villes où sont nés ces élèves
l'ensemble des autos d'un parking	a pour numéro d'immatriculation	l'ensemble des numéros d'immatriculation de ces autos
un ensemble d'écrivains	a écrit	l'ensemble des livres écrits par ces écrivains
un ensemble de gares situées sur une même ligne de chemin de fer	est la gare où le train arrive à	l'ensemble des heures d'arrivée d'un même train dans chacune de ces gares

Exercice IV : — Vous venez dans les exercices II et III de reconnaître des relations qui sont des applications; indiquez pour chacune d'elles si la relation réciproque est aussi une application ou non.

Enquête sur les significations du mot « relation »

M.-A. Touyarot,
École Normale d'Instituteurs de Caen.

La pédagogie des mathématiques évolue... On se préoccupe par exemple explicitement dans les nouveaux programmes de la liaison avec l'étude du français, des significations diverses que peuvent avoir certains mots, communs au langage mathématique et au langage usuel. Le premier mot-piège, à notre avis, est ce mot magique qui sonne le renouveau des mathématiques, le mot « relation ».

Qu'est-ce qu'une « relation mathématique »? (une notion essentielle, nul n'en doute, mais encore...). Est-ce une notion primitive? On sait qu'alors il n'est pas possible d'en donner une définition. Ainsi personne n'oserait définir la notion d'ensemble, mais chacun conçoit bien quel genre d'objet est désigné sous ce nom, et tout le monde le conçoit semble-t-il de la même façon (depuis que la crise des paradoxes est passée).

Si l'on se pose cette question entre collègues, on s'aperçoit qu'elle déclenche des discussions souvent vives et même passionnées. En effet il faut avouer que le mot recouvre selon les uns ou les autres des objets mathématiques différents, non sans « relations » il est vrai des uns aux autres.

Si l'on cherche auprès des auteurs de bonne renommée un soutien pour son propre point de vue, on constate que cette notion si essentielle est rarement définie de façon claire, que tout en tournant autour du même sujet, les définitions précises ne coïncident pas et que ce sujet semble attirer plus que d'autres les abus de langage reconnus à l'avance. (Cette seule constatation suffit à ôter l'envie d'exprimer sa propre opinion d'un ton péremptoire.)

Alors se pose le problème pédagogique qui nous intéresse : comment rendre cette notion intelligible aux élèves de Sixième? Comment faire en sorte que les élèves, changeant de professeur, n'aient pas l'impression que l'anarchie (*) règne dans le langage mathématique?

Il est fréquent en effet de ne pas comprendre que les conventions de langage ne sont que des conventions et qu'une certaine discordance à ce niveau ne ternit en rien la pureté et la concordance des idées qui sont derrière les mots, et que ce sont les idées et non les mots qui font progresser la mathématique.

(*) Ou plutôt le désordre (N.D.L.R)

Voici quelques échos d'une assez large enquête à travers la littérature (mathématique) menée au mois de mars par un groupe de collègues à la recherche de ces divers sens du mot « relation ».

Les dictionnaires (Larousse, Robert) nous ont donné les sens courants que l'on connaît : le sens de « récit, narration », celui de « personnes » avec lesquelles on entretient des liens d'affaire, d'amitié, etc., et aussi le sens « philosophique » qui concerne ces liens eux-mêmes, celui de « rapport » existant entre deux objets.

En mathématique, on s'est tourné d'instinct vers les sources : BOURBAKI. Citons quelques extraits des *Éléments* ou du *Fascicule de Résultats* qui accompagne le Livre I. (Édition 1960) (F. R., p. 8) :

« Un *ensemble* est formé d'*éléments* susceptibles de posséder certaines *propriétés* et d'avoir entre eux, ou avec des éléments d'autres ensembles, certaines *relations* » (voilà le mot lâché).

Dans ce premier livre qui présente la mathématique formelle, il apparaît de façon très précise que toute théorie mathématique est constituée à partir de « termes » et de « relations ». Une remarque (Livre I, p. 16) explique :

« Intuitivement, les termes représentent des *objets*, les relations représentent des *assertions* que l'on peut faire sur ces objets. »

Dans tout l'ouvrage, BOURBAKI continue à envisager en ce sens les relations qui sont constamment en jeu. Elles sont désignées par les expressions R,R$\{x\}$, R$\{x, y\}$, montrant que les lettres x, y figurent dans les « phrases » ainsi représentées. Elles sont continuellement traitées comme des propositions logiques.

Chez BOURBAKI les relations ne sont donc pas autre chose que des énoncés (on dit parfois aujourd'hui des « formules » ou encore des « expressions bien formées ») soumis au jugement logique : un tel énoncé est vrai si c'est un axiome ou s'il a été démontré; faux, s'il est démontré que sa négation est vraie.

D'autres auteurs adoptent le même point de vue :

— Marc BLANC-LAPIERRE *(Mathématique moderne à l'usage du physicien et de l'ingénieur)* (p. 27) :

« Notre pensée distingue trois sortes d'énoncés :

» — ceux qui représentent des termes;

» — ceux qui représentent des relations entre les termes;

» — ceux qui représentent les propositions que l'on obtient à l'aide d'une relation, pour un système de valeurs attribuées aux termes...

» Une relation renferme un ou plusieurs termes x, y, z variables, ce que l'on note : R$\{x\}$, R$\{x, y\}$, R$\{x, y, z\}$, etc.

» Pour tout système de valeurs a, b, c,... attribuées à ces variables, on peut dire si le nouvel énoncé obtenu R$\{a\}$, R$\{a, b\}$, R$\{a, b, c\}$, etc, a un sens ou n'en a pas.

» S'il a un sens ce nouvel énoncé prend le nom de *proposition.* »

(P. 30) :

« R$\{x\}$ est une relation monaire ou fonction propositionnelle à une variable.

» R$\{x, y\}$ est une relation binaire ou fonction propositionnelle à deux variables... »

— KURATOWSKI *(Introduction à la théorie des ensembles et à la topologie)* (p. 31) :

« On appelle une fonction propositionnelle de deux variables une *relation*, au sens de la logique. »

Poursuivons notre enquête...

Lorsque les variables x, y, etc., sont des *éléments d'ensembles donnés*, un fait intéressant se produit : à toute relation (logique) $R\{x\}$, $R\{x, y\}$, $R\{x, y, z\}$, se trouve associé l'ensemble des objets x ou des couples (x, y) ou des triplets (x, y, z)... pour lesquels la relation est vraie.

— BOURBAKI (F. R., p. 21) :

« Une relation R entre un élément générique x d'un ensemble E et un élément générique y d'un ensemble F est une propriété du couple (x, y) et définit par suite une partie du produit E × F appelée *graphe* de R.

» Inversement, toute partie A de E × F est le graphe de la relation « $(x, y) \in A$ » entre x et y ».

Au lieu de considérer R comme s'appliquant aux objets x, y pris séparément, on la considère comme s'appliquant à un seul objet, encore variable, le couple (x, y), d'où la notation $R\{(x, y)\}$.

Regardons, avant d'aller plus loin, les *Instructions officielles* (février 1969).

— § Ensembles et relations... : « Une relation donnée entre les éléments de deux ensembles (distincts ou non) permet de construire un sous-ensemble de l'ensemble produit... »

L'existence de ce sous-ensemble n'est pas oubliée... Mais nous allons voir ailleurs ce que l'on en dit :

— PAPY (MM I, p. 90) :

« On appelle relation tout ensemble de couples. »

— KURATOWSKI (ouvrage cité, p. 39) :

« On entend par relation (dans le sens de la théorie des ensembles) un sous-ensemble arbitraire R du produit cartésien X × Y (de deux ensembles X, Y donnés). »

— *Instructions officielles* (à quelques lignes de l'extrait précédent).

« ... A un autre niveau de langage, la relation ... *est* un sous-ensemble du produit cartésien E × B... »

Il y aurait donc deux sens : une relation *permet de construire* un ensemble de couples, ou bien elle *est* un ensemble de couples.

A ce point de l'enquête, nous ne nous estimons pas suffisamment éclairés. Peut-être trouverons-nous d'autres lumières du côté des fonctions...

— BOURBAKI (E, p. 72) :

A partir des relations (toujours logiques) on voit apparaître une autre notion : celle de correspondance. « Le triplet (G, A, B) est la correspondance entre A et B définie par la relation R de graphe G. A est l'ensemble de départ, B est l'ensemble d'arrivée de cette correspondance. »

Quelques pas, et voilà les fonctions (p. 76) :

« On dit qu'un graphe F est un graphe fonctionnel si pour tout x il existe au plus un objet correspondant à x par F. On dit qu'une correspondance (F, A, B) est une fonction si son graphe est un graphe fonctionnel et si son ensemble de départ est égal à son ensemble de définition » (ensemble des x, premiers éléments des couples qui constituent F).

On dit qu'une telle fonction f est définie dans A et prend ses valeurs dans B; on dit aussi que c'est une application de A dans B.

Mais, quelques lignes plus loin (p. 77) :

« Nous emploierons souvent le mot fonction à la place de graphe fonctionnel. »

Considérant ce qui précède comme un abus de langage, une fonction, une application (expressions d'ailleurs exactement synonymes pour cet auteur) sont non pas des relations particulières, mais des *correspondances* particulières, c'est-à-dire, rappelons-le, des triplets (G, A, B).

— KURATOWSKI (même ouvrage, p. 38) : « Par fonction (application, transformation), dont les arguments parcourent l'ensemble X et dont les valeurs appartiennent à l'ensemble Y, nous entendons *tout sous-ensemble* f *du produit cartésien* $X \times Y$ qui a la propriété qu'à tout x de X correspond un et un seul y tel que (x, y) soit élément de f. »

« La notion de fonction est un cas particulier de celle de relation dans le sens de la théorie des ensembles. »

— DIEUDONNÉ (*Fondements de l'analyse moderne*, éd. 1968) (p. 5) :

« Un graphe fonctionnel dans $X \times Y$ est aussi appelé une application de X dans Y ou une fonction définie dans X et prenant ses valeurs dans Y. Habituellement, on parle d'une application et d'un graphe fonctionnel comme s'il s'agissait de deux sortes d'objets distincts en correspondance biunivoque et l'on dit alors « le graphe d'une application », mais il s'agit là seulement d'une distinction psychologique... »

— PAPY (MM I, p. 181) :

« Une relation est appelée fonction si... »

Il n'est pas besoin d'allonger la citation pour voir qu'une fonction est encore en ce sens un ensemble de couples, cas particulier d'une relation. (Signalons en passant que pour PAPY le graphe est le dessin qui représente l'ensemble des couples et non pas l'ensemble lui-même; autre source de malentendu!)

Essayons de résumer cet inventaire et d'en dégager ce qui nous intéresse. Chez BOURBAKI apparaît une chaîne de notions que l'on peut schématiser ainsi :

Ensembles →	Propositions logiques →	Ensembles de couples →	Triplet d'ensembles
A B	$R\{x, y\}$ ou xRy avec $x \in A$ et $y \in B$	G avec $G \subset A \times B$	(G, A, B)

Voici comment BOURBAKI désigne ces différents objets :

A ens. de départ B ens. d'arrivée	$R\{x, y\}$ *relation* (entre un élément de A et un élément de B)	G graphe de R et de Γ ou F graphe de f (fonctionnel)	(G, A, B) ou Γ correspondance (F, A, B) ou f *fonction* *ou application*

Pour PAPY, DIEUDONNÉ, KURATOWSKI, on aura les étiquettes suivantes :

A B	R}x, y{ ?	G *relation* (de A vers B) F *fonction* *ou application*	

Deux points de vue se dégagent de cette enquête :

— d'une part le mot « relation » possède un sens *logique :* il désigne une assertion, proposition, fonction propositionnelle, avec éventuellement plusieurs variables. Il désigne donc une « phrase » et c'est pourquoi on peut parler des *relations* : « $y = 2x$ », « x est le frère de y », « $x + y = z$ », expressions qui se trouvent parfois abrégées lorsqu'on ne veut pas utiliser explicitement les lettres x, y, z... La première expression qui peut se lire « y est le double de x » peut s'écrire ... est le double de ...; de même la deuxième expression s'écrira : ... est le frère de... Pour que ces expressions aient un sens, il faut évidemment savoir par quoi on est autorisé à remplacer les pointillés, où se placent respectivement le premier et le deuxième élément du couple (x, y).

— D'autre part, dès que les variables décrivent explicitement un ou plusieurs ensembles, des sens *ensemblistes* se superposent au sens logique précédent. On en vient à dire que la relation *est* le graphe G ou bien *est* le triplet (G, A, B).

Ne serait-il pas plus « vrai » (et plus efficace pédagogiquement) de considérer que l'on désigne alors sous le nom de *« relation de A vers B »* (ou « relation dans A ») un *objet nouveau, défini par* la donnée simultanée des ensembles A, B et de la proposition $R(x, y)$ ou par la donnée des ensembles A, B et du graphe G, c'est-à-dire par le triplet (G, A, B).

C'est cet objet nouveau que l'on note $\mathcal{R}$, d'un signe en principe distinct du R figurant dans le $R(x, y)$ ou dans le xRy de la relation au premier sens.

Dans le cas particulier où $\mathcal{R}$ est une fonction, on la note f. L'expression $R(x, y)$ (ou l'expression xRy) est alors remplacée par $y = f(x)$. Étudier les propriétés de la relation, ou de la fonction, ce sera étudier $\mathcal{R}$, ou f. La phrase $R(x, y)$ elle-même n'a pas d'autre propriété que d'être vraie ou fausse (si elle a un sens) pour les objets x, y donnés.

Cette notion de relation, liée à un ou plusieurs ensembles, se *détache* ainsi de ses diverses composantes; elle apparaît par exemple comme une *propriété du triplet* (G, A, B) ou comme une propriété du triplet (A, B, $R(x, y)$). C'est par un processus d'abstraction analogue que l'on conçoit le nombre naturel comme propriété d'un ensemble fini (1).

(1) Une autre question à propos du langage : On parle de relation d'un ensemble vers un autre ou dans lui-même, mais que dire lorsqu'on considère plus de deux ensembles, ou bien un seul ensemble et une relation logique à une seule variable?

Le langage proposé par KAUFMANN-PRÉCIGOUT (Mathématique pour le recyclage des ingénieurs et des cadres) répond de façon satisfaisante à cette question (p. 36) :

— Une proposition $R(x)$ à une variable décrivant un ensemble E définit une *relation monaire dans E.*

— Une proposition $R(x, y)$ à deux variables, décrivant séparément deux ensembles E, F (ou le même ensemble E), définit une *relation binaire dans* $E \times F$ (ou dans $E \times E$).

... (l'ordre E, F indique que E est l'ensemble de départ, F l'ensemble d'arrivée).

— Une proposition à n variables, décrivant n ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$ définira alors une *relation* n-*aire dans le produit* $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ de ces ensembles.

De quelle façon traduire cela en Sixième? En présentant (comme beaucoup le font) toute relation d'un ensemble vers un autre (ou dans lui-même) comme *définie par :*

— l'ensemble de départ E,

— l'ensemble d'arrivée F,

— une expression (proposition, lien verbal, propriété) notée R ou $x\mathrm{R}y$, ou $\mathrm{R}(x, y)$ qui indique le mode de liaison;

ou bien :

— un ensemble G de couples, formés chacun d'un élément de E et d'un élément de F.

La proposition $\mathrm{R}(x, y)$, relation au sens logique, joue dans la définition de $\mathcal{R}$ le même rôle que l'ensemble G. Aucune de ces deux données ne suffit seule à préciser la relation $\mathcal{R}$ dont il s'agit.

Les propriétés de $\mathcal{R}$ sont fondées soit sur l'étude logique des propositions $\mathrm{R}(x, y)$, soit sur l'étude du graphe associé à R (ce deuxième point de vue est le plus accessible aux débutants).

Si l'on choisit par exemple un ensemble de personnes E et la proposition « x est le frère de y », les propriétés de la relation entre les éléments de E ainsi définie dépendent tout autant du choix de cet ensemble que du choix du mode de liaison... « est le frère de... »

On saura aussi que l'expression formelle $x\mathrm{R}y$, utilisée à la place de $\mathrm{R}(x, y)$ ne signifie pas qu'il existe obligatoirement un « lien verbal » qui peut se mettre à la place de R entre x et y...

Lorsqu'on se donne au départ le graphe, il peut être intéressant de rechercher *« un »* lien verbal permettant d'exprimer *« une »* proposition $\mathrm{R}(x, y)$ associée à ce graphe, mais rien n'autorise à prétendre rechercher *« le »* lien verbal (c'est-à-dire sous-entendre qu'il existe et soit unique).

Des recherches dans le même esprit consistent à remplacer une proposition connue $\mathrm{R}(x, y)$ par d'autres propositions qui peuvent être associées au même graphe (équivalentes), donc telles que la relation établie d'un ensemble vers l'autre ne change pas. C'est une voie féconde pour l'avenir : résolution d'équations et « lieux géométriques » en particulier.

On peut aussi chercher à définir la réciproque d'une relation connue $\mathcal{R}$. Il va de soi qu'il ne s'agit pas de réciproque de la seule relation logique $\mathrm{R}(x, y)$. On ne connaît de réciproque pour une proposition logique que dans le cas d'une implication... et une telle réciproque n'a rien à voir avec ce que nous cherchons ici. Il s'agit de la réciproque de cette relation $\mathcal{R}$ au sens général (de la correspondance, selon Bourbaki).

