

# Un hiatus épistémologique : mathématiques pures et mathématiques appliquées

René BOIREL et Francisque SALLES

*Institut National des Sciences Appliquées, Lyon.*

## 1. Avant-propos.

On conçoit habituellement les « mathématiques appliquées » comme l'application des mathématiques pures à des situations concrètes dont on veut donner une représentation rationnelle, représentation qui reste toujours approchée.

Mais il faut bien convenir que, le plus souvent, cette application n'est ni immédiate, ni directe. Elle exige de l'ingéniosité non seulement pour adapter des méthodes générales aux cas particuliers, mais aussi pour inventer les méthodes d'application proprement dites. Ce sont ces dernières qui constituent, en effet, l'essentiel des « mathématiques appliquées ». Le mathématicien appliqué doit se rendre compte de l'influence des hypothèses simplificatrices, nécessaires pour établir le modèle, sur le résultat final.

Notamment le physicien, comme l'ingénieur, doit choisir entre plusieurs manières d'effectuer un calcul numérique, la plus précise, voire la plus rapide, et surtout celle qui permet d'obtenir des résultats significatifs. S'il s'agit, par exemple, de calculer une intégrale, on ne peut dans la majorité des cas concrets, utiliser les méthodes classiques : la notion d'intégrale implique, en effet, l'accroissement infiniment petit de la variable. En particulier, avec un ordinateur électronique où ces accroissements ne peuvent être que finis et, par conséquent discontinus, ce sont des méthodes de calcul numérique par différences finies qui permettent de calculer la valeur de l'intégrale : méthodes des rectangles, des trapèzes, de Simpson, de Gauss, de Radon, de Tchebycheff... Des considérations de précision et de rapidité des calculs guideront le choix de celle qui est la plus adaptée.

Dans beaucoup de cas, l'expression mathématique qui permet de représenter un phénomène concret n'est pas connue. A quoi sert de donner une traduction symbolique d'une expérience ou du fonctionnement d'un moteur si l'on ne peut l'utiliser, précisément parce qu'on ne sait pas effectuer les calculs correspondants? C'est pourquoi la tâche des mathématiques appliquées est d'élaborer non seulement des méthodes de calcul, mais aussi et surtout des méthodes de traitement mathématique des phénomènes permettant d'aboutir à des expressions calculables.

Notamment, quand pour exprimer l'évolution d'un phénomène, le physicien ou l'ingénieur doit utiliser une équation aux dérivées partielles, il est souvent embarrassé, car l'on ne sait pas résoudre la plupart du temps une telle équation. Il est alors bien obligé d'avoir recours à des procédés lui permettant de passer d'une expression comprenant des dérivées partielles à un système linéaire ou à un système d'équations différentielles.

Pour cela, il tente de concevoir une modification de la structure théorique du phénomène considéré qui laisse intactes ses caractéristiques principales et rende possible cette nouvelle transcription. Une telle représentation, tout en n'étant qu'approchée, exprime alors les propriétés essentielles qu'il s'agit de calculer.

On se rend compte qu'une modification dans la manière de concevoir le phénomène envisagé est aussi indispensable pour passer des dérivées partielles aux équations différentielles, dès qu'on prend conscience que le premier type d'équation exprime souvent un mélange de deux propriétés de la matière. Par exemple, si dans l'étude de l'écoulement de la chaleur on aboutit à l'équation de Fourier, n'est-ce pas parce que l'on tient compte de deux propriétés simultanées : la matière emmagasine de la chaleur, mais aussi elle la laisse écouler. De même, en résistance des matériaux, pour les plaques, la coexistence d'efforts normaux et de cisaillement aboutit à la nullité du double Laplacien (fonction d'Airy).

Dès lors, si l'on veut obtenir un modèle de ces phénomènes utilisable numériquement, il faut séparer leurs propriétés simultanées. Déjà Aristote n'affirmait-il pas que, sur le plan de la représentation mathématique du monde physique « on peut arriver à d'excellents résultats en posant comme séparé ce qui n'est pas séparé » (1)?