Elle se définit en *échangeant les rôles des deux ensembles, et il n'est pas nécessaire de changer la relation R*(x, y). On doit considérer seulement qu'au lieu d'être une propriété du couple (x, y), c'est maintenant une propriété du couple (y, x). Il est donc sûr que si $\mathrm{R}(x, y)$ est vraie pour le couple (x, y), elle est vraie pour le couple (y, x). C'est lorsqu'on cherche à trouver un « lien verbal » pour cette nouvelle relation que l'on peut être amené à un énoncé différent du premier, surtout si l'on veut nommer d'abord l'élément du nouvel ensemble de départ puis celui du nouvel ensemble d'arrivée (ainsi on passe d'une forme $x\mathrm{R}y$ à une forme $y\mathrm{R}'x$... Si x et y désignent les mêmes objets, ces deux expressions doivent être simultanément vraies ou fausses).

Exemple : Prenons un ensemble de grandes personnes A, ensemble de départ, un ensemble d'enfants B, ensemble d'arrivée. L'énoncé : « x est le père de y » avec $x \in A$ et $y \in B$. Ceci définit une relation $\mathcal{R}$ de A vers B.

La relation réciproque est définie par le même ensemble d'enfants B, ensemble de *départ*, le même ensemble de grandes personnes A, ensemble d'*arrivée*, le même énoncé : « x est le père de y » avec $x \in A$ et $y \in B$; *ou bien* l'énoncé : « y est fils de x » avec $x \in A$ et $y \in B$; *ou bien* l'énoncé : « x est fils de y » avec $x \in B$ et $y \in A$ (et peut-être d'autres encore).

Lorsqu'on utilise des pointillés à la place des lettres, le premier énoncé devient « ... est le père de ... » Les premiers pointillés doivent être occupés par les éléments de l'ensemble de départ. Alors, pour la relation réciproque il faut évidemment changer la tournure et adopter l'une de celles qui placent en tête les éléments du nouvel ensemble de départ, par exemple : « ... est fils de ... »

C'est le seul fait *de ne pas utiliser de lettres* et de *sous-entendre la place occupée par les éléments des ensembles de départ et d'arrivée* qui impose ce changement de tournure.

Le sujet n'est pas épuisé avec ces quelques réflexions qui ont surtout « enfoncé des portes ouvertes »... Mais nous pensons à tout ce que représente pour nos élèves de Sixième ce thème des relations, qui va pouvoir jouer à plein d'un bout à l'autre de l'année. Grâce à lui, ils vont trouver plus que jamais de quoi exercer leur réflexion dans les domaines les plus divers et cependant dans le même esprit.

Il n'est sans doute pas inutile de bien connaître tous les aspects du terrain avant de s'engager avec les enfants dans cette aventure.

M.-A. T.

Verbalisme

« Au commencement était le verbe... »
(Jean I. I.)

Le Chimpanzé qui se saisit d'une perche pour décrocher une banane ne fait pas de phrases. Cela n'empêche pas son action d'être efficace, et il est peu d'esprits chagrins pour affirmer qu'il n'y comprend rien.

Dans un même ordre d'idées, il nous est tous arrivé de découvrir une solution à un problème avant d'avoir suivi une démarche verbale. Enfin et surtout, j'ai toujours eu le sentiment d'avoir bien compris une situation quand je la conçois en quelque sorte globalement, quand je peux m'y mouvoir librement sans repasser par les détours verbaux qui me l'ont fait connaître.

De là à conclure qu'on pourrait bien faire des mathématiques sans phrases, et même qu'elles en seraient plus pures et plus efficaces, il n'y a qu'un pas que j'avais allègrement franchi en octobre dernier. J'y voyais bien des avantages.

D'abord, l'algèbre pourrait ainsi être vraiment comprise alors que, le plus souvent, elle n'est pour nos élèves imprégnés de paroles, qu'un mécanisme à automatisme plus ou moins contrôlé. Et puis ce serait peut-être le moyen de donner à chaque intelligence sa chance, sans que, toujours, l'enfant-qui-a-la-chance-d'avoir-des-parents-qui-causent-bien, supplante en toute occasion les autres.

J'ai donc proposé à mes élèves de Sixième divers exemples de situations présentant une intersection d'ensembles (blocs rouges et ronds, élèves ayant lunettes et cravate, professeurs hommes à lunettes, journées sans maths ni histoire, etc.). J'ai dit : « Voici deux ensembles..., voici leur intersection... » « Et maintenant voici deux autres ensembles... Quelle est leur intersection? » Je me doutais bien que, à la première fois, tout le monde ne réussirait pas; on construirait en commun cette intersection... et on passerait à un nouvel exemple. Et je pensais bien que les murailles tomberaient avant la septième fois.

Est-ce parce que moi-même je suis trop « verbal »? Est-ce parce que mes connaissances psychologiques insuffisantes ne m'ont pas permis de comprendre tout à fait ce qui se passait dans la tête de mes élèves? (j'aimerais bien d'ailleurs recueillir des avis, si possible contradictoires, sur ce sujet). Toujours est-il que j'ai essuyé un échec. *Chaque situation nouvelle posait un problème nouveau* et l'intersection n'était jamais spontanément construite.

Je suis alors revenu à une de mes pratiques anciennes :

1° *Faire exprimer par les élèves, en français, ce qu'ils faisaient:* « Je prends les objets qui sont éléments du premier ensemble et qui sont aussi éléments du second ensemble »... puis, plus simplement, ce qui m'a permis au passage d'insister sur le sens de « et » : « Je prends les objets, éléments du premier ensemble *et* éléments du second. »

2° *Faire élaborer un texte général:* « L'intersection de deux ensembles est l'ensemble des objets, élément du premier ensemble et élément du second ensemble. »

Dès lors, j'ai eu la satisfaction de voir la notion assimilée. Tous les élèves étaient capables, étant donné deux ensembles, de construire leur intersection. Et même, on concevait sans peine des intersections « infinies » d'ensembles « infinis » (multiples de 2 et de 3, intersections d'ensembles de points du genre segments, etc.). Le langage avait eu, incontestablement, une puissance généralisatrice.

L'écriture : $A \cap B = \{x; x \in A \text{ et } x \in B\}$ découle immédiatement du texte général élaboré, et le renforce.

A la suite de cette expérience, je me pose quelques questions : mon recours au verbal est-il aussi indispensable qu'il m'a semblé, ou bien est-ce un simple procédé pédagogique? Comment alors pourrait-on s'en dispenser? Et est-il souhaitable de s'en dispenser, compte tenu de la valeur universelle de ce moyen d'expression et de son étroite liaison avec l'expression par symbolisme écrit?

Quelles que soient les réponses à ces questions, il est clair que je ne saurais souscrire à une conclusion du genre de : « Faisons apprendre par cœur, pour commencer, la définition. » Je crois en effet que, pour nous autres primates (si évolués que nous soyons), le verbe n'est pas « au commencement ». Il faut le conquérir de haute lutte, je veux dire par l'action. C'est cette action qui se situe au commencement, si l'on veut éviter le verbalisme. Mais je crains aussi que, si on ne s'élève pas jusqu'au verbe, on ne comprenne qu'à demi, sans pouvoir généraliser.

En résumé, je propose à l'examen et à la discussion la méthode pédagogique suivante : 1° agir; 2° raconter l'action; 3° élaborer une proposition générale (définition); 4° appliquer à de nouvelles actions.

G.-H. Clopeau,
(*Lycée Lakanal*, Sceaux.)

« On parle dans sa propre langue ; on écrit en langue étrangère. »
J.-P. Sartre *(Les mots)*.

Bribes

Où la Rédaction s'est permis de réunir extraits de lettres et d'articles qu'elle a reçus et qu'elle s'excuse de ne pas publier en entier.

Sur les symboles $\in$ et $\subset$.

Il est fortement recommandé par les manuels de distinguer $\in$ et $\subset$. La recommandation est tellement pressante qu'on les jugerait exclusifs l'un de l'autre.

Mais si $E = \{a, b, \{a, b\}\}$, n'ai-je pas à la fois $\{a, b\} \in E$ et $\{a, b\} \subset E$?

Soit des coureurs participant à des épreuves individuelles et à des courses par équipes.
Soit E l'ensemble des éléments engagés dans ces diverses épreuves.
Nous retrouvons un ensemble analogue au précédent, pour autant que les participants d'une même équipe soient interchangeables et donc que toute équipe se présente comme un ensemble.

Dans le « modèle de SCHWARTZ » (*Bulletin* n° 261), n'avons-nous pas, par exemple, à la fois $5 \in \mathbb{N}$ et $5 \subset \mathbb{N}$, puisque $5 = \{0, 2\}$? Ici, si $a \in \mathbb{N}$, alors $a \subset \mathbb{N}$ (la réciproque n'étant pas vraie).

Ce qui ne devrait pas nous empêcher, au contraire, de bien marquer la distinction de sens entre $\in$ et $\subset$...

H. BAREIL *(Toulouse)*.

Questions sans réponses.

Un enfant de Sixième déclare : « Un parallélogramme est un quadrilatère qui a ses côtés parallèles 4 à 4. »
Le professeur, gentîment : « Parallèles deux à deux. »
L'enfant : « Non, 4 à 4. » Il en voit réellement 4 qui aient une propriété intéressante.
A-t-il réellement tort? Que signifie *deux à deux*? Deux côtés (opposés) sont parallèles et les deux autres (opposés aussi) sont parallèles également? Ou bien : deux côtés (voisins) sont parallèles à deux autres (voisins aussi)?
Cet enfant, s'il avait pu expliciter sa pensée, ce que nous-mêmes adultes ne faisons pas, qui employons de telles formules stéréotypées, aurait probablement dit : « Dans un parallélogramme, les 4 côtés sont parallèles à 4 autres. »
Peut-être verra-t-on un jour la pédagogie, voulant éviter ces formules, conseiller ceci :
Soit E l'ensemble des côtés d'un parallélogramme; $\forall x \in E, \exists y \in E$ tel que x et y soient parallèles...

Un enfant déclare : « Le diamètre a deux rayons ». Le maître corrige : « Le diamètre *vaut* deux rayons »? Réussir à distinguer les phrases où l'on parle de segments et celles où l'on parle de longueurs, c'est difficile, car le vocabulaire (rayon, diamètre) confond ces deux notions. Ce serait une sorte de raffinement pédagogique, et pourtant..

Ce qui est écrit et ce qui est sous-entendu:

On imprime : « Si $b \neq 0$ est un diviseur de $a \neq 0$, alors $q = a : b \neq 0$. »
On attend que l'élève ajoute des virgules, et autres menues choses. Bref, qu'il ait compris suffisamment bien pour qu'il lise (qu'il traduise) :
« Si b, supposé différent de 0, est un diviseur de a, lui aussi supposé différent de 0, alors le quotient q de a par b est différent de 0. »

On imprime : « $[\forall x \in A, x \in B] \Rightarrow A \subset B$. »
On attend que l'élève conjugue le verbe étrange qu'est $\in$, c'est-à-dire qu'il ait compris suffisamment bien pour être capable de lire : « Quel que soit x *appartenant* à A, x *appartient* à B. »

A quoi sert-il de distinguer segment fermé et segment ouvert si l'élève ne pose pas de question sur la façon dont se termine, ou ne se termine pas, un segment ouvert? Lui dire qu'il n'y a pas de dernier point, qu'on ne peut pas parler d'un point qui serait juste à côté de celui qu'on enlève au segment fermé pour en faire un segment ouvert, tout cela sera verbalisme. Ces choses me paraissent hors de portée d'un élève de Sixième, de Troisième aussi, et tout juste à la portée d'un élève de Première.
— Et vous, croyez-vous que vous *comprenez* ces choses-là?
— Je ne dis pas que je les comprends (je me demande même si on peut vraiment les comprendre). Je dis que je me pose des questions à leur sujet, que je peux inviter un élève de Première à s'en poser, mais pas un élève de Sixième.

« Pour qu'un nombre soit divisible par 4... » Confusion droite-gauche; cet enfant parle du nombre formé par les deux chiffres de *gauche.*
« Je ne sais jamais; c'est à droite pour moi, mais c'est à gauche pour le nombre. » (Pour moi, qui écris; pour le nombre, qui me regarde l'écrire.)
Au théâtre, on a trouvé le moyen, côté cour et côté jardin, d'éviter cette misère.

« Lorsqu'on écrit un zéro à la droite d'un nombre, ce nombre devient 10 fois plus grand. » Ce nombre qui en devient un autre, comme ce $+5$ qui devient -5 en changeant de place, est probablement à l'origine d'incompréhensions diverses.

P. JACQUEMIER
(Grenoble).

Plaidoyer pour une certaine licence.

« Même si je dois heurter beaucoup de Collègues, j'avouerai mon inquiétude devant les appels répétés à l'unification du vocabulaire et du symbolisme, même s'il faut en passer par la voie autoritaire. D'abord, on oublie de préciser qui aura (qui prendra) cette autorité. Si des Collègues s'imaginent qu'une autorité qui aura pris le décret de choisir entre les significations du mot « angle » s'en tiendra là, je les trouve bien naïfs. Efforçons-nous, ça je vous l'accorde, de parler et d'écrire pour que nous nous comprenions tous, mais comme me le disait, il y a vingt ans un écrivain belge de langue française : « Laissons aux Bretons le droit de parler breton! »

Soyons également conscients des difficultés qui nous attendent si, par crainte de transgresser les règles très strictes que nous nous serions imposées, nous nous refusions tout néologisme. J'ai appris qu'un Collègue avait proposé, à Besançon, qu'à partir de maintenant l'A.P.M.E.P. décide que tout symbole ou mot nouveau serait proscrit. Si je ne me devais pas d'être fidèle au flegme traditionnel des gens de mon pays, je lâcherais un mot qui a fait la gloire d'un de vos généraux. »

W. MOUNTEBANK
(Stratford on Avon).

la mathématique
parlée par ceux qui l'enseignent

par la Commission du Dictionnaire de l'A.P.M.E.P.

- *L'édition 1967* (A), comprenant 91 fiches (parues dans le Bulletin avant 1968), une brochure de 32 pages avec notice lexicographique et index, est **disponible.**

  Prix de souscription: 20 F, sous étui cartonné.

  Utiliser le bulletin de souscription inséré dans le Bulletion 266.

- *Aux nouveaux adhérents APMEP*, inscrits avant le 1er juillet 1969, et souscrivant au dictionnaire, il sera offert le recueil des douze fiches publiées en 1968 : « *Millésime 1968* (B) » (parution prévue : décembre 1969).

- *Ce que comprend l'édition 1967* (A)
  Abrégé, abscisse, affinité, anallagmatie (-ique), anneau, anti (-commutatif, -déplacement, -logarithme, -logie, -parallèle, -podaire, -pode, -réflexif, -symétrie, -té), application (-quer, -cable), Archimède (-ien), auto (-matique, -morphisme, -polaire, -symétrie), axe (-ial, -oïde), base (-al), central, centre, classe, complémentaire (-ment, -menté), contra (-dictoire, -grédien), -pollent, -posée), cote (-er), décimal (-e), déduction (déduire), déférent (-e), déplacement, dextrorsum, diagonal (-e, -iser), Eratosthène, Euclide, euclidien, famille, flottant, fonction, fonctionnel (-le), groupe, hélice (oïde), hélicoïdal, homologue, homothétie (-ique), inverse (-ible), inversion, isométrie (-ique), module (-o), normal (-e), nul, numération, opérateur (-er), opposé, ordonnée, perspective, podaire, polaire pôle, primitif (-ive), projection (-teur, -eter), Pythagore, répétition, retournement, rompu, sinistrorsum, stéréographique, supplémentaire (-ment), symétrie, symétrique (-isable, -iser), système, taille, translation, trivial.

- **Ce que comprend le « Millésime 68 » (B)**
  arrondi, cofacteur, correction, diviseur (-dende), division (-er), erreur, incertitude, mantisse, rapport.

- **Après clôture de la souscription,** seront en vente :

Édition 1967 (A)	25 F
Millésime 1968 (B)	4 F
Édition 1969 ($A \cup B$)	27 F

- D'année en année, les recueils « *Millésime* » permettront de compléter l'édition initiale pour les *nouveaux* lecteurs.
  Car il est évident que pour les lecteurs du *Bulletin*, les fiches continueront à être insérées régulièrement.

Souscrire aujourd'hui, être membre de l'APMEP ou abonné à son *Bulletin*, c'est la meilleure façon de tenir à jour son fichier-dictionnaire.

Non, il y a mieux encore : lire attentivement la brochure et utiliser les pages prévues pour écrire à la Commission du Dictionnaire, de VOTRE dictionnaire.

A chaque élève, sa machine à calculer CURTA

Les méthodes modernes d'enseignement commercial rendent indispensable l'exécution fréquente, par les élèves, de **travaux pratiques** de calcul.

En raison de leur encombrement, de leur poids et de leur bruit, les machines à calculer normales présentent souvent de nombreuses difficultés d'emploi dans une classe.

Chaque CURTA peut réaliser aisément tout le travail d'une machine à calculer standard et offre, en outre, bien d'autres possibilités. Son fonctionnement silencieux permet de plus l'exécution simultanée d'autres exercices pendant la classe.

La sécurité d'emploi de la CURTA (celle-ci est fabriquée par les **horlogers suisses**) est de réputation mondiale.

Des **planches de grand format,** très lisibles, facilitent l'exposé au tableau noir, du fonctionnement de la machine.

Vous pouvez obtenir toutes les informations désirées en complétant le coupon-réponse ci-contre, et en le retournant à **INNOVA,** 10, rue aux Ours, PARIS (3ᵉ) - Tél. : 887-46-80.

☐ Veuillez m'envoyer une documentation détaillée et les conditions réservées à l'Education Nationale.

☐ Veuillez prendre rendez-vous pour effectuer une démonstration.

☐ Veuillez m'adresser une machine CURTA pour un essai gratuit de 10 jours.

Nom : ____________________

Etabl. scolaire : ____________________

Adresse : ____________________

Téléphone : ____________________

10.023

4

Des thèmes

Une critique sera certainement adressée à ce Bulletin : *celui d'avoir effectué un classement très arbitraire des articles qu'il réunit. La critique ne sera jamais plus justifiée que dans ce chapitre 4 où sont réunis des études ou des articles ou des notes illustrant l'un ou l'autre des thèmes qui forment l'essentiel du « programme ». Mais on a dit (et bien dit) qu'il ne fallait pas traiter l'un de ces grands thèmes, les relations par exemple, indépendamment des autres. Nous affronterons donc sans inquiétude l'accusation de confusion.*

La réalité est qu'il a bien fallu faire un choix parmi les contributions très variées qui nous ont été adressées. La Rédaction présente ses excuses aux Collègues dont les notes ont été mises en réserve pour d'autres Bulletins.

Trois études...

suivies de notes diverses...

encore des lettres, encore des bribes

et enfin

pour bien affirmer que nous ne préconisons pas un ordre mais que savons apprécier des ordres.

Notions de partition; intersection; différence symétrique; complémentaire; fonction caractéristique

M. Dumont
Lycée international, Saint-Germain-en-Laye

L'introduction de nouvelles notions dans notre enseignement, introduction rendue nécessaire pour diverses raisons dont l'une, pédagogique, est souvent méconnue, ne peut se faire valablement que par un choix raisonné et une longue expérimentation de pédagogies diverses. Malheureusement, ces notions sont trop souvent retransmises aux élèves, quel que soit le niveau de ceux-ci, sous des formes pratiquement identiques à celles sous lesquelles les maîtres les ont reçues. Or l'élaboration d'une pédagogie concernant ces notions ne peut se faire en un an, voire plusieurs années. Nous assisterons donc, dans les années qui viennent, à une floraison d'ouvrages, de méthodes, de matériels plus ou moins valables. Il importe que chaque maître reste conscient de ce phénomène et sache faire un choix entre des matériels souvent coûteux, parfois insuffisamment analysés et une foule de matériels réalisables en classe, imaginés par le maître lui-même et de ce fait parfaitement adaptés à sa pédagogie.

Remarques préliminaires.

De toute évidence, un matériel ne vaut que par l'usage qu'on en fait. L'essentiel est : 1° d'en connaître les avantages et les inconvénients; 2° de savoir que ceux-ci n'ont pas un caractère absolu mais sont relatifs à un objectif bien déterminé. D'ailleurs, à la limite, un danger décelé à temps peut devenir un avantage pédagogique puisqu'il stimule l'attention, la maintient en éveil du fait de la connaissance de l'existence de ce danger. Inversement, l'absence de danger endort la méfiance, encourage l'automatisme, c'est-à-dire l'inconscience et... risque de devenir un danger sur le plan éducatif. C'est donc au maître et à lui seul que revient le choix d'un matériel, d'une stratégie adaptés à sa classe, à son style d'enseignement.

Il est absurde de croire qu'une notion puisse être analysée définitivement à un niveau donné et être utilisée sans autre analyse dans les niveaux supérieurs. C'est pourtant ce que la lecture de nos programmes (automatismes exclus) laisse à penser. Une étape préliminaire de familiarisation facilite toujours l'analyse d'une notion. Cette première analyse, d'ailleurs, peut et doit être reprise et approfondie au fur et à mesure que la familiarisation est meilleure. Cette familiarisation, trop souvent confondue avec une activité inconsciente, c'est-à-dire un automatisme, consiste à se trouver en présence de situations variées contenant ou ne contenant pas le concept à étudier, et à agir sur ces situations. C'est au cours de ces diverses activités que l'on prend conscience d'une similitude de démarches dues à la présence du concept et c'est seulement à partir de cet instant que l'on peut tenter un début d'analyse, puis, plus tard, de formalisation.

Les situations présentées à l'élève peuvent appartenir à deux classes différentes :

1° Une classe de situations naturelles, extraites du champ d'expérience de l'élève. Ces situations ont un énorme avantage : d'une part elles fournissent une motivation quasi certaine aux activités, d'autre part elles permettent des transferts indispensables pour assurer une bonne compréhension. Mais ces situations ont un inconvénient d'ordre scolaire : appartenant souvent à des domaines extrascolaires, l'élève ne peut agir directement sur elles, soit pour des raisons d'encombrement, soit parce qu'elles sont éphémères. Son action n'a lieu que sur une description de ces situations et exige déjà un certain stade de formalisation.

2° Une classe de situations artificielles, conçues par le maître non pour isoler le concept mais pour permettre une activité réelle précédant avant toute chose la description. C'est à cette classe qu'appartient le matériel décrit plus loin. Une telle situation a en outre l'avantage suivant : ses objets n'ont pas de valeur sémantique et peuvent représenter les objets d'une situation réelle ayant même structure. C'est en quelque sorte la matérialisation de la structure commune aux situations de la première classe.

L'étude unique d'une telle situation est évidemment dangereuse puisqu'elle ne permet pas les transferts. Si l'on crée d'autres situations artificielles de même structure, alors leurs objets prennent une valeur sémantique et l'avantage obtenu sur le plan des transferts est un inconvénient sur le plan de la formalisation. Un autre moyen de provoquer les transferts est de choisir une situation artificielle suffisamment riche, pour que l'on puisse présenter à l'élève des « sous-situations » extraites de la précédente, ce qui présente un double avantage : 1° permettre des transferts; 2° habituer à restreindre, élargir ou varier l'univers dans lequel il travaille.

Un concept pris isolément n'a pas grande signification. C'est toujours par rapport à d'autres concepts ou mieux par rapport à une ou des structures bien déterminées qu'il prend son caractère propre. Il en est ainsi du concept « ensemble ». La prise de conscience de ce concept ne peut se faire que dans des structures assez riches qui feront sentir la nécessité de ce concept. Trop souvent nous voulons définir un ensemble avant d'avoir provoqué ce besoin de penser aux ensembles. Puis, presque immédiatement, nous voulons analyser les diverses définitions : en extension (liste exhaustive des éléments), en compréhension (citation d'une propriété commune aux éléments et à eux seulement), et autres modes (citation d'une loi de construction des éléments par exemple une loi de récurrence), etc. Et l'on est ainsi conduit inévitablement aux symbolisations maintenant classiques $a \in \{a, b, c, d\}$ ou $a \in \{x : \mathcal{T}(x)\}$ si $\mathcal{T}(a)$ est vraie, et combien dangereuses sur le plan pédagogique à ce premier stade.

Il s'ensuit que nous ne pouvons proposer aux élèves, à ce niveau, que des exercices de définition, de symbolisation dans lesquels il n'y a pratiquement aucune autre activité que cette symbolisation. Cette activité, cette analyse, se fait ainsi sous la contrainte du maître alors qu'elle devrait se faire, *a posteriori*, sous la pression des expériences.

La plupart des activités humaines extra-scolaires ou scolaires peuvent se ramener, entre autres, aux types suivants :
1° Organisation (d'objets, d'activités, de souvenirs, etc.).
2° Invention, c'est-à-dire combinatoire.
3° Décision ou choix.
4° Description ou expression.
5° Simulation ou répétition.

Ce dernier type de problèmes est évidemment sur le plan éducatif le plus dangereux tout en restant important sur un certain plan social. C'est presque uniquement ce type d'activité que nous développons consciemment ou non chez nos élèves. En fait, chaque type d'activités fait intervenir d'autres types : par exemple un problème de description fait intervenir des activités d'organisation, d'invention, de choix, de répétition au niveau du discours.
Mais pour susciter un besoin d'organisation chez l'élève, il faut le mettre devant des situations suffisamment riches pour que ce besoin se fasse sentir.

Construction ou présentation du matériel.

Toutes ces raisons, parmi d'autres, ont provoqué le choix du type de matériel décrit ci-dessous, matériel qui n'a rien d'original et se situe dans la lignée des blocs logiques de Dienes.

Les élèves sont invités à découper dans du carton 120 objets ayant :
1° l'une des 5 formes suivantes : disque, carré, triangle, fer de lance, hexagone, notées respectivement D, C, T, F, H, leur ensemble étant noté $\mathcal{F}$;
2° l'une des 4 couleurs : rouge, jaune, vert, bleu R, J, V, B, leur ensemble étant noté $\mathcal{C}$;
3° l'une des 3 tailles : diamètre ou côté 8, 5, 3 centimètres, notées G, M, P, leur ensemble étant noté $\mathcal{T}$;
4° l'une des 2 marques suivantes : non barré d'une croix, barré d'une croix, notées 0,1, leur ensemble étant noté $\mathcal{M}$.

L'ensemble des 120 objets ou univers sera noté $\mathcal{U}$, mais il est bien évident que ces notations n'interviendront devant les élèves que lorsqu'elles seront nécessaires. Il importe dans un tel choix de ne pas utiliser : 1° des objets pour lesquels la terminologie usuelle sera en contradiction avec une terminologie ultérieure (par exemple la « forme » d'un objet dépend de son épaisseur, de son aspect « intérieur » aussi bien qu' « extérieur », etc.); 2° une organisation qui sera en contradiction avec des organisations ultérieures et pourtant attachées à un même vocabulaire (par exemple présenter l'ensemble des carrés et l'ensemble des rectangles comme disjoints alors que plus tard il faudra prendre conscience qu'un carré a toutes les propriétés d'un rectangle, donc est un rectangle particulier, et présenter alors l'ensemble des carrés comme une partie de l'ensemble des rectangles).

Ce seul exercice de découpage exige déjà une organisation implicite de l'Univers, permettant de choisir un ordre de description, puis un ordre de découpage. Par conséquent, il appartient à une classe d'exercices déjà faits par l'élève et consistant : 1° à construire des « arbres »; 2° à jouer sur des « claviers » (en fait, définir en extension des produits d'ensembles). Rappelons ce genre d'exercices à propos de cet exemple particulier :

a) Un ordre est choisi entre les claviers, et parallèlement entre les « étages » de l'arbre :

1er clavier	1er étage	les formes
2e »	»	les couleurs
3e »	»	les tailles
4e »	»	les marques

Cet ordre étant arbitraire.

b) Un ordre est choisi entre les « touches » de chaque clavier, entre les branches de chaque étage, par exemple l'ordre adopté dans la description au paragraphe ci-dessus.

Ceci étant fait, l'élève « tape » sur une touche de chaque clavier et dessine : *a)* les différents chemins entre les touches des claviers; *b)* l'arbre ou une partie de l'arbre sur lequel il chemine. Ceci revient à définir en extension les éléments des

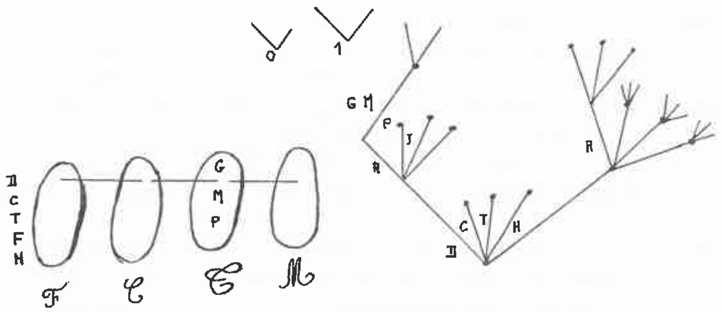


Schéma visiblement très incomplet; si le lecteur veut bien repasser en rouge une suite de choix sur l'arbre, il traduira celle-ci par une suite de flèches sur le diagramme sagittal, à gauche.

FIG. 1.

ensembles produits $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \times \mathcal{C}$, $\mathcal{F} \times \mathcal{C} \times \mathcal{T}$, $\mathcal{F} \times \mathcal{C} \times \mathcal{T} \times \mathcal{M}$, c'est-à-dire des couples, des triplets, des quadruplets de propriétés. Dans cette étape de construction de l'univers, le seul ensemble qui nous intéresse est le dernier. Il importe de remarquer qu'un ensemble produit d'ensembles est *a priori* non ordonné. C'est la nécessité de définir en extension cet ensemble, c'est-à-dire de distinguer les objets, de les désigner successivement, qui impose le choix d'un ordre entre les éléments de chacun des ensembles facteurs. Par contre, le choix d'un ordre entre les ensembles facteurs est indispensable au concept de produit d'ensemble. Si tel était notre objectif, alors il faudrait immédiatement proposer de meilleures situations. Car ici le choix d'un autre ordre, par exemple $\mathcal{C} \times \mathcal{M} \times \mathcal{T} \times \mathcal{F}$, nous conduit au même univers, ce qui met déjà en évidence le danger de confusion entre l'univers $\mathcal{U}$ des 120 objets et l'ensemble produit $\mathcal{F} \times \mathcal{C} \times \mathcal{T} \times \mathcal{M}$.

Premiers inventaires.

L'Univers $\mathcal{U}$ étant ainsi construit, la seconde étape consiste à inventorier cet univers. Les élèves sont invités à disposer sur leur table les 120 objets répartis en 5 tas (formes), puis en 4 tas (couleurs), 3 tas (tailles), 2 tas (couleurs). Chaque partition étant réalisée matériellement, les élèves la dessinent alors sur leur cahier en la schématisant : par exemple, chaque « objet » est représenté par un point.

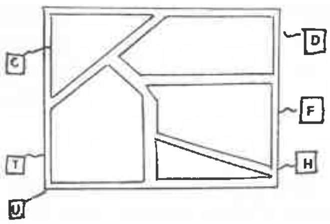


FIG. 2.

Des « étiquettes » (*) sont alors accrochées aux « tas » et à la « caisse », ce qui donne alors l'occasion de prendre conscience de l'imprécision de mots tels que «forme». Qu'est-ce qu'une forme, sinon une classe d'une certaine partition de l'univers?

Or, sur le dessin ci-dessus une erreur a été commise à propos des étiquettes, erreur fondamentale : laquelle? Si U représente l'ensemble des 120 objets, il est absurde de désigner par la même étiquette le « meuble » à « 5 tiroirs » contenant les 120 objets, c'est-à-dire la partition en 5 classes. Mais cette erreur n'apparaît que lorsque nous comparons le meuble à 5 tiroirs, le meuble à 4 tiroirs, puis à 3 tiroirs, puis à 2 tiroirs. C'est seulement à ce moment que nous sentons la nécessité de distinguer ces différents meubles, ou partitions notées U_1, U_2, U_3, U_4, U_5 (U_1 est un ensemble de 5 éléments tiroirs, tas ou classes, $\mathcal{U}$ est un ensemble de 120 éléments; il faut alors remplacer sur le dessin précédent $\mathcal{U}$ par U_1).

Une seconde erreur est presque inévitablement commise au cours des deux étapes. Il arrive que les élèves ou le maître ont besoin de nommer l'un des 120 objets, par exemple le carré, vert, grand et marqué d'une croix. La tentation est alors grande d'accrocher des étiquettes à chacun des 120 objets, par exemple pour l'objet précédent (CVQ1). C'est en effet l'un des codages utilisés pour désigner les chemins de l'arbre ou des claviers. Le danger d'un tel codage est évident si on ne l'aborde pas au grand jour, d'où alors les activités suivantes.

Inventaires plus « fins ».

Certains élèves ont l'idée de répartir leurs 120 objets en plus de 5 tas. Par exemple, ils le transportent dans 10 enveloppes, mais ces tas ne respectent pas nécessairement l'homogénéité des ensembles (ainsi, carrés rouges et jaunes, carrés verts et bleus, disques rouges et jaunes, disques verts et bleus, etc., pourquoi ne pas réunir les rouges et verts?). Comment alors répartir les objets en 10 tas sans faire d'envieux parmi les

(*) N.D.L.R. — Excusez l'imperfection des dessins réalisés trop hâtivement : ici les étiquettes sont mal attachées.

formes, les couleurs, les tailles, les marques. On aboutit ainsi à la partition suivante U_6 en 10 classes notées provisoirement C0 (carrés non marqués), D1 (disques marqués), etc.

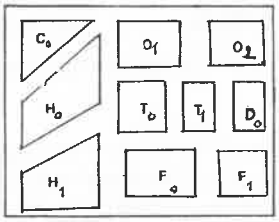


FIG. 3.

Ce problème conduit évidemment aux autres partitions utilisant 2 des 4 propriétés, par exemple : forme et couleur (20 classes), forme et taille (15 classes), couleur et taille (12 classes), etc., puis aux partitions utilisant 3 des 4 propriétés, par exemple : forme, taille, marque (30 classes). Finalement, les élèves réalisent manuellement sur la table toutes les partitions suivantes en 5, 4, 3, 2, 20, 15, 10, 12, 8, 6, 60, 40, 30, 24, 120 classes.

Deux remarques s'imposent :

1° Il ne faudrait pas, arrivés là, que les élèves croient qu'il n'y a pas d'autres partitions possibles. Il est donc indispensable de leur suggérer de répartir au hasard leurs 120 objets dans les 7 tiroirs d'un meuble par exemple. Ce faisant ils n'utilisent pas les propriétés précédentes. Mais comment alors désigner les objets? Par leurs qualités? Cette solution naturelle doit être retenue, mais seulement un temps : le temps de la réflexion. Voici pourquoi.