Pour la chaleur, si l'on modifie la structure théorique des phénomènes en séparant leurs propriétés simultanées, on substitue à un conducteur continu, pourvu de la double qualité de récepteur de chaleur et de conducteur, un ensemble discontinu de récepteurs seuls et de conducteurs de chaleur régulièrement espacés (2). On fait apparaître ainsi des expressions mathématiques calculables numériquement.

(1) ARISTOTE, *Métaphysique M*, chap. 3, 1078a.

(2) Cf. F. SALLES « Impossibilité d'appliquer à certains problèmes techniques les résultats des mathématiques pures », in Actes du Colloque « *Calcul numérique, calcul physique* », Paris 1960, p. 29.

De même on exprime habituellement dans les traités de mécanique les vibrations d'une poutre à l'aide d'une équation aux dérivées partielles, dont on ne connaît la solution que dans des cas très rares. Pour les cadres, il n'y a même pas de systèmes aux dérivées partielles. Ces difficultés proviennent de ce qu'on envisage alors le mélange d'une propriété relative à la masse, l'énergie cinétique, et d'une propriété relative à l'élasticité, l'énergie élastique. On devrait donc aboutir à des expressions mathématiques plus simples si l'on pouvait transformer la structure théorique de la « poutre » de manière à séparer ces deux propriétés. Pour cela, on considère la poutre comme dénuée de masse, mais conservant toutes ses propriétés élastiques. Ainsi, elle devient un « ressort » qui emmagasine à certains moments de l'énergie sous forme élastique et à d'autres moments la rejette. Si l'on répartit ensuite judicieusement les masses de la poutre en des points bien choisis — pratiquement au milieu de segments en lesquels on divise la poutre —, on tient compte de l'énergie cinétique.

Bien entendu, c'est la confrontation des nombres obtenus par les nouvelles formules mathématiques avec les résultats théoriques connus et les résultats expérimentaux qui permettra de savoir si le nombre et l'emplacement des masses choisis conviennent et, éventuellement, de les préciser par approximations successives (1).

Ces exemples montrent que le traitement mathématique des problèmes de physique et de technique, loin de se réduire à l'application consciencieuse des connaissances théoriques, exige de l'ingéniosité, autant que les mathématiques pures. Et cela d'autant plus que souvent ingénieurs et physiciens doivent forger leurs propres instruments mathématiques. N'est-ce pas la preuve que les « mathématiques appliquées » ne sont pas l'application directe des mathématiques pures aux situations concrètes? On ne fait des mathématiques appliquées qu'en cherchant un modèle symbolique adapté aux résultats expérimentaux.

Même lorsqu'on est amené ainsi à reconnaître une relative autonomie aux mathématiques appliquées, on a tendance à réserver aux mathématiques pures le privilège de la pleine intelligibilité : elles seules éclaireraient, en définitive, les opérations symboliques effectuées par le praticien, voire inventées par lui.

Or le calcul opérationnel, qui est un exemple remarquable de l'autonomie des mathématiques « appliquées », révèle que dans certains cas ces dernières peuvent avoir une toute autre interprétation physique que leur interprétation théorique élaborée par les mathématiciens.

*La plupart du temps la recherche mathématique appliquée du physicien précède la théorie du mathématicien et conduit finalement ce dernier à des théories nouvelles.* A la fin du siècle dernier le physicien et ingénieur Heaviside inventa le calcul symbolique en posant  $\frac{d}{dt} = p$ . Il aboutit à un calcul très

(1) Cf. F. SALLES « Étude des vibrations mécaniques par la méthode de concentration des masses », Communication faite au Congrès de l'Association française pour l'avancement des Sciences, Tours 1965.

ingénieurs des circuits électriques. Critiqué avec violence par les théoriciens il répondit que son ignorance de la digestion ne l'empêchait point de manger! Wiener, Carson, Nyquist, Bloch, vers 1930, identifièrent son calcul avec la transformation de Laplace et l'appliquèrent aux servo-mécanismes. Ce fut l'école française de mathématiques avec Leroy, Poly, Humbert, Schwartz, qui élucida complètement le calcul symbolique. Il faut toutefois remarquer que les physiciens l'employaient déjà depuis plus de cinquante ans!