2° Lorsque les élèves ont dessiné les partitions, ils ont accroché à chaque classe (tiroir ou tas) une étiquette rappelant les propriétés utilisées (exemple : CRM représente la classe des objets carrés, rouges, moyens). Lors du dessin de la partition en 120 classes, ils ont ainsi désigné par l'étiquette DVPO une certaine classe. Mais cette classe ne contient qu'un objet. D'où alors la tentation de donner le nom de la classe à l'objet unique qu'elle contient. Il est temps de compenser ce cas particulier par un autre.

(Problème analogue aux problèmes de repérage.)

Enrichissement et codage des « éléments » de l'univers.

On décide alors de désigner chaque objet par un mot de deux lettres, une lettre, une voyelle, et pour unifier le vocabulaire dans la classe on choisit un ordre sur les 2 claviers de lettres, un ordre sur chacun des 4 claviers de qualités et une

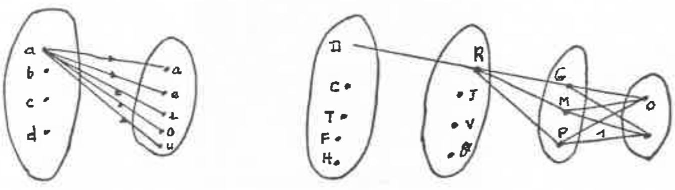


FIG. 4.

application de l'ensemble de couples de lettres dans l'ensemble des quadruplets.

aa $\mapsto$ DRG0	*ao* $\mapsto$ DRM1
ae $\mapsto$ DRG1	*au* $\mapsto$ DRP0
ai $\mapsto$ DRM0	*ba* $\mapsto$ DRP1

etc. Cette application n'est autre que la relation d'appartenance. Exemple : *aa* appartient à la classe DRG0.

Les élèves dressent alors un véritable dictionnaire qui leur permettra par la suite de retrouver plus aisément les objets. (Cette application fournira plus tard un premier exemple d'application croissante ou décroissante suivant les ordres utilisés.) Mais l'ensemble des mots de deux lettres comporte 130 éléments d'où la tentation de fabriquer alors 10 objets supplémentaires désignés par les 10 derniers mots et ayant certaines des propriétés précédentes.

Cette fois la partition du nouvel univers U^o des 130 objets en 120 classes ne nous permet plus de confondre le nom des classes avec le nom des objets puisque certaines classes contiendront 2 ou même 3 objets. Chaque classe peut ainsi être désignée, soit par le nom de l'attribut (DRM1 par exemple), soit par la liste des noms propres des objets qu'elle contient, liste qui peut être réduite à 1 seul élément. Nous avons là une occasion de faire distinguer un langage en extension d'un langage en compréhension sans définir ces mots. On peut alors se demander s'il ne serait pas bon que certaines de ces classes soient vides. Mais ce matériel trop riche est conçu pour que l'on travaille sur des sous-univers. Il sera donc possible par la suite de désigner des sous-univers où les partitions à l'aide de propriétés conduisent à des classes vides. (Attention! le mathématicien n'utilise le mot partition que pour désigner un ensemble de classes disjointes et *non vides*, dont la réunion soit l'univers.)

Remarque : On peut penser qu'à ce stade et bien que l'inclusion n'ait pas encore été abordée, il soit possible de demander aux enfants de comparer les diverses partitions afin de constater par exemple que le couple des partitions U_1 et U_2 (5 classes d'après les formes et 4 classes d'après les couleurs) n'a pas le même aspect que le couple U_1, U_6 par exemple (5 classes d'après les formes et 10 classes d'après les formes et marques). Pour ce dernier couple, U_6 est plus fin que U_1, c'est-à-dire chaque classe de U_6 est incluse dans une classe de U_1. Mais il est sans doute prématuré d'aborder l'analyse du treillis des partitions. Disons cependant qu'au cours de l'activité de classification, certains enfants ont fort bien compris que pour obtenir une partition en 20 classes, ils pouvaient utiliser d'abord la partition en 5 classes d'après les formes, puis partager chaque classe en 4 d'après les couleurs ou inversement. Ceci est important car il y a en germe la notion de structure quotient. Certains dessins ont d'ailleurs été ainsi réalisés et ont permis d'attirer l'attention des enfants sur le fait suivant :

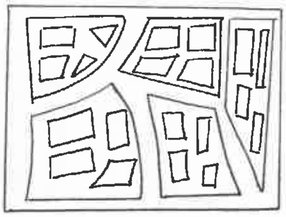


FIG. 5.

Cet ensemble n'est pas la partition U_7 de l'univers U^o des 130 objets en 20 classes, mais une partition en 5 classes de la partition précédente, c'est-à-dire une partition en 5 classes de l'ensemble U_7 des 20 classes.

Définition en extension, en compréhension. Parties complémentaires.

Le matériel ayant été ainsi exploré globalement, on choisit pour une première étude un sous-univers U′ plus maniable que l'on pourra changer plus tard : par exemple un sous-univers défini en compréhension (par exemple ensemble de tous les objets ayant la propriété suivante : (C ou D) et (R ou V) et (G ou M ou P) et (0 ou 1), ce qui permet de répéter le travail précédent à un niveau moins riche.

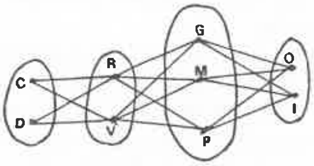
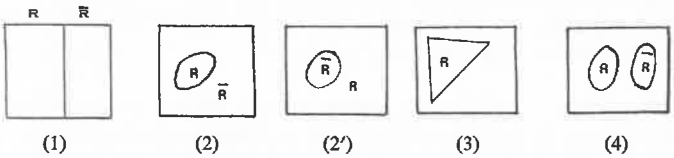


Fig. 6.

Mais d'emblée, cette fois, certaines des classes obtenues auront plus de 1 objet. Par exemple nous aurons 27 objets répartis dans les 24 classes de la partition la plus fine obtenue à l'aide des propriétés précédentes. Ce sous-univers sera isolé et utilisé pendant plusieurs leçons.

Première étape. — L'élève est invité à disposer le sous-univers sur une feuille de papier et à le séparer en 2 classes, de diverses façons, et à dessiner à chaque fois la partition correspondante en entourant directement sur la feuille les 2 tas d'objets (par exemple G et $\overline{G}$, grands et non grands, C et $\overline{C}$, carrés et non carrés, R et $\overline{R}$, rouges et non rouges, etc.). Il est important de penser à toutes les suggestions possibles d'un dessin.



Sur chaque dessin, on a représenté R sous-ensemble des rouges de U′ et $\overline{R}$ sous-ensemble des non-rouges de U′. En (3), on peut représenter $\overline{R}$ par un contour d'une autre couleur dans « l'espace » laissé libre dans U′ par R.

Fig. 7.

Ainsi le dessin (1) (diagramme de Carroll) suggère un équilibre entre les deux sous-ensembles, c'est-à-dire entre les deux propriétés dont l'une est la négation de l'autre, alors que le dessin (2) (diagramme de Venn) suggère la prépondérance du sous-ensemble central R. Pour rétablir, on peut évidemment faire un deuxième dessin (2′) où l'on intervertira R et $\overline{R}$. Dans un problème où l'ensemble complémentaire n'a pas d'intérêt, le diagramme de Venn paraît plus naturel. Mais pour des raisons d'éducation logique il est préférable d'utiliser un diagramme type Carroll. Par exemple l'étude des objets « non-moyens » peut être intéressante et le fait d'utiliser la négation pour désigner cette propriété ne doit pas faire peser sur elle une sorte de déconsidération.

Pédagogiquement, c'est le dessin du type (3) qui parait le mieux convenir car il a les avantages simultanés de (1) et (2). En effet, les dessins (1) et (2) nous obligent à placer l'étiquette des parties à l'intérieur de celle-ci, d'où une confusion et gêne lorsqu'on placera les étiquettes des éléments de ces parties. Sur le dessin (1) on ne peut symboliser une ficelle attachant l'étiquette R à la partie car le contour de R et de U′ se confondent tandis que sur le dessin (4) le point d'attache des ficelles est nettement distingué puisque les contours sont séparés. En outre, les élèves ont naturellement tendance à faire un dessin du type (4). Celui-ci est bon mais a un grave inconvénient : il suggère mal la complémentarité. L'espace entre les deux parties nous invite à y placer des objets. Au prix d'une légère convention, on adopte le dessin (3). L'importance de ces dessins décroît d'ailleurs au fur et à mesure que la compréhension est meilleure (*).

Parallèlement au dessin, les élèves dressent à chaque fois la liste des noms propres des éléments de chacune des deux parties (exemple R = {al, am, an, ..., etc.}).

L'écriture de ces listes devenant très vite fastidieuse, on adopte la disposition en tableau. La liste des éléments de $\mathcal{U}$ est copiée une seule fois. Pour chaque partie il suffit de répondre par oui ou par non en face de chaque élément : oui si l'élément appartient à cette partie, non dans le cas contraire.

$\mathcal{U}$	R	$\overline{R}$	G	$\overline{G}$	etc.
aa	0	1	1	0	
ab	0	1	1	0	
ac	0	1	0	1	
ad	0	1	0	1	
ae	1	0	1	0	

Très vite d'ailleurs les élèves adoptent les conventions des 1 et 0. Pourtant beaucoup par paresse ou par des habitudes malheureusement répandues négligent d'écrire les 0, c'est-à-dire adoptent la convention supplémentaire : « absence de réponse équivaut à réponse négative », ce qui est évidemment commode mais absurde lors des échanges d'information, car on ne saura jamais s'il s'agit d'un oubli, volontaire ou non, ou d'une réponse négative.

Deuxième étape. — Ceci nous amène alors à définir de nouvelles parties en extension. On donne la liste des éléments de A, l'élève sépare alors son univers en deux classes A et $\overline{A}$, dessine la partition et établit la liste des éléments de $\overline{A}$. On propose ainsi de nouvelles partitions B et $\overline{B}$, C et $\overline{C}$, etc., mais en prévoyant les cas particuliers : par exemple $A \cap B$ est non vide, C est inclus dans $\overline{A}$, etc., que l'on utilisera par la suite.

Remarques. — *a)* Il importe de bien s'assurer que lorsque l'élève dessine, il comprend ce qu'il dessine car les techniques de dessin comme les techniques de calcul finissent par devenir inconscientes. C'est la raison pour laquelle : 1° les élèves disposent

(*) *N.D.L.R.* — On peut aussi utiliser un diagramme de CARROLL (1) avec la convention : les éléments de R à l'ouest, ceux de $\overline{R}$ à l'est.

les objets sur une feuille blanche et dessinent directement sur cette feuille; 2° dressent les listes; 3° complètent le tableau des 1 et 0.

b) Dans toutes ces activités l'élève prend conscience de ce que signifie partie complémentaire « partie qui complète », mais il est extrêmement important de lui donner le plus tôt possible le sentiment que ce fait dépend de l'univers choisi. On peut alors choisir un autre sous-univers U″ contenant U′ et faire constater que la partie $\overline{A}$ qui complète A dans U′ n'est par là même que la partie $\overline{A}''$ qui complète A dans U″. La notation $\overline{\overline{A}}$ paraît alors illogique et on peut à ce moment lui préférer la notation $\complement_{U'} A$, mais celle-ci est trop lourde à manier et les enfants préfèrent la première notation.

Mais avant d'aborder des changements de sous-univers on peut préférer l'étude de l'intersection, réunion, etc., d'où les activités suivantes :

Intersection; réunion; différence symétrique.

a) L'élève est invité à disposer sur une feuille le sous-univers U′ et à séparer les sous-ensembles A et B par exemple précédemment définis en extension. Il découvre que ceci est impossible puisque A et B ont des éléments communs d'où l'idée de « mélanger le moins possible » les objets de A et ceux de B (c'est-à-dire en fait de constituer une partition plus fine que la partition A, $\overline{A}$, et plus fine que la partition B, $\overline{B}$). L'élève est naturellement porté à constituer un tas spécial ne contenant que les objets communs A et B. Il dispose alors 4 piles d'objets sur la feuille et dessine les contours de A, $\overline{A}$, B, $\overline{B}$ avec leurs étiquettes attachées aux contours par exemple en rouge A, rouge pointillé $\overline{A}$, vert B, vert pointillé $\overline{B}$. C'est l'instant d'introduire les étiquettes $(A \cap B)$, $(A \cap \overline{B})$, $(\overline{A} \cap B)$, $(\overline{A} \cap \overline{B})$ que les élèves écrivent sur des papiers et disposent sur les 4 tas.

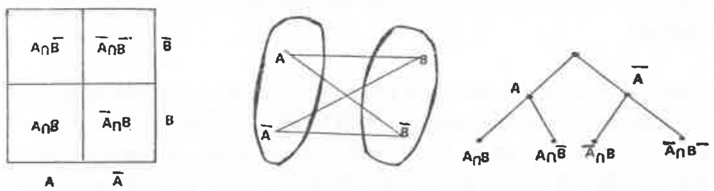
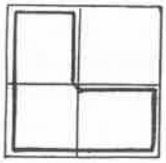


FIG. 8.

Remarques. — 1° L'idée essentielle ici est de montrer comment deux partitions en deux classes « engendrent » une partition en quatre classes.

2° A ce stade on peut avoir l'idée de répéter les mêmes exercices avec 2 sous-ensembles définis cette fois en compréhension (par exemple G, $\overline{G}$, R, $\overline{R}$; grands, non grands, rouges, non rouges) ou bien l'un défini en extension, l'autre en compréhension. Mais il semble préférable de présenter d'emblée et simultanément l'intersection, réunion, différence symétrique, afin de mieux les opposer et ainsi faciliter la distinction des concepts.

b) C'est pourquoi lorsque chacune des quatre piles $(A \cap B)$, $(A \cap \overline{B})$, etc., a été constituée, étiquetée, lorsque le dessin a été fait, il est assez naturel de revenir au problème des partitions en 2 classes. Quel est le complémentaire de $(\overline{A} \cap \overline{B})$, $(A \cap \overline{B})$, etc.? D'où l'idée de réunir A et B, A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et B, $\overline{A}$ et $\overline{B}$. A chaque fois les élèves rapprochent 3 piles suffisamment pour donner l'idée d'un seul sous-ensemble, mais sans les mélanger afin de pouvoir distinguer encore les ensembles A, B; puis ils dessinent sur la feuille-support le contour du nouvel ensemble désigné par l'étiquette $A \cup B$, d'où les 4 dessins analogues à celui-ci :



$A \cup B$

FIG. 9.

Le tableau des 1 et 0 est alors complété par 4 nouvelles colonnes représentant les 4 nouvelles parties $A \cup B$, $A \cup \overline{B}$, $\overline{A} \cup B$, $\overline{A} \cup \overline{B}$.

Remarque. — On pourrait, à ce stade, changer d'univers et s'assurer que les concepts de réunion et intersection ont été compris à l'aide d'exercices analogues permettant des transferts, mais il semble préférable d'introduire dès maintenant un concept un peu dédaigné dans l'enseignement élémentaire : celui de différence symétrique. Ce concept est pourtant très important pour la suite puisqu'il permet d'ériger une structure de groupe et même d'espace vectoriel sur n'importe quel ensemble et par là de permettre d'exprimer en langage algébrique clair certains problèmes d'ordre combinatoire. En outre, pédagogiquement, la juxtaposition de plusieurs concepts (intersection, réunion, différence symétrique) dont les traductions en langue usuelle sont très voisines et souvent confondues permet des comparaisons et facilite ainsi leur distinction.

c) Les élèves constatent sur la partition en 4 classes qu'en réunissant ces 4 classes 3 par 3, on obtient les 4 réunions ($A \cup B$, $A \cup \overline{B}$..., etc.) en les réunissant 2 par 2 on obtient les 4 intersections ($A \cap B$, $A \cap \overline{B}$..., etc.), mais ce faisant 2 paires ont été omises, d'où l'idée de réunir les 2 piles d'objets situés en diagonale sur le dessin. Il est alors difficile de dessiner les contours des nouveaux ensembles car la partition en 2 classes complémentaires n'apparaît plus.

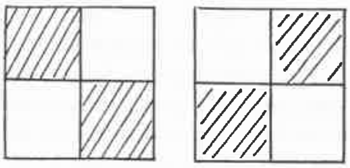


FIG. 10.

C'est à un tel moment qu'apparaît l'utilité d'un autre mode d'expression, comme le tableau des 1 et 0 (c'est-à-dire les fonctions caractéristiques des ensembles). La langue usuelle permet une explication plus aisée que dans le cas de la réunion : « ensemble des objets qui sont dans l'un et ne sont pas dans l'autre », d'où le calcul aisé des 1 et 0. Des étiquettes pour les nouveaux ensembles sont introduites du type ($A \Delta B$). Effectivement, cette opération semble plus facile aux élèves que la réunion. Malgré le pouvoir suggestif du dessin, un grand nombre d'élèves ont alors tendance à disposer 4 colonnes dans le tableau ($A \Delta B$), ($A \Delta \overline{B}$), ($\overline{A} \Delta B$), ($\overline{A} \Delta \overline{B}$). Le calcul des 1 et 0 leur montre que certaines colonnes sont identiques. C'est la première fois qu'ils rencontrent 2 étiquettes différentes pour désigner le même ensemble, d'où l'introduction du signe = avec un sens correct $A \Delta B = \overline{A} \Delta \overline{B}$ et $\overline{A} \Delta B = A \Delta \overline{B}$. Ces remarques évidentes sur le dessin peuvent donner lieu à un jeu logique à l'aide de la langue usuelle : « appartenir à l'ensemble de gauche et ne pas appartenir à l'ensemble de droite » pour la première étiquette équivaut à « ne pas appartenir à l'ensemble de gauche et appartenir à l'ensemble de droite » pour la deuxième étiquette. Mais on peut évidemment réserver pour plus tard ces exercices de logique qui sont des exemples d'activité dans un groupe de KLEIN.

Finalement les élèves remplissent 10 colonnes du tableau : 4 intersections, 2 différences symétriques et 4 réunions, et font 5 dessins : l'un où sont visibles A, $\overline{A}$, B, $\overline{B}$ et les 4 intersections et les 4 autres réservés chacun à une réunion et sa partie complémentaire (le dessin des différences symétriques étant abandonné).

De tels exercices sont répétés sur des sous-ensembles divers toujours définis en extension et choisis de telle sorte qu'aucun qualificatif de la langue usuelle ne puisse leur être attribué afin d'éviter les réminiscences d'expressions ambigües. C'est seulement après s'être assuré que l'élève distingue correctement les concepts que l'on introduira les définitions en compréhension. Celles-ci sont indispensables afin de souligner les insuffisances de la langue usuelle (conjonctions et, ou, soit), mais ceci ne peut se faire que si les notions ont été comprises *indépendamment du langage*. Il est en effet fondamental d'apprendre à distinguer les concepts de réunion, intersection avec autre chose que la langue usuelle, puisque c'est celle-ci qui introduit les confusions. Une fois ces concepts distingués à l'aide du matériel, alors l'ambiguïté des conjonctions apparaîtra clairement.

Au cours de ces exercices les élèves parviennent à se dégager peu à peu de l'activité sur le matériel. Ils finissent par découvrir qu'ils peuvent « calculer » les 12 colonnes du tableau ($\overline{A}$, $\overline{B}$ et les 10 précédentes) en ne connaissant que l'univers, A et B. Le fait d'avoir dessiné directement sur la feuille portant le matériel leur permet par la suite de refaire les dessins suggérant la situation sans avoir à manipuler les objets, tâche vite fastidieuse.

Remarques. — 1° Il est important que l'élève ait à sa disposition plusieurs moyens d'expression, dessins, tableaux, afin de contrôler qu'il ne s'agit pas d'une technique gratuite retenue par cœur sur un seul mode d'expression. C'est ainsi que l'on peut demander de « calculer » les éléments de chacune des colonnes du tableau et après de placer sur le dessin les points et noms représentant les éléments de l'univers. Il est important aussi de désigner les sous-ensembles par des lettres variées C, R ou $\overline{H}$ et $\overline{Q}$, toujours afin de provoquer chez l'élève le besoin de prendre conscience de son activité.

2° Il est aisé de contrôler rapidement la compréhension en donnant par la suite des univers variés mais commodes (par exemple une liste de 10 verbes, G l sous-ensemble des verbes du 3[e] groupe, $\bar{I}$ l'ensemble des verbes ne contenant pas la lettre *i*). Les élèves doivent remplir les colonnes $G \cap \bar{I}$, $G \cup \bar{I}$, $G \Delta \bar{I}$ et placer correctement les 10 verbes sur un dessin.

3° Il serait catastrophique de faire apprendre par cœur une technique de calcul des 1 et 0. C'est la découverte de ces règles par les enfants eux-mêmes qui provoquera une véritable compréhension des concepts. Des expériences au niveau des adultes confirment cette idée. L'emploi de ces règles risquant de devenir inconscient, le recours au dessin permettra si besoin est, de contrôler s'il n'y a pas eu oubli des concepts, (ou vice-versa).

4° En établissant de tels tableaux les enfants recherchent les parties complémentaires et relient par des flèches rouges les étiquettes des colonnes correspondantes, ce qui permet d'une part de calculer plus rapidement dans certains cas, d'autre part de se familiariser avec la loi de De Morgan sans l'avoir apprise verbalement.

5° Dans tous ces exercices, les enfants ont une tendance à compter les objets, ce qui les conduit naturellement à la loi fondamentale : $|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|$ (en notant cardinal $A = |A|$), mais ceci risque au début de perturber l'attention sur les concepts à étudier. Par la suite, au contraire, elle permet un quasi contrôle rapide des calculs.

6° On reconnaît dans ces exercices une préparation à la construction d'une algèbre d'ensembles sur une partition donnée. C'est ainsi qu'on peut faire établir des tableaux à 16 colonnes en y adjoignant l'univers et la partie vide. Mais tel n'est pas l'objectif immédiat d'autant plus qu'avant d'attaquer un treillis au niveau de l'ensemble des parties d'un ensemble donné, il vaudrait mieux l'attaquer au niveau inférieur, c'est-à-dire l'ensemble des parties d'un ensemble donné. Mais ceci sera un autre exemple d'organisation dans les souvenirs de l'élève sans qu'il soit utile ici d'insister sur cette organisation.

Inclusion.

Les exercices précédents seraient dangereux s'ils se limitaient à ces cas particuliers. Il est indispensable de présenter aux élèves des exemples où 2 partitions en 2 classes conduisent à une partition en 3 classes (et non en 4 comme précédemment). On reprend les mêmes activités en choisissant cette fois A et C tels que $C \subset \bar{A}$ par exemple (dans $\bar{A}$ et non dans A afin que la situation soit moins évidente, la surprise en résultant en favorisera la mémorisation). L'enfant constate qu'il lui suffit de 3 piles d'objets, d'où le dessin obtenu par imitation des dessins précédents.

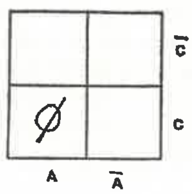


FIG. 11.

L'une des 4 classes (dans ce cas $A \cap C$) est vide. Ce dessin logiquement correct si l'on explique la signification du symbole $\varnothing$ a deux inconvénients :

1° Il risque de suggérer un concept de partition en contradiction avec le concept correct où toutes les classes sont non-vides.

2° Il n'est pas naturel; l'enfant a envie de dessiner 3 parties seulement s'il n'a pas pris l'habitude de se laisser conditionner par les exercices précédents. C'est pourquoi les enfants utilisent un dessin du type suivant :

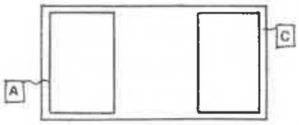


FIG. 12.

Là encore la réflexion pour être efficace ne doit pas s'effectuer seulement sur A et C, mais aussi sur les parties complémentaires $\overline{A}$ et $\overline{C}$. L'élève établit alors le tableau des 14 colonnes et constate que l'une ne contient que des zéros, $(A \cap C)$ une autre ne contient que des 1, $(\overline{A} \cup \overline{C})$ enfin $C = C \cap \overline{A}$, $\overline{C} = A \cup \overline{C}$.

L'essentiel ici est : 1° l'idée d'une partition en 3 classes; 2° les deux idées équivalentes $C \subset \overline{A}$ et $A \subset \overline{C}$ (codées ou non, mais si le signe $\subset$ est introduit il convient de souligner la différence entre une étiquette de type $(A \cap \overline{C})$ représentant un terme et une étiquette de type relationnel $A \subset \overline{C}$.

Il peut paraître préférable d'attendre une prise de contact avec des relations plus familières pour introduire des signes relationnels comme $\in$ et $\subset$ (à opposer d'ailleurs pour mieux les distinguer).

Les exercices se poursuivent alors avec des ensembles définis en compréhension (par exemple G, $\overline{G}$, M, $\overline{M}$ grands, non grands, moyens, non moyens). Ces exemples permettent de souligner l'emploi plus ou moins correct des articles partitifs dans la langue usuelle.

Conclusion.

Des exercices sur des situations réelles sont indispensables à la suite de tous ceux-ci et permettent un contrôle de la bonne compréhension du langage. Il vaut mieux sans doute réserver pour plus tard des exemples où l'on choisira 3 partitions en 2 classes, puis 4, etc. (au lieu de 2 comme ici), ce qui aura l'avantage de préciser à nouveau les concepts précédents.

En résumé, les idées essentielles de cette présentation sont :

1° Activité sur un matériel précédant toute explication ou définition verbale;

2° Création d'un nombre suffisamment grand de sous-ensembles pour motiver l'utilisation d'étiquettes et d'un langage spécial;

3° Passage de l'activité matérielle à l'utilisation d'un mode d'expression de type algébrique, ce qui d'un point de vue purement éducatif déconditionne l'enfant des habitudes de penser par l'intermédiaire d'une langue verbale et l'oblige à concentrer son attention sur la vue;

4° Distinction des éléments d'un ensemble soit par des qualités sensibles (ce qui est naturel mais logiquement mauvais puisqu'une qualité définit une classe d'objets et non 1 objet (même si cette classe n'en contient qu'un, cette classe n'est pas l'objet), soit par des noms propres (codage);

5° Familiarisation avec les concepts de sous-ensemble, complémentarité, partition, intersection, réunion, différence symétrique, fonction caractéristique.

Il est évident qu'une foule d'activités diverses peuvent être poursuivies à l'aide d'un tel matériel, mais il serait malhonnête à ce sujet de ne pas renvoyer le lecteur aux excellents travaux de DIENÈS.

Post-scriptum.

Cet article rédigé en janvier 1968 était destiné aux collègues participant à l'expérience organisée par l'Institut Pédagogique, concernant les classes de Sixième en 67-68. Il met en évidence, par ses carences, la lente évolution des idées chez tout individu normalement constitué, y compris l'auteur. Sa mise en garde contre la prolifération purement commerciale des matériels ne semble pas inutile actuellement, ce qui ne signifie pas qu'il ne faille pas faire agir les élèves sur du matériel.

En effet, la tendance actuelle des manuels est de mettre l'accent sur un symbolisme et des mots accompagnés de définitions. La pauvreté, sinon les erreurs de certains sujets dits « modernes » du B.E.P.C. ou des concours d'entrée aux E.N. souligne le danger de cette tendance. A quoi sert un langage raffiné lorsqu'on n'a pas d'idées à exprimer? A quoi bon dire « l'ensemble des tables de cette pièce » au lieu de « les tables de cette pièce ». Le problème fondamental est de montrer la nécessité de ce langage lorsqu'il y a risque de confusion. Et ce risque de confusion ne peut apparaître que si l'on travaille simultanément sur plusieurs sous-ensembles d'un même ensemble. Ceci, joint au fait que la volonté d'organisation est à la base de toute activité mathématique, explique pourquoi des jeux de « tri » (c'est-à-dire des partitions successives du même ensemble) sont indispensables avant l'introduction du langage et ceci quel que soit l'âge de l'élève. On pourrait peut-être aller jusqu'à dire qu'ils sont d'autant plus indispensables que l'élève est conditionné par sa langue maternelle, donc qu'il est plus âgé.

Le matériel décrit plus haut avait été choisi avec un manque parfait d'imagination. Il serait désastreux qu'un maître utilise uniquement un matériel de ce genre. C'est pourquoi des petites fiches sur carton représentant par exemple des pantins de formes, couleurs, coiffures, positions variées, des chats, des bateaux, des autos, etc., constituent autant de matériels efficaces. Malheureusement, certains ont cru pouvoir être utiles en vendant de tels matériels. Indépendamment du caractère commercial, cette politique me paraît pédagogiquement nocive. Car : 1° le fait de demander aux enfants de construire eux-mêmes un jeu de fiches est un excellent stimulant, et les prépare implicitement à mieux comprendre les notions présentées plus tard; 2° enfin, si des gens veulent rendre service à l'enseignement, ils feraient mieux de construire des matériels qui ne peuvent l'être par les élèves et seraient cependant d'une grande utilité (je pense à des jeux de type algébrique ou des modèles spatiaux).

Des matériels de type algébrique pourraient aussi être envisagés. Par exemple mes élèves de Sixième ont construit un jeu de fiches. Chaque fiche est constituée par 1 hexagone dont les 6 secteurs sont colorés de 6 couleurs différentes. Indépendamment des exercices analogues à ceux décrits précédemment, on retrouve derrière cette activité combinatoire une préparation aux jeux algébriques ou simplement des jeux de différences (par exemple jouer aux dominos : 2 hexagones ne sont voisins que s'ils ne diffèrent que par l'interversion de 2 couleurs consécutives, etc.). On remarquera, qu'avec un tel matériel, les sous-ensembles seront difficilement définis en compréhension, ce qui constitue un avantage pour obliger à travailler en extension.

Enfin, la représentation des ensembles par des dessins semble présenter, après quelques années de recul, autant de dangers que d'avantages. C'est pourquoi l'utilisation de cartes perforées (décrites par nos collègues lyonnais en particulier) où chaque carte représente un élément de l'ensemble, paraît être avec la manipulation directe du matériel, une excellente préparation d'une part aux dessins, d'autre part au symbolisme.

Mais là encore, c'est le maître et lui seul qui peut décider dans quelle mesure il peut brûler les étapes, si tant est qu'il faille en brûler!

Un travail analogue peut être fait avec des ensembles de couples d'objets, c'est-à-dire matériellement parlant, avec des dominos à deux cases distinctes. L'opération « composition » peut alors être introduite sous forme de jeu. On a ainsi un moyen agréable et clair de préparer l'introduction des notions concernant les relations. Cela est une autre histoire trop longue à développer ici mais à laquelle il faudra bien s'attaquer un jour ou l'autre.

S'il fallait en tirer une morale, on rappellerait volontiers ceci : « Les mathématiques ne s'apprennent pas, elles se font ». L'oublier, c'est dénaturer complètement l'esprit même de cette discipline qui est à base de recherches. L'enseignement se heurte alors au paradoxe suivant : il faut aussi donner aux élèves les moyens de faire ces recherches, c'est-à-dire très souvent leur fournir les langages que d'autres ont élaborés, d'où ce conflit entre l'acquisition des langages exigeant un effort de mémoire et l'exercice de l'intelligence, de la curiosité et de l'imagination sans lequel il n'y a plus de mathématique. Plus les enfants sont jeunes, plus ce dernier aspect est important puisque c'est l'éducation et non la culture qui est en cause.

M. D. (Juin 1969).

La réforme de l'enseignement mathématique
ou... le printemps de cet enseignement.

Le printemps, par exemple les 7, 8, 9 et 10 mai 1970, pour les journées de l'A.P.M.E.P. à Clermont.

Mathématisez l'Auvergne,
l'Auvergne vous mathématisera !

L'A.P.M.E.P. dans un Puy; sous quel aspect en sortira-t-elle?
Vous le saurez en venant à Clermont le 7 mai 1970.

Initiation à la déduction en Sixième et en Cinquième

M^me Magdeleine Motte,
Lycée Bonaparte, Toulon.

Je voudrais indiquer pourquoi le nouveau programme nous place dans de meilleures conditions d'initiation à la déduction que l'ancien (voir l'article p. 283). Je le ferai tout simplement en disant ce que j'ai fait en Sixième et en Cinquième.

Le 3 novembre, j'ai proposé, sans aucune intention au sujet de l'exploitation immédiate qui pourrait en être faite, l'exercice présenté en annexe sous le n° 1.

Le blanc a été rempli par « une » : simple exercice de mise en route et entrée dans le « dossier » de mathématiques d'un document dans lequel on reconnaîtrait plus tard une fonction.

Dès que l'exercice était achevé la même feuille était remise à l'enfant avec l'indication de remplir le blanc avec « trois ».

Pour le premier exercice plusieurs élèves demandent si elles « peuvent » expliquer pourquoi une seule flèche part de chaque bloc de A et d'autres si elles le « doivent ». Réponses : « bien sûr », « tu es libre ».

Les enfants travaillent le deuxième exercice de manières très différentes. Mais, bientôt, quelle que soit la méthode adoptée on s'inquiète : « ça va être sale si on continue ».

Je propose de travailler sur le verso de la feuille où le dessin se lit — il suffit de l'accuser — et d'examiner soigneusement ce qui se passe pour un bloc de A avant d'en prendre un autre — méthode d'ailleurs utilisée spontanément par quelques élèves.

Le même problème matériel se pose bientôt car les élèves ayant constaté que de chaque bloc examiné partent cinq flèches veulent poursuivre l'examen. Aucune n'assure qu'il est inutile de continuer : elles ne sont pas déformées. Serait-ce donc nous qui les déformerions par la suite ?

Je suggère à ces élèves que peut être notre intelligence peut nous permettre de prévoir le nombre des flèches sans qu'il soit nécessaire de les tracer.

Quelques élèves avancent vers un raisonnement qu'elles ont du mal à rédiger. Voici ce que je relève au verso de la fiche d'une élève dont j'ai par hasard le dossier chez moi aujourd'hui — et qui est une des meilleures — : « Je remarque qu'en prenant un élément de A rouge 5 flèches peuvent partir, 2 vont vers les éléments rouges, 3 vers les éléments bleus; si je prends pour départ de flèche un élément de A bleu

3 flèches vont vers les rouges, 2 vers les bleus c'est exactement le contraire. Les dessins sont reproduits deux fois à part leur couleur dans B. C'est pourquoi un élément de A rouge a 3 flèches vers les B bleus et 2 vers les B rouges ».

Le jour de la mise en commun deux élèves se proposent pour expliquer « pourquoi cinq ?» Contraintes par mes questions elles parviennent peu à peu fort bien à expliquer « pourquoi deux » et « pourquoi trois ».

Toute la classe est très satisfaite.