## 2. Exemple concret.

Beaucoup de phénomènes physiques consistent en le passage brusque d'un état A constant à un autre état B constant; on peut citer le passage d'un courant dans un circuit, la charge d'un condensateur, la mise sous charge d'une éprouvette de traction. On idéalise mathématiquement ce passage par la « fonction échelon unité » (unit step de Heaviside)  $u(t)$ .

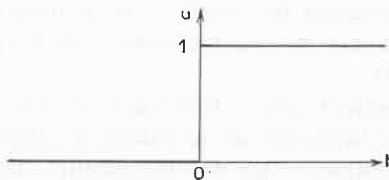


FIG. 1.

Curieuse fonction que cette fonction « échelon unité »! Elle est nulle pour  $t \leq 0$ , et atteint brusquement la valeur 1 dès que  $t > 0$ . Comment interpréter cette discontinuité caractéristique ou, plus exactement, puisque la fonction ne peut avoir deux valeurs différentes au même instant, comment rendre compte du passage brusque de la valeur 0 à la valeur + 1?

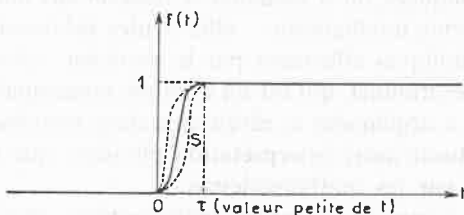


FIG. 2.

L'interprétation proposée par les physiciens est simple. Le déclenchement d'un phénomène  $f$  débute par une période « transitoire », où la grandeur caractéristique de ce phénomène s'élève d'une manière continue, selon une courbe en « S », de la valeur 0 à la valeur correspondant à la production effective du phénomène (pour  $t = 0_+$ , comme disent les mécaniciens) (Fig. 2).

Cette courbe en « S » n'est jamais la même, car la période transitoire du phénomène se modifie à chaque nouveau déclenchement. En effet, ce dernier transforme les éléments constitutants de l'appareillage permettant de produire le phénomène. Par exemple, s'il s'agit du passage d'un courant électrique dans un conducteur les étincelles de contact ou de rupture modifient les plots du commutateur.

La dérivée de la fonction  $f(t)$  représentée par la figure 2, soit  $f'(t)$  est représentée figure 3, elle est telle que son aire

$$\int_0^{\tau} f'(t) dt = f(\tau) - f(0) = 1$$

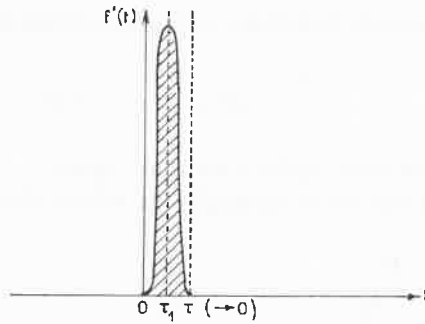


FIG. 3.

Le Mécanicien peut donner une interprétation physique intéressante comme une pression s'exerçant sur une petite surface ABCD rectangulaire de dimensions  $x$  et  $e$  (fig. 4).

Interprétation que nous pouvons styliser en introduisant une pression par unité de longueur (fig. 5).

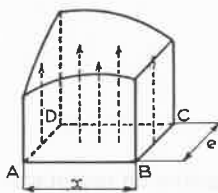


FIG. 4.

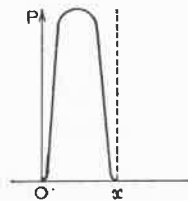


FIG. 5.

Nous pouvons encore poursuivre la stylisation en remplaçant la courbe 5 par un rectangle de même aire (fig. 6). On peut toujours supposer que l'aire de ce rectangle est égale à l'unité.

Le Mécanicien stylise encore la courbe 6 pour pouvoir utiliser la théorie des vecteurs; il suppose que  $x$  tend vers zéro, l'aire étant sans cesse égale

à un, et il obtient le vecteur force unitaire (qui est un non sens physique) (fig. 7), mais ce modèle mathématique est singulièrement efficace en utilisant les théories des vecteurs!

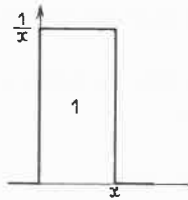


FIG. 6.