Les notions de paire et de couple ayant été introduites on peut présenter de petits exercices comme :

— « Je te dis l'ensemble $\{a;\ 8\}$ n'est pas une paire. Que peux-tu affirmer? ».
— « Je te dis l'ensemble $\{a;8\}$ est une paire et $\{a;8\} = \{8;12\}$. Que peux-tu affirmer?
— « Je te dis $(a;\ 5) = (10;\ b)$. Que peux-tu affirmer? ».
— « Je te dis $(a;\ b) = (c;\ d)$. Que peux-tu affirmer? ».
— « Je te dis $\{a;\ b\} = \{c;\ d\}$. Que peux-tu affirmer? ».

Plus tard l'utilisation de graphes muets, prise à Papy, m'a offert d'excellents exercices qui ont énormément plu à toutes les élèves sans exception (voir M.M.1 (102) p. 90 et 91 exercices 1, 2, 3; p. 100; p. 102, nº 2).

J'ai donné en devoir à la maison l'exercice 3 de la page 91. La plupart des devoirs — sauf deux — ne pouvaient être suspectés d'avoir reçu l'aide d'adultes. Si les enfants se tirent de manières très différentes de la rédaction, l'exercice ne dépasse pas leurs possibilités et leur plaît. La correction bien entendu exige de l'indulgence et que l'on s'attache davantage à ce qui est positif qu'à ce qui est négatif. Il y a quelques très bonnes rédactions. Les enfants ont, soit utilisé des lettres pour désigner les trois enfants, soit utilisé des lettres pour les initiales des noms et prénoms, soit les deux.

Après l'étude des notions de réflexivité, symétrie, antisymétrie, relation réciproque, on peut proposer : « Si on te dit que une relation G est réflexive peux-tu dire sans la connaître si G^{-1} est réflexive? »

Les enfants commencent par affirmer; leur conviction n'est pas établie à la légère : elles me montrent le graphe de G plein de boucles sur lequel elles ont mis les flèches, et boucles, de G^{-1}. Passer à la rédaction est difficile pour une bonne moitié de la classe. Voici ce qu'écrit une des autres :

« Je peux sans la connaître dire que G^{-1} est réflexive si G l'est.

On me dit « G est réflexive »; cela signifie que sur tous les points de la relation G on a mis des boucles. Ces boucles représentent les couples identiques de cette relation. Ex. : Si (a, a) est le couple identique de « a » il y aura une boucle sur a. Son couple réciproque est toujours (a, a) donc il y a des boucles sur G^{-1} quand elles sont sur G ».

Cela peut être le moment d'introduire lors de la correction de l'exercice un schéma logique. C'est ce que j'ai fait en suivant de très près les affirmations des enfants :

G est réflexive
$\Updownarrow$
des boucles partout
$\Updownarrow$
tout couple $(a;\ a) \in G$
$\Updownarrow$
tout couple $(a;\ a) \in G^{-1}$
$\Updownarrow$
G^{-1} est réflexive

Mais peut-être est-ce prématuré et discutable par le mélange de la langue véhiculaire et des symboles? Cependant, il faut un commencement à tout.

Nous avons traité l'exercice obtenu en remplaçant dans celui-ci « réflexive » par « symétrique ». Seules les élèves qui avaient traité rapidement le premier l'ont cherché et exposé oralement à leurs camarades. (Voir encore Papy p. 130 nº 12; p. 138 nº 13 et 17.)

Je n'ai pas pu accorder aux exercices de logique proposés par Z. P. Dienes la place que je souhaitais leur accorder. Cependant au cours de quelques séances de travaux en équipes 5 ou 6 fiches de la série 1 « disjonctions et implications » ont été étudiées avec ardeur et intérêt. On peut voir un écho à ce travail dans le travail de contrôle d'acquisitions du 3 mai (document annexé nº 2).

En Cinquième. J'ai continué à tirer parti des graphes muets au premier trimestre, avec l'étude des relations d'ordre et d'équivalence (documents annexes nº 3 et 4). Le document 3 a été proposé en travail individuel. Le document 4 a occupé les équipes environ trois heures.

La question *f* est l'occasion de constater que les informations « G est symétrique » « G est transitive » ne peuvent pas être exploitées dans un ordre quelconque.

Le 9 novembre j'ai proposé, en travail individuel, l'exercice suivant :

« On te donne les hypothèses :

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{G est une relation symétrique} & (1) \\ \text{G est une relation transitive} & (2) \\ (b;\ a) \in \text{G} & (3) \\ (c;\ a) \in \text{G} & (4) \end{array}\right.$$

Cherche les découvertes (déductions, conclusions) que tu peux obtenir. »

Toutes les élèves commencent correctement en utilisant explicitement (3) et (1), (4) et (1); presque toute la classe parvient à $(b, c) \in$ G, $(c, b) \in$ G et plusieurs élèves à : $(a, a) \in$ G, $(b, b) \in$ G, $(c, c) \in$ G. On m'a demandé des approbations, je les ai données. Mais je n'ai pratiquement pas eu à intervenir.

Quelques jours plus tard j'ai proposé :

« Tu sais A $\subset$ B. Comment peux-tu trouver d'autres inclusions vraies par introduction, ou suppression d'éléments dans A et B. Peux-tu formuler des lois? ».

En posant l'exercice, oralement, j'avais écrit au tableau A $\subset$ B et, à droite :

$$\{\ldots ?\ \ .\} \subset \{\ldots ?\ \ .\}$$

Cet exercice était proposé pour permettre de découvrir pourquoi le cardinal des inclusions dans $\mathcal{P}$ (E) triplait lorsque le cardinal de E augmentait d'une unité. Il me paraît maintenant plus intéressant en lui-même que pour l'éclairage apporté à un exercice que je négligerai probablement à l'avenir.

Une synthèse des découvertes individuelles — après un temps de recherche assez faible (20 minutes environ) a donné toutes les « lois ». Cet exercice proposé en 2e C a été un fiasco : il est vrai qu'avec ces élèves je n'avais pas crû devoir traduire l'hypothèse sous la forme $\{\ldots\ \ldots\ .\} \subset \{\ldots\ \ldots\ .\}$!

Le travail logique est absent des mois suivants : retour sur les notions de mesure et d'application; exploration de la notion d'opération et des propriétés des opérations; mais reparaît avec :

— les démonstrations de quelques-unes de ces propriétés;

— l'étude des conséquences de ces propriétés;

— l'étude de $\mathbb{Z}$ et de l'ensemble des décimaux relatifs : à peine amorcée en Sixième à cause des événements de Mai et de leur répercussion sur la date des vacances et par suite développée en Cinquième avec une formalisation plus poussée que celle qu'on aurait pu envisager en Sixième. (Voir documents annexe 5, 6, 7, 8, 9.)

L'emploi simultané des lettres soit pour représenter un relatif soit pour représenter son module — le relatif étant alors écrit $\overset{+}{a}$ ou $\bar{a}$ — s'est révélé fructueux et sans inconvénient.

On rencontre alors un bon entraînement à la déduction d'égalités :

« si $a = b$
si $c = d$

alors $a + c = b + d$ et $a + d = b + c$ » est employé avec aisance parce que la signification du signe « = » a été constamment présentée comme une relation entre les étiquettes.

On rencontre pas mal de véritables démonstrations dans l'étude de la propriété « l'opposé de la somme est la somme des opposés » et de ses conséquences. L'étude de nombreux cas sur la table d'addition non seulement a suggéré la propriété mais sa justification.

Bien entendu la définition :

a est un multiple de $b \Leftrightarrow$ il existe q tel que $a = bq$ est l'occasion comme autrefois de faire prouver la transitivité de la relation et la propriété de la somme de deux multiples et de représenter les schémas logiques des preuves.

L'étude des treillis des ensembles de diviseurs est encore l'occasion de preuves telle que :

Le treillis des diviseurs de n est $\cdot\!\longrightarrow\!\cdot\!\longrightarrow\!\cdot$ si et seulement si :

$$\begin{cases} Dn = \{.,\ .,\ .\} = \{1,\ a,\ n\} \\ \text{et } a \text{ premier;} \end{cases}$$

or $a \in Dn \Leftrightarrow n = a \times b \Leftrightarrow b \in Dn$
or $b \neq n$ et $b \neq 1$ donc $b = a$ et $n = a^2$.

Enfin l'étude de la convexité est l'occasion de contrôler si la négation de « pour tout » déjà rencontrée avec les affirmations « cette opération n'est pas commutative (associative) parce que ... » a été comprise. (Voir document annexe 10.)

Voici les réponses de 6 équipes :

— « Pour que E ne soit pas convexe il suffit qu'un segment ab ne soit pas inclus dans E les extrémités appartenant à E ».
— « ... il suffit qu'un segment ayant pour extrémités deux points de E ne soit pas inclus dans E ».
— « ... il suffit qu'un segment ayant ses extrémités dans E n'appartienne pas à E ».
— « ... il suffit que le segment rejoignant deux points appartenant à E ne soit pas inclus dans E. »
— « ... que le segment ayant pour extrémités deux points de E ne soit pas inclus dans E. »
— Une équipe a barré « ... il suffit que tout segment n'ayant pas... ne soit pas... » énergiquement mais n'a plus rien écrit.

On voit sur les exemples que j'ai examinés qu'il est possible de placer notre élève de Sixième ou Cinquième dans des situations où il a quelques informations et un petit nombre de propositions permettant des inférences : les conditions pour qu'il apprenne à déduire sont réunies. Et les dangers et difficultés de la situation géométrique antérieure écartés :

— déduire devient maintenant une nécessité pour connaître; même si une certaine intuition propose une conviction avant que le raisonnement l'ait obtenue, l'évidence est beaucoup moins grande que celles que proposait « la figure » : la déduction n'apparaît pas comme un jeu gratuit;

— le nombre des propositions dont dispose l'élève est petit; les rapprochements entre informations et propositions en sont facilités;

— la mathématique n'est pas réduite à ce jeu logique; l'élève qui ne sait pas encore le jouer n'est pas pénalisé et a d'autres satisfactions.

A tel point qu'il nous semble qu'il serait bon de conserver en Quatrième et en Troisième les avantages de cette situation.

M. M.

Annexe 1. — 3 novembre 1967.

Voici deux ensembles de blocs A et B : observe comment j'ai distingué les minces et les épais.

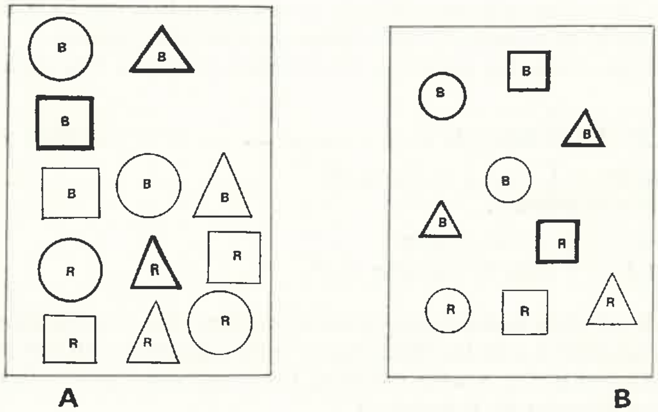


FIG. 1.

1° Place les couleurs d'après les lettres.

2° Il s'agit de placer toutes les flèches possibles allant d'un élément de A à un élément de B *sachant que* la flèche signifiera : «... a exactement □ différence avec... ».

3° Peux-tu formuler une conclusion au sujet du nombre de flèches qui partent de chaque élément de A?

Annexe 2. — 3 mai 1968.

1° *a*) Donne par énumération :

$$A = \{x / x \in I\!N,\ x \text{ est multiple de } 3,\ x < 50\}$$
$$B = \{x / x \in I\!N,\ x \text{ est multiple de } 4,\ x < 50\}$$
$$C = \{x / x \in A \text{ et } x \in B\}$$
$$D = \{x / \mathrm{A} \in A \text{ ou } x \in B\}$$

b) En t'aidant de l'écriture par énumération que tu as trouvée pour C, donne C en compréhension d'une autre manière.

c) Relie la définition de D en compréhension.

Maintenant je te dis : je pense à un élément de D qui n'est pas un multiple de 3; peux-tu me dire quelque chose qui est certainement vrai pour cet élément?

2° *a*) Donne par énumération :

$A = \{n / n \in \mathbb{N},\ n \text{ est premier, } n < 17\}$
$B = \{n / n \in \mathbb{N},\ n \text{ est premier } \textit{et } n \text{ est impair}\}$
$C = \{n / n \in \mathbb{N},\ n \text{ est premier } \textit{ou} \text{ impair}\}$

b) Peux-tu écrire des inclusions avec A, B, C?

c) Relis la définition de C en compréhension.

Maintenant je te dis : je pense à un élément de C qui n'est pas premier; peux-tu me dire quelque chose qui est certainement vrai pour cet élément?

Et toi, à ton tour, tu me dis : Madame, je pense à un élément de C qui n'est pas impair; pouvez-vous me dire quelque chose qui est certainement vrai pour cet élément?

Et je te réponds : Cet élément...

Annexe 3. — Les relations d'ordre de $E \times E$ si $E = \{a, b\}$

Soit R_1 la relation dont voici le graphe :

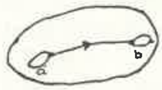
a) Complète : $R_1 = \{ \qquad \}$

b) Je dis : R_1 est une relation d'ordre. Justifie mon affirmation.

c) *Sans modifier* E, modifie le graphe précédent de façon à ne plus avoir une relation d'ordre. Justifie brièvement ce que tu fais.

S'il y a plusieurs manières de faire cela, fais autant de graphes qu'il faudra.

d) Modifie le graphe *initial* (graphe 1) de façon à avoir encore une relation d'ordre.



E

Graphe 1

S'il y a plusieurs manières de faire cela, fais autant de graphes qu'il faudra.

e) Conclusion. Si E est une paire, il existe... relations de E^2 qui sont des relations d'ordre.

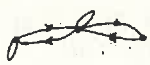
Annexe 4. — Relations d'équivalence.

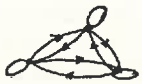
1° Recherche des exemples de relations d'équivalence : tu en as rencontrés en Sixième et tu peux certainement en trouver d'autres.

2° *Si G est une relation d'équivalence sur E:*

a) peut-on avoir un élément isolé  ?

b) peut-on avoir  ?

c) peut-on avoir  ?

d) Si on a trois éléments *a*, *b*, *c* de E liés ainsi  *et si d* est l'origine ou l'extrémité d'une flèche qui le lie à *a* que peut-on assurer?

e) Si on a  qu'aura-t-on certainement aussi?

f) Si on a  qu'aura-t-on certainement aussi?

g) *Si* l'élément *a* donne des couples de G avec *b*, *c*, *d*, *alors* j'affirme :
(,) $\in$ G, (,) $\in$ G..., etc. et je le prouve.

3° Ne serait-il pas naturel d'introduire :

a) un qualificatif pour deux éléments d'une relation d'équivalence échangeant deux flèches?

b) un nom pour toute partie de E dont tous les éléments échangent des flèches deux à deux?

Annexe 5. — *Les avantages des opérations associatives et commutatives.*

1^er^ EXEMPLE. — Soit à calculer $x = (21 \times 12) \times 5$.

a) Je *peux* faire les calculs indiqués : $x = 252 \times 5 = 1260$;

b) Mais, la multiplication étant associative, je peux calculer ainsi :

$$x = 21 \times (12 \times 5) = 21 \times 60 = 1260.$$

Le deuxième calcul est plus avantageux que le premier.

2^e^ EXEMPLE. — Soit à calculer $y = (100 - 18) - 2$.

La soustraction n'est pas associative; je *dois* effectuer les calculs comme ils sont indiqués : $y = 82 - 2 = 80$.

3^e^ EXEMPLE. — Soit à calculer $z = 37{,}5 + (69 + 2{,}5)$.

a) Je *peux* faire les calculs indiqués : $z = 37{,}5 + 71{,}5 = 109$.

b) L'addition étant associative je peux aussi calculer ainsi :

$$z = (37{,}5 + 69) + 2{,}5 = 106{,}5 + 2{,}5 = 109.$$

c) L'addition étant commutative : $z = 37{,}5 + (2{,}5 + 69)$
L'addition étant associative : $z = (37{,}5 + 2{,}5) + 69$
$z = 40 + 69 = 109$.

Le troisième calcul est le plus avantageux.

En t'inspirant de ces exemples traite les calculs suivants :

$192 + (8 + 1\,253)$	$(13{,}75 + 29) + 1{,}25$	$(9 : 1) : 2$
$(456 - 192) - 8$	$(358 \times 0{,}05) \times 20$	$9 : (1 : 2)$
$(789 \times 125) \times 8$	$\left(358 \times \frac{1}{20}\right) \times 20$	$(9 \times 1) \times 0{,}5$
$(600 : 12) : 5$	$(217 \times 7) \times \frac{1}{7}$	$(9 \times 0{,}1) \times 5$
$(378 + 240) + 60$	$(217 : 7) : \frac{1}{7}$	$(9 : 10) : 0{,}2$
$(128 + 347) + 72$		$9 : (10 : 0{,}2)$
$456 - (192 - 8)$	$A \cap (A \cap B)$	
$15 \times (999 \times 4)$	$(A \cap B) \cap B$	
$0{,}3 + (12{,}5 + 0{,}7)$	$(B \cup A) \cup B$	
$0{,}02 \times (100 \times 99)$	$(\{1, 2, 3, 4\} \cap \{2, 3, 4, 5\}) \cap \{1{,}6\}$	
$0{,}008 \times (112 \times 1\,000)$	$(\{a, b, c\} \cap \{a, b, c, d\}) \cap \{d\}$	

Annexe 6. — A, B, C sont des ensembles :

1° Compare les ensembles : $X = (A \times B) \cup (A \times C)$
et $Y = A \times (B \cup C)$

Tu as à ta disposition plusieurs procédés :

a) diagramme sagittal; *b*) tableau cartésien;
c) écriture en compréhension :

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ et } y \in \quad \}$$
$$A \times C =$$

donc $X =$

ou d'après la définition de.....