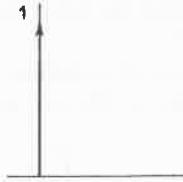


FIG. 7.

La dérivée seconde de la fonction  $f(t)$  est représentée (à l'aide de la figure 3) par la figure 8

$$\int_0^{\tau} f''(t) dt = f'(\tau) - f'(0) = 0$$

Les deux aires de cette figure sont donc égales.

On stylisera par deux rectangles de même aire.

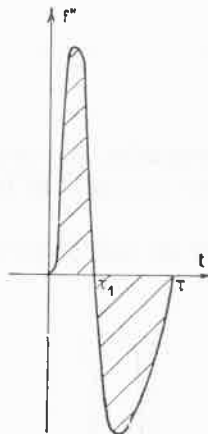


FIG. 8.

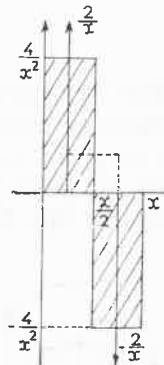


FIG. 9.

Le Mécanicien poussera plus loin la stylisation en remplaçant les rectangles par des vecteurs opposés de grandeur  $\frac{2}{x}$  (fig. 9). Si  $x$  tend vers zéro nous aurons un couple unitaire :  $\frac{2}{x} \times \frac{x}{2} = 1$ .

Le Physicien considérera la fonction échelon comme limite de la fonction  $f(t)$  (fig. 2), quand  $\tau$  tend vers zéro; nous aurons une idéalisation commode en mathématiques de  $f(t)$ , c'est la fonction échelon unité.  $f'(t)$  tendra vers la première fonction de Dirac.  $f''(t)$  tendra vers la deuxième fonction de Dirac

dont les « images » sont  $p$  et  $p^2$  dans le calcul de Heaviside équivalent à la transformation de Laplace-Carson

$$F(p) = p \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

Nous remarquons que les notions de force et couple sont connues depuis des siècles! Aussi la fonction échelon unité et ses dérivées (les fonctions de Dirac) sont des notions extrêmement claires pour le Physicien.

Pour interpréter la discontinuité caractéristique de la fonction « échelon unité », les mathématiciens procèdent d'une tout autre manière. Ils cherchent à construire une fonction continue qui tende vers une limite, de façon que cette limite soit précisément la fonction « échelon unité ».

Ils définissent d'abord la première fonction de Dirac comme la limite pour  $\lambda$  tendant vers l'infini de la fonction  $y = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda^2 t^2}$  représentée figure 10 (courbe en cloche de Gauss) dont l'aire est égale à l'unité (1) (fig. 10).

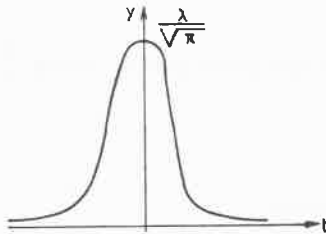


FIG. 10.

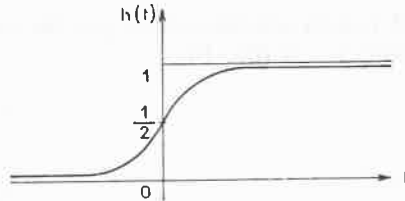


FIG. 11.

Si l'on intègre cette fonction de  $-\infty$  à  $t$ , on obtient la fonction  $h(t)$  représentée figure 11, l'ordonnée à l'origine étant égale à  $\frac{1}{2}$ .

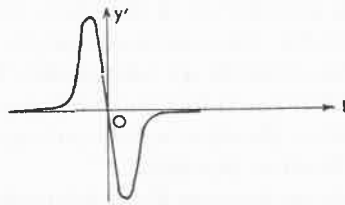


FIG. 12.

Pour  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $h(t)$  tend vers la fonction « échelon unité », en passant par la valeur  $\frac{1}{2}$  pour  $t = 0$ .

La dérivée de  $y = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda^2 t^2}$  est  $y' = -\frac{2\lambda^3 t}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda^2 t^2}$  représentée figure 12. Elle tend vers la deuxième fonction de Dirac si  $\lambda$  tend vers l'infini.

(1) Cf. POTIER et LAPLUME : « Le calcul symbolique » (Hermann) — appendice : fonction d'erreur de Gauss, p. 126 et suiv.

Telles sont les courbes qui pour le Mathématicien pur tendent vers la fonction « échelon unité » et les deux premières fonctions de Dirac (dérivées première et seconde de la fonction « échelon unité »). Ces fonctions de Dirac encore appelées « fonctions précurseur », ce sont elles qui changent les conditions initiales d'un phénomène physique.

Or ces modes de représentation élaborés par les mathématiciens pour rendre compte des particularités de la fonction « échelon unité » sont inutilisables par le physicien. En effet l'interprétation physique de la fonction « échelon unité » étant, comme nous l'avons indiqué antérieurement, la courbe suivante (fig. 13) :

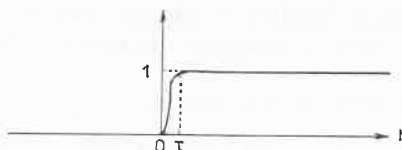


FIG. 13.

et non la courbe conçue par les mathématiciens, qui passe par la valeur  $\frac{1}{2}$  pour  $t = 0$  (fig. 14) :

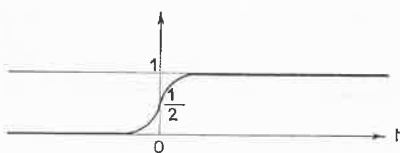


FIG. 14.

Mêmes remarques pour les courbes du physicien et du mathématicien dont les limites donnent la première et la deuxième fonctions de Dirac.

Ainsi une fonction (fig. 13) a été imaginée par les physiciens pour représenter des phénomènes observés au laboratoire. Pour le besoin du calcul, le physicien a dû l'idéaliser par la fonction « échelon unité ». Le mathématicien oubliant la représentation physique ne raisonne que sur la fonction idéalisée et la vide de sa signification première.

Nous sommes donc en présence d'une interprétation mathématique d'une fonction imaginée initialement pour représenter un phénomène physique, qui est un pur non sens pour le physicien. Ce dernier ne peut pas, par conséquent, l'utiliser.

Ce qui est plus important, c'est que l'emploi de cette fonction par le théoricien non averti de son sens physique aboutit dans certains cas, comme dans l'étude des équations différentielles des servo-mécanismes, à des erreurs très graves touchant les conditions initiales pour la fonction dite « entrée », cette fonction et toutes ses dérivées étant nulles au temps zéro.

La Science française est entièrement redevable au P<sup>r</sup> Laurent Schwartz

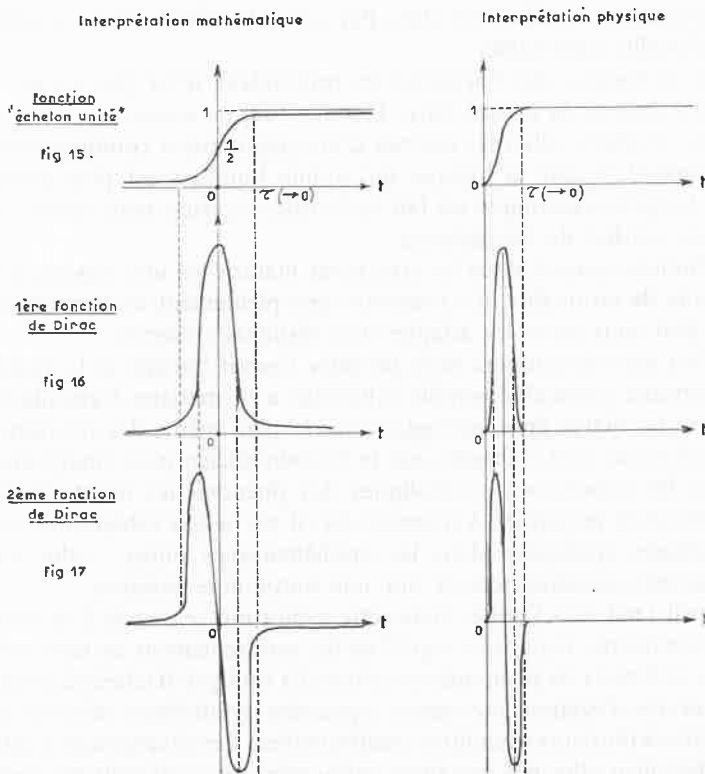
d'avoir, par ses travaux sur les distributions, complètement élucidé le problème des fonctions de Dirac du point de vue théorique, ce qui permit de bâtir le calcul opérationnel sur de solides bases.