$X =$

or $Y =$

Donc :

2° Compare les ensembles : $Z = (A \times B) \cap (A \times C)$
$T = A \times (B \cap C)$

Remarque. — Si en 1° et 2° tu as donné un raisonnement par l'écriture en compréhension une figure *n*'est *pas* indispensable. Cependant tu devrais pouvoir *illustrer* ton raisonnement par une figure — de type *a*) ou *b*) — qui te permettrait d'expliquer la question à quelqu'un qui ne suivrait pas le raisonnement.

3° Ajoutons l'hypothèse B et C sont disjoints et décidons de noter $a = \text{card } A$, $b = \text{card } B$, $c = \text{card } C$.

Complète, en les justifiant *d'abord*, les affirmations :

card $(B \cup C) =$
card $Y =$
card $A \times B =$ card $A \times C =$
card $X =$

Donc si a, b, c sont des entiers naturels, alors :

Annexe 7. — *Interrogation écrite :*

1. — $(a, b) \in \overset{+}{10}$. Choisis (a, b) à ton gré : $(a, b) =$
— $(c, d) \in \overline{6}$. Choisis (c, d) à ton gré : $(c, d) =$
Complète : $(a, b) + (c, d) = (\quad) + (\quad) = (\quad) \in$

2. — Complète : $x = (2021; 2011) \in \ldots$ (1);
$y = (36752; 36758) \in \ldots$ (2);
$(x + y) \in$ (3).

Si tu sais ta leçon, as-tu besoin de calculer $(x + y)$ pour compléter (3) ? Pourquoi ? (Réponds au verso avec précision)

3. — Complète $\overline{9} + \overset{+}{6} = \ldots$

parce que :

$\overset{+}{7} + \overline{11} = \ldots$

parce que :

$\overline{8} + \overline{7} = \ldots$

parce que :

4. — *a, b, c, d* sont des nombres. Tu sais $a = b$ (1)
$c = d$ (2).

Écris des égalités que tu peux déduire de (1) et (2) en utilisant :
a) seulement l'addition :
b) seulement la multiplication :
c) à la fois l'addition et la multiplication (ne cherche pas à les écrire toutes!).

Annexe 8. — Addition dans $\mathbb{N}^2$.

L'addition dans $\mathbb{N}^2$ *est-elle commutative?*
Il faut comparer $(a, b) + (c, d)$ et
Je calcule $\qquad = \qquad$ et $\qquad = \qquad$.
Or
donc

Est-elle associative?
Il faut comparer $[(a, b) + (c, d)] + (e, f)$ et
$$[(a, b) + (c, d)] + (e, f) = (\quad , \quad) + (e, f) =$$

L'addition dans $\mathbb{N}^2$ *a-t-elle un élément neutre?*
L'addition dans $\mathbb{N}^2$ *a-t-elle un élément absorbant?*

Équations dans $\mathbb{N}^2$:
$$(2; 3) + x = (7; 4)$$
$$(2; 3) + x = (1; 3)$$
$$x + (3; 2) = (0; 0)$$

Examine d'autres cas jusqu'à ce que tu vois se dégager une conclusion.

Annexe 9. — Addition dans $\mathbb{Z}$.

L'addition dans $\mathbb{Z}$ *est-elle commutative?*
L'addition dans $\mathbb{Z}$ *est-elle associative?*
Il faut comparer $(x + y) + z$ et
Soit un couple de x, (a, b), un couple de y :
$$x + y \ni \qquad \text{et} \qquad (x + y) + z \ni$$
Or
L'addition dans $\mathbb{Z}$ *a-t-elle un élément neutre?*
L'addition dans $\mathbb{Z}$ *a-t-elle un élément absorbant?*

Équations dans $\mathbb{Z}$ *:*
$$\bar{1} + x = \overset{+}{3}$$
$$\bar{2} + x = \overline{12}$$
$$x + \overset{+}{3} = \overset{+}{1}$$
$$x + \overset{+}{3} = 0_Z$$
$$\bar{5} + x = 0_Z$$

Annexe 10. — *Approuves-tu cette définition:* « Une partie E du plan ou de l'espace est convexe si, et seulement si, tout segment ayant pour extrémités deux points de E est inclus dans E »?

Peux-tu l'écrire avec les symboles?
$$[\text{E convexe}] \Leftrightarrow [$$

Complète : « Pour que E ne soit pas convexe il suffit...

[E non convexe] $\Leftarrow$ [

Réunion de deux ensembles convexes.

— Signale en bleu une partie A convexe.

— Signale en rouge une partie B convexe de façon que $A \cup B$ non convexe.

— Signale en vert une partie C convexe de façon que $A \cup C$ convexe.

Vrai ou faux?

« La réunion de deux ensembles convexes est convexe » V F.

« La réunion de deux ensembles convexes n'est pas convexe » V F.

« Il n'est pas vrai que la réunion de deux ensembles convexes soit un ensemble convexe » V F.

« La réunion de deux ensembles convexes n'est pas nécessairement un ensemble convexe » V F.

La physique mathématique en Sixième

J.-M. Chevallier
Lycée Marcelin-Berthelot, Saint-Maur

Ce titre n'est ni une provocation, ni une plaisanterie, mais plutôt une question que je me pose et que beaucoup d'autres doivent se poser quant au caractère de notre enseignement élémentaire.

Nous n'avons pas à rougir de nous comporter de temps à autre en physiciens; même si la mathématique actuelle a considérablement élargi le cadre dans lequel nous cherchions des « situations » pour élaborer nos « modèles », la physique continue à nous fournir de telles situations, et de plus des exemples, des problèmes auxquels nous pouvons appliquer notre outil mathématique. Personnellement, j'y ai recours en mainte occasion; cependant, dans le second cycle, nous pouvons préférer nous en abstenir au nom d'un certain idéal de « pureté », puisqu'aussi bien notre collègue physicien — le vrai — a compétence dans son domaine.

Le cas du premier cycle est totalement différent. Le nouveau programme de Sixième, reprenant d'ailleurs l'ancien sur ce point, fait obligation au professeur de « mathématiques » d'étudier « certains objets géométriques ou physiques donnant lieu à mesure ». A vrai dire ces « objets » semblent s'évanouir dans les classes suivantes, ce qui n'est pas la moindre incohérence — elle aussi traditionnelle — de notre enseignement. Ces objets reparaîtront-ils ailleurs, sous une autre forme, par exemple dans la technologie dont on a beaucoup parlé? Cela seul mériterait une étude à part; sans vouloir l'aborder ici, je ne cache pas qu'à mon avis nous serons d'autant plus à l'aise pour « purifier » notre discipline qu'il existera parallèlement un enseignement concret. De toute évidence cela pose des problèmes qui ne sont pas seulement de programmes, mais d'*équipement scolaire;* il faut non le dissimuler, mais le proclamer. Nous ne devons pas nous résigner à chercher, parfois assez artificiellement, des situations propres à faire ressentir le besoin d'une multiplication dans $\mathbb{Z}$, alors que l'étude élémentaire des moments dans le levier ou le treuil fournirait des exemples doublement éducatifs.

Mais revenons à la question posée dès la Sixième : qu'enseignons-nous exactement? La mathématique n'est absolument pas une connaissance du réel; c'est une discipline de l'esprit. En tant que telle, elle ne s'oppose pas à la connaissance, elle lui est liée, mais elle ne s'identifie pas à elle. Une « physique mathématique », c'est une physique où l'explication au moins approchée du plus grand nombre possible de phénomènes est *déduite* à partir d'un petit nombre de *principes;* l'entre-deux, c'est-à-dire : le processus préalable d'abstraction dans l'élaboration des principes, la déduction proprement dite, l'application aux problèmes particuliers, tout cela est de caractère mathématique, mais aux deux bouts les principes et les phénomènes sont physiques. Même si la distinction n'apparaît pas du premier coup dans l'esprit de nos élèves jeunes, nous ne devons, nous, jamais la perdre de vue : faire « de la physique » est très légitime, pourvu que nous ne prétendions pas (et pis encore : n'imaginions pas) que nous faisons alors des mathématiques.

Malheureusement, la netteté de cette distinction varie beaucoup avec la branche de la physique considérée; c'est surtout une question d'habitudes d'esprit et de langage, en fait une question d'histoire. En particulier, du fait que la *science de l'espace* a été mathématisée de très bonne heure, on a tendance à croire que la « géométrie » fait partie des mathématiques, et cela ne laisse pas de créer bien des malentendus. S'il s'agit de la géométrie après Hilbert, celle où les principes ont perdu tout contenu physique pour devenir des axiomes — purement gratuits sous réserve de compatibilité logique — celle où l'on s'attache à la liberté de l'exploration intellectuelle plutôt qu'à l'adéquation au réel, ce caractère purement mathématique n'est pas discutable; mais l'étude de cette géométrie-là demande un niveau déjà un peu élevé. Ce n'est pas elle qui nous occupe ici; certes l'enseignement élémentaire peut fort bien se proposer de *préparer les voies* à cette libre construction, mais il le fera d'autant mieux que nous aurons pris une conscience plus nette de sa dualité.

Au fond nous sommes des *fabricants d'opérateurs;* il est sain qu'avant de jongler avec ces opérateurs, nos élèves aient eu l'occasion de les roder sur des objets physiques, mais il est dangereux qu'ils confondent le matériau et l'outil. A cet égard on peut se demander si la notion d'*opération externe* ne devrait pas apparaître beaucoup plus tôt comme une notion fondamentale; la suite fournira des exemples de cette idée.

***

Des questions de ce genre se posent dès qu'on essaie de raccorder la partie nouvelle du programme (ensembles, relations, en particulier numériques) avec l'ancienne (longueurs, aires, vitesses, etc.); la réponse ne semble pas toujours aussi claire qu'on le souhaiterait, ni dans l'esprit de beaucoup de collègues, ni dans les manuels existants, ni dans les programmes eux-mêmes ou les instructions. Ce n'est pas une critique, mais la constatation d'un embarras assez naturel, et je n'y échappe pas plus que les autres.

Le cas du repérage — plutôt sacrifié dans bien des manuels —, celui de la mesure sont des exemples flagrants. Je n'essaierai pas de les traiter au fond, puisqu'aussi bien REVUZ l'a fait aux Journées de Besançon et en mainte autre occasion, avec une compétence que je ne lui dispute pas; je me bornerai à les examiner sous un jour légèrement différent qui fera apparaître quelques divergences : elles ne sont pas essentielles, mais elles ne sont pas non plus de simples nuances.

Bien entendu, je m'estime tout aussi incapable qu'un autre de définir proprement une *ligne continue* — droite ou courbe, plane ou gauche, peu importe — devant des élèves de Sixième. Prenons-la donc comme un donné physique, *avec ses propriétés topologiques*. Déjà nous tombons sur un premier obstacle : si cette ligne ne se « ferme » ni ne se « croise », il est aisé d'admettre sur elle l'existence d'un ordre total, dans le cas contraire l'ordre ne pourra être sauvegardé qu'au prix d'une coupure qui rompt la continuité; tel est le cas du cercle, qui annonce les difficultés futures touchant les arcs dits orientés et rend nécessaire dès à présent la coupure des parallèles terrestres sur l'antiméridien de Greenwich.

Une fois cet ordre admis, en quoi consiste un « repérage grossier »? Essentiellement à établir une bijection croissante entre une *graduation* G — c'est-à-dire un sous-ensemble discret (d'ailleurs absolument arbitraire) de points de la ligne, ordonné par l'ordre induit — et un intervalle $\mathbb{Z}'$ de $\mathbb{Z}$. Cette bijection étant entièrement déterminée dès que l'on connaît le point A choisi pour origine de la graduation, ce « repérage grossier » apparaît comme un triplet (G, A, $\mathbb{Z}$). Le même canevas fournit une mesure, soit d'un ensemble de points de la graduation, soit d'un ensemble de semi-ouverts ayant pour extrémités deux points consécutifs de G; un « mesurage grossier » n'est autre que le couple (G, $\mathbb{N}$), l'origine n'ayant plus besoin d'être distinguée.

« Affiner » le repérage ou la mesure revient à remplacer G par une nouvelle graduation G_1 en introduisant — toujours de façon arbitraire — entre deux points consécutifs de G des points intermédiaires en nombre k—1 (si l'on travaille en base k); on a alors le choix entre le repérage (G_1, A, $\mathbb{N}$), dans lequel les anciens numéros auront été multipliés par 10, et le repérage (G_1, A, $\mathbb{D}_1$), puis (G_2, A, $\mathbb{D}_2$), (G_3, A, $\mathbb{D}_3$)... où le numérotage se fait au moyen des nombres à une, deux, trois... « décimales » ce qui offre l'avantage de conserver les anciens numéros et de frayer la voie vers l'ordre « dense » dans les ensembles numériques.

De même, acceptant comme intuitive la notion de surface continue, on tracera sur cette surface un réseau R de lignes; toujours sous certaines réserves topologiques (en particulier éviter que les lignes d'une même famille s'entrecroisent), on pourra, après choix d'un nœud origine A, repérer soit les nœuds, soit les mailles de R au moyen de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (*). Si une partie de la surface a pour bord des parties des lignes de R, sa mesure est un nombre de mailles; les mesurages de plus en plus fins sont ici (R, $\mathbb{N}$), (R_1, $\mathbb{D}_2$), (R_2, $\mathbb{D}_4$), etc.

J'insiste sur le fait que la « forme » des mailles ne joue aucun rôle; se borner à des carrés ou même des parallélogrammes n'a aucun intérêt puisqu'on est obligé de les abandonner pour le repérage sphérique. A ce propos, sans qu'il soit question de faire une théorie de la cartographie, visiblement déplacée ici, la diversité des systèmes géographiques de représentation (orthographique, stéréographique, Mercator, Mollweide, etc.) fournit assez d'exemples de l'indépendance complète entre « forme » et repérage pour qu'on leur accorde plus d'importance que ne le font habituellement les manuels. La condition posée plus haut — que les lignes d'une même famille ne s'entrecroisent pas — trouve un magnifique contre-exemple avec les pôles géographiques où la convergence des méridiens rend illusoire toute « longitude »; et si l'on cherche à se débarrasser de cette convergence, le remède est pire que le mal, car on abolit du même coup tout repérage polaire (Mercator) : le fameux ours blanc du Pôle Nord (ou le pingouin du Pôle Sud) sont — chose étrange — écartelés d'*Est en Ouest!*

Il convient de souligner que nous trouvons dans ce qui précède, *en tant que mathématiciens*, tout ce qui nous est nécessaire au niveau considéré, et même sensi-

---

(*) Noter au passage que, pour la commodité, on préfère *l'ordre-produit* à un ordre total. On rappelle à ce propos que l'ordre dans un ensemble est *total* si, étant donné deux éléments quelconques, on peut toujours décider lequel est « antérieur » à l'autre (tel est le cas des entiers dans Z); ici, on n'indique aucun moyen de décider si un couple (a, b) est « antérieur » ou non à un autre couple (c, d), on considère qu'il est suffisant et plus avantageux pour repérer un point ou une maille de connaître le numérotage de sa « ligne » et celui de sa « colonne ». C'est en cela que consiste l'ordre-produit.

blement plus. Une fois admises les propriétés topologiques, le rôle du support physique est réduit au minimum; ce qui apparaît au premier plan, ce sont les propriétés corrélatives des « réunions disjointes » et des sommes numériques, celles des produits cartésiens et des produits numériques (on peut même se demander si l'on n'aurait pas eu intérêt à accentuer cet aspect dans le programme). De même se trouvent dépouillés de tous éléments superflus le problème du changement d'origine par « translation » et le problème du changement d' « unité », qui n'est autre que l'affinage. La nette séparation entre le rôle physique de la graduation G et le rôle mathématique des opérateurs entiers nous met à l'aise pour introduire l'addition dans $\mathbb{Z}$ suivant le schéma (qui donnera plus tard la construction d'un espace affine sur un espace vectoriel).

$(\mathrm{MT}a)\mathrm{T}b = \mathrm{MT}(a + b)$, où l'opération externe T est un « déplacement physique » opérant sur les points M de la graduation, alors que + symbolise l'addition « pure » : il suffit d'imaginer pour G n'importe quelle ligne d'autobus découpée en sections, pour a et b un nombre de tickets, par exemple bleus ou rouges suivant le sens de parcours. Enfin nous disposons, avec l'ordre, de la notion d'encadrement; ici encore on peut juger excessive la discrétion du programme quant à la compatibilité de l'ordre avec certaines opérations dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{D}$, sur quoi se fondent tous les problèmes d'encadrement : il est beaucoup plus difficile d'évaluer l'aire d'une table que de faire une multiplication exacte, cela on ne l'apprendra jamais trop tôt!

***

Cependant nous en tenir là ne serait conforme ni au programme, ni aux besoins pratiques : nous devons nous inquiéter, *en tant que physiciens* cette fois, de savoir si les segments de la graduation, les mailles du réseau..., sont « superposables » (« isométriques », « équivalents »). C'est seulement alors que s'introduit l'idée de graduation « régulière » ou, ce qui revient au même, l'idée d'*unité* de longueur, d'aire, etc. Fondamentalement, rien n'est changé : un mesurage à 1 centimètre près est à présent le couple (cm, $\mathbb{N}$) affiné en (mm, $\mathbb{N}$) ou en (cm, $\mathbb{D}_1$); à la dimension 2, un mesurage à 1 mètre carré près est (m^2 , $\mathbb{N}$), affiné par exemple en (cm^2, $\mathbb{N}$) ou (dm^2, $\mathbb{D}_2$), ou (m^2, $\mathbb{D}_4$); même chose pour les temps, les masses, etc.