Ainsi les représentations de la fonction « échelon unité » et de ses dérivées (ou « fonctions de Dirac ») conçues par le mathématicien ne correspondent pas à celles élaborées par le physicien.

C'est ce que montre nettement le tableau récapitulatif suivant (fig. 15, 16, 17).

TABLEAU RÉCAPITULATIF

DES INTERPRÉTATIONS DE LA FONCTION « ÉCHELON UNITÉ » ET DES « FONCTIONS DE DIRAC »  
DONNÉES RESPECTIVEMENT PAR LE MATHÉMATICIEN ET PAR LE PHYSICIEN



3. Conclusion.

Ainsi une expression symbolique forgée spécialement en vue d'applications pratiques peut perdre toute signification physique à la suite du traitement que lui font subir les mathématiciens pour rendre compte de ses particularités.

*Dans un tel cas, ce ne sont pas les mathématiques pures qui ont le plus grand pouvoir éclairant pour le physicien, mais bien les mathématiques appliquées.*

Ces exemples nous mettent en présence d'un hiatus épistémologique : quand on peut représenter un phénomène par une expression mathématique, ce ne sont pas nécessairement les constructions théoriques élaborées par le mathématicien pour interpréter cette dernière qui traduisent le mieux les propriétés du phénomène.

Dans cette perspective, la question posée par Heaviside prend tout son relief : « Comment se fait-il qu'un être physique représenté par un vecteur n'ait pas toutes les propriétés des vecteurs ? »

La matière se prête à des représentations rationnelles, comme le prouve le développement même de la physique mathématique et la réussite des opérations techniques fondées sur elles. Par suite, le monde est la manifestation d'une rationalité indéniable.

Mais la logique qui l'organise en profondeur n'est pas en tous points identique à celle de la pensée pure. Leibniz, tout en concevant Dieu créant le monde en calculant, selon les normes d'une gigantesque combinatoire, reconnaissait cependant que la logique qui anime l'univers est plus parfaite que la nôtre. L'esprit scientifique est fait de hardiesse certes, mais aussi d'humilité en face du verdict de l'expérience.

Si l'homme perçoit dans les structures matérielles une réponse favorable à son besoin de rationalité, il n'y retrouve pas pleinement ses propres constructions. Il doit sans cesse les adapter aux résultats observés.

Il n'y a pas une coupure radicale entre l'esprit humain et le monde, puisqu'une certaine rationalité semble inhérente à la matière. Cependant il faut reconnaître un hiatus épistémologique sur le plan même des relations rationnelles : celles qui sont élaborées par le mathématicien pour interpréter rigoureusement les expressions symboliques des phénomènes n'ont pas toujours une signification physique. Autrement dit, il n'y a pas intégration totale des mathématiques appliquées dans les mathématiques pures : elles n'en sont pas de simples conséquences et ont une autonomie certaine.

L'esprit tend vers l'unité, mais cette aspiration se heurte à la multiplicité des « rationalismes régionaux » qu'il édifie, non seulement en rencontrant des domaines différents de phénomènes comme l'a souligné Bachelard, mais encore lorsqu'il essaye d'éclairer une même expression symbolique selon les perspectives propres à plusieurs disciplines intellectuelles. Ces divergences d'interprétation ne dévoilent-elles pas certaines antinomies du « rationalisme appliqué » ?

Ainsi le dialogue de l'esprit et de la matière ne s'exprime pas uniquement par la reconstruction progressive des phénomènes à l'aide de relations rationnelles devant être rectifiées pour s'ajuster à des mesures plus précises. *Il est illustré aussi par les tensions, existant au sein même de la rationalité, entre le souci de rigueur, qui anime les mathématiques pures, et la fidélité à l'expérience, qui oriente les mathématiques appliquées.*

R. B. et F. S.