Il subsiste cependant un malaise, une équivoque, qui apparaissent dans les notations, mais sont plus profonds : est-ce que AB signifie 3 ou bien 3 cm? J'avoue que, si nos élèves le savent après la lecture de la plupart de leurs manuels, ils sont diablement intelligents et n'ont que faire de nos conseils; souvent le même ouvrage, à quelques pages, voire à quelques lignes d'intervalle, passe d'une interprétation à l'autre sans même prévenir. Pis encore, on a la pénible surprise de lire à peu près partout (du moins dans les manuels qui donnent des exemples) des écritures bâtardes du genre de : $3 + 5 = 8$ cm; on ne saurait mieux brouiller les cervelles innocentes, les inciter à écrire plus tard : $3 + 5 = 8x$ et les « conditionner » à ne jamais savoir ce qu'est une opération externe.

Pour les « purs », la longueur est une application à valeurs numériques; elle s'identifie donc à la mesure (ou du moins une certaine mesure) et il faut écrire AB = 3. Mais, comme au moindre changement d'unité j'aurai AB = 30 ou AB = 0,03, cela est propre à faire naître des doutes sur la transitivité de l'égalité. Je fais l'âne, bien sûr; ce qu'on voulait me faire entendre, c'est que cm-mes AB = 3, mm-mes AB = 30, etc. D'accord, mais ce que démontre justement cette forme, c'est que AB n'était pas un nombre, et, comme de surcroît elle est fastidieuse, elle incite à revenir à l'écriture AB = 3, donc au fond *dans le couple* (cm, $\mathbb{N}$) *à ne considérer que* $\mathbb{N}$.

Franchement, AB = 3 cm = 30 mm était plus clair. Les fanatiques du nombre pur ont d'ailleurs la ressource de transformer cela en $\frac{AB}{cm} = 3$ et $\frac{AB}{mm} = 30$ en interprétant les premiers membres non comme des rapports — qui leur feraient probablement horreur — mais comme de simples notations, tout de même plus légères que les précédentes.

Pour constater les mauvais tours que nous joue cette obsession du nombre, il n'est que de lire certains ouvrages : on y relève par exemple qu'il convient de bien distinguer la densité, « qui est un nombre » (il s'en trouve même encore pour ajouter « abstrait » !) de la masse volumique, laquelle est « la masse de l'unité de volume »; ce serait lumineux si, quelques pages auparavant, la masse n'avait été définie... comme un nombre. D'ailleurs, dès l'instant que tout est nombre (Pythagore avec nous !), on ne voit pas pourquoi cette densité, cette masse, ne seraient pas *aussi* une longueur, un temps, une vitesse... et l'âge d'un sexagénaire égal à l'angle d'un triangle équilatéral. J'entends bien qu'il s'agit d'applications *différentes* ayant *même* ensemble de valeurs; mais, si l'on commence précisément par dissimuler la chose sous des notations insuffisamment explicites, il faudra pas mal de salive avant que l'élève de Sixième moyen en prenne une nette conscience, ... surtout dans le cas de l'eau, qui a pris la fâcheuse habitude, depuis la Révolution, d'avoir une masse et un volume de même valeur.

Nous a-t-on assez dit, et à bon droit, que la mathématique « moderne » allait enfin nous libérer de la tyrannie du Nombre? établir entre des ensembles tout-à-fait quelconques des relations qui ne seraient plus forcément numériques? Eh bien, voici l'occasion! Dans une collection E d'objets, une bille, un dé, un caillou, plongés dans un vase à trop-plein, font écouler exactement de quoi emplir un même récipient : c'est une relation d'équivalence sur E, et j'appelle *volume* la classe d'équivalence; d'autres objets font équilibre à une même tare sur la balance : autre classe que j'appelle *masse ;* comme de toute évidence la bande de papier ou le compas ne sont pas moins « physiques » que les instruments précédents, nouvelle classe, la *longueur*, etc. Rien n'empêche d'aller jusqu'à l'ordre sur ces classes — car « plus gros », « plus massif », « plus long » sont des notions directement accessibles par l'expérience — ou jusqu'à une approche qualitative de la densité (masse supérieure à volume égal) sans qu'à aucun moment le nombre soit intervenu. C'est pourquoi donner de ces choses-là des *définitions* numériques me paraît aller à contre-sens.

Ce qui n'est pas douteux, en revanche, c'est que notre tâche consiste à *introduire* le nombre dans cet embryon de « physique mathématique », fort évidemment par le canal de la mesure et le biais des opérations externes... qui nous achemine vers les espaces vectoriels.

Pour ce qui est linéaire, nous disposons d'une « addition interne » des classes (notons-la s), qui débouche naturellement sur une « multiplication externe à opérateurs dans $\mathbb{N}$ », ultérieurement dans $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ (notée par simple juxtaposition). Cela nous permet d'écrire :

$$(1) \quad \begin{cases} (3 \text{ cm})\ s\ (5 \text{ cm}) = (3 + 5) \text{ cm} \\ 3 \text{ cm} = 3\ (10 \text{ mm}) = (3 \times 10) \text{ mm} \end{cases}$$

Un peu plus délicat, mais pas essentiellement différent, est le cas des « formes bilinéaires » — ou trilinéaires — où cela se combine avec une « multiplication extérieure » (notons-la $\perp$) possédant les propriétés suivantes :

$$(2)\quad \begin{cases} (3\text{ m}) \perp (4\text{ m}) = (3 \times 4)(\text{m} \perp \text{m}) \\ [(3\text{ m})\, s\, (2\text{ m})] \perp (4\text{ m}) = [(3\text{ m}) \perp (4\text{ m})]\, s'\, [(2\text{ m}) \perp (4\text{ m})] \end{cases}$$

(Dans cette dernière expression, s' désigne une « somme » d'aires comme s désignait une « somme » de longueurs. Remarquer d'autre part qu'il n'est pas nécessaire que les deux « facteurs » de l'opération $\perp$ soient les mêmes, cela serait même plus clair avec des facteurs différents comme dans le vieil exemple des tonnes-kilomètres, ici $\text{t} \perp \text{km}$.)

Visiblement les propriétés (1) et (2) sont le fidèle reflet des propriétés classiques de l'addition et de la multiplication dans les ensembles numériques. Cette analogie — plus précisément cet isomorphisme — justifie l'attitude des « purs » lorsqu'ils rejettent toute référence à des « grandeurs physiques », mais elle la justifie *à terme* et non d'emblée. Elle peut justifier aussi l' « abus de notation » qui consiste à remplacer s ou s' par $+$, la juxtaposition ou $\perp$ par $\times$. Je sais que certains collègues sont allergiques à des écritures comme celles-ci :

$$2\text{ cm} \times 3\text{ cm} = 6\text{ cm}^2$$
$$15\text{ km} : 3\text{ h} = 5\text{ km/h}$$
$$8\text{ kg} : 4\text{ dm}^3 = 2\text{ kg/dm}^3 = 2\text{ g/cm}^3$$

Cette hostilité peut avoir des raisons pédagogiques; c'est un plan sur lequel les avis se partagent, car on peut tout aussi bien plaider que l'indication constante des unités sert de garde-fou à l'élève et le prépare aux futures « équations aux dimensions »; je l'ai fait pendant des années, d'autres le font sans dommage semble-t-il, mais enfin le débat reste ouvert. En revanche, il me paraît difficile d'invoquer des raisons *théoriques* profondes à ce refus d'employer $+$ et $\times$ ailleurs que dans les ensembles numériques : si « abus de notation » il y a, disons qu'il est constant et inévitable, sans quoi nous serions ensevelis sous l'avalanche des notations. Et tout le reste est superstition.

***

On est libre de trouver les présentes réflexions soit « conservatrices », soit « progressistes », soit même les deux à la fois; on est même libre de n'y accorder aucune importance. Je ne fais pas de profession de foi et me bornerai en conclusion à souligner deux points :

1. Rien n'est plus absurde que d'introduire dans un programme des notions nouvelles — ici les ensembles et relations — si c'est pour ne pas s'en servir et continuer à enseigner les « surfaces » comme avant : c'est cette articulation que j'ai cherchée ici, sous une forme assez condensée, destinée (est-il besoin de le dire) aux collègues et non directement aux élèves.

2. On ne reproche pas à une synthèse d'être vaste, ou même ambitieuse, mais on peut lui reprocher d'être prématurée si elle néglige de s'appuyer sur une analyse préalable qui, elle, doit être modeste, soigneuse et patiente. La « physique », au sens large, continue à fournir un terrain de choix à cette analyse.

J.-M. C.

P.S. — Le rapport de la Commission Lichnérowicz sur l'enseignement élémentaire condamne l'écriture $12\text{ cm} + 5\text{ cm} = 17\text{ cm}$. Je signale la chose par souci d'objectivité sans me déclarer couverti pour autant. D'ailleurs le rapport retombe immédiatement dans les embarras de langage : « le centimètre étant l'unité, la longueur est 17; ou, en langage courant, la longueur est 17 centimètres ». Eh bien, vivent les crocheteurs du Port-au-Foin! Si les mathématiciens veulent parler autrement, qu'ils disent : « le centimètre étant l'unité, la *mesure* est 17 »; quelle précision apporte *longueur?*

Jeu avec un alphabet de quatre lettres

C'est un jeu « de rentrée », proposé le 5 octobre en Sixième : « Nous sommes chargés de mission dans un pays lointain dont la langue s'exprime avec l'alphabet $\{a, b, c, d\}$. Nous devons établir un dictionnaire indiquant tous les mots possibles utilisant ces seules lettres » (l'énoncé ne donne aucune autre indication).

Première étape : les équipes se lancent dans la recherche, beaucoup d'enfants travaillent dans le désordre et assez fiévreusement. Une équipe : « je cherche d'abord tous les mots qui commencent par a ». Une autre : « je commence par les mots de 4 lettres ».

Deuxième étape : l'inquiétude se répand d'équipe en équipe : « on ne finira jamais ». Un enfant vient au tableau et écrit « *aaabacdaaaba* » ; une discussion s'engage : « il va falloir préciser les règles du jeu », « interdire les répétitions », « limiter le nombre de lettres des mots », « limiter les répétitions, à deux par exemple ».

Troisième étape : on choisit la règle (l'axiome), « une lettre doit être nommée au plus une fois dans un mot ». Il reste à trouver une méthode pour trouver tous les mots possibles et ne les nommer qu'une seule fois. Quelques enfants (très peu) manient les permutations circulaires avec une remarquable aisance. Je lance l'idée de l'arbre qui sera souvent reprise au cours de l'année. Remarque : deux élèves (sur 40) ont découvert le « mot vide » !

Exercices : 1° Un enfant propose un mot ; est-il dans l'arbre ? Comment l'obtient-on ? Par quel chemin ? Peut-on se tromper de chemin ? Y a-t-il deux chemins possibles ? N'y a-t-il jamais qu'un seul chemin ?

2° Est-on sûr qu'il n'y a pas deux mots identiques ? Pourquoi ?

3° A-t-on obtenu le dictionnaire complet ?

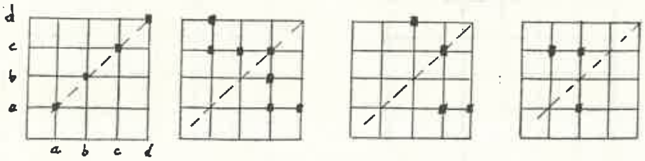
Remarques : certains enfants se proposent pour afficher dans la classe un arbre et la règle du jeu. En décembre, l'étude des parties d'un ensemble a permis une nouvelle évocation de ce jeu.

M[me] CHOUCHAN,
(Lycé de Montreuil-sous-Bois).

Propriétés des graphes de relations remarquables dans un ensemble

Il est possible de donner une signification géométrique aux définitions classiques de réflexivité, symétrie, antisymétrie et transivité, à la condition de représenter l'ensemble deux fois (ensemble de départ et ensemble d'arrivée) sur un couple de deux demi-droites perpendiculaires; les éléments seront régulièrement espacés, et écrits dans le même ordre sur les deux demi-droites. Nous remarquerons la bissectrice de l'angle des deux demi-droites.

1. *Signification géométrique des quatre définitions de base.*



Réflexivité *Symétrie* *Antisymétrie* *Transitivité*

FIG. 1.

a) *Réflexivité :* $\forall a$, $a\mathrm{R}a$. Tous les couples (a, a) appartiennent au graphe, c'est-à-dire que tous les points possibles de la bissectrice appartiennent au graphe.

b) *Symétrie :* $\forall a$, $\forall b$, $a\mathrm{R}b$ implique $b\mathrm{R}a$. Donc tout point du graphe est tel que son symétrique par rapport à la bissectrice appartient aussi au graphe.

c) *Antisymétrie :* $\forall a$, $\forall b$, $a\mathrm{R}b$ et $b\mathrm{R}a$ impliquent $a = b$. Donc aucun point du graphe, en dehors de ceux de la bissectrice, n'a son symétrique par rapport à cette bissectrice sur le graphe.

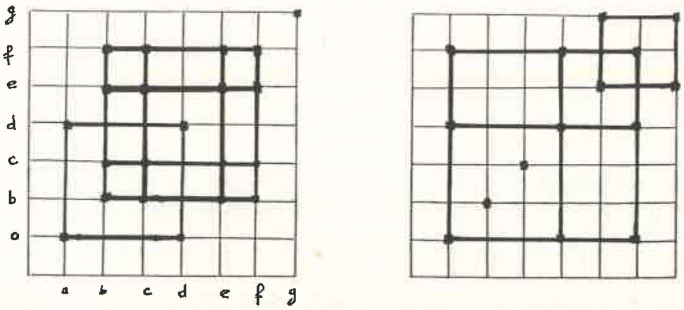
d) *Transitivité :* $\forall a$, $\forall b$, $\forall c$, $a\mathrm{R}b$ et $b\mathrm{R}c$ impliquent $a\mathrm{R}c$. Les couples (a, b), (b, b) et (b, c) ont pour images les trois sommets d'un triangle rectangle dont le sommet de l'angle droit appartient à la bissectrice. On peut compléter le rectangle ainsi commencé. S'il y a transitivité, c'est-à-dire si les couples (a, b) et (b, c) appartenant au graphe, (a, c) lui-même appartient au graphe, alors ce couple (a, c) est le quatrième sommet du rectangle.

2. *Graphes de relations d'équivalence ou de relations d'ordre, dans le cas d'ensembles finis.*

Si l'on fixe la partition ou l'ordre d'avance, le graphe est facile à construire et l'on peut constater ensuite les propriétés géométriques correspondantes.

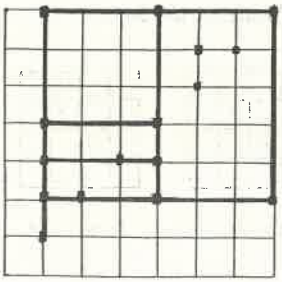
Mais il est plus délicat de compléter une relation pour que ce soit éventuellement une relation d'équivalence ou une relation d'ordre. Une étude géométrique peut permettre de conclure.

Voici quelques exemples remarquables pour un ensemble comportant 7 éléments.

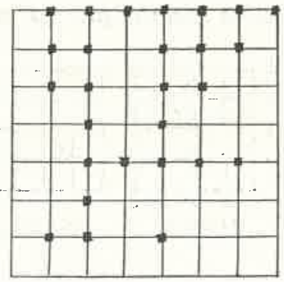


Équivalence : classes (a, d), (b, c, e, f), (g) Classes (a, d, f), (b), (c), (e, g)

FIG. 2.



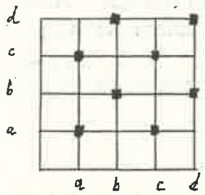
Ordre partiel: $e \mathrm{R} f$; $a \mathrm{R} d \mathrm{R} c$
et $a \mathrm{R} d \mathrm{R} g \mathrm{R} b$



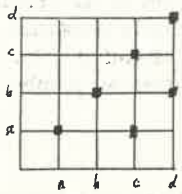
Ordre total:
$b \mathrm{R} d \mathrm{R} a \mathrm{R} e \mathrm{R} f \mathrm{R} c \mathrm{R} g$

FIG. 3.

Remarques : 1° Pour que la transitivité existe, il suffit qu'elle ne soit pas contredite. Voici un exemple de relation d'équivalence et un exemple de relation d'ordre sans exemple de transitivité.



Classes : (a, c), (b, d)



Ordre partiel : $c \mathrm{R} a$; $d \mathrm{R} b$

FIG. 4.

2° Une relation seulement réflexive est à la fois une relation d'équivalence et une relation d'ordre partiel !

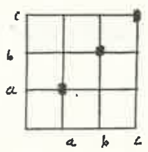


FIG. 5.

3. Exemple de problème : Soit la relation R sur l'ensemble E des nombres entiers de 1 à 8 ($E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$) définie de la façon suivante :

$$x \mathrm{R} y \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + y^2 - 11x - 7y + 40) = 0 \qquad (1)$$

Dessiner le diagramme et montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre partiel.

Le graphe a toutes les propriétés pour être celui d'une relation d'ordre partiel (6R5R2 et 7R4R3).