

3

dans nos classes

Quadrillages (Classe de Cinquième) (Groupe de Lyon)

En classe de Sixième, l'enfant aura exploré divers modes de repérage dans le « plan » ou même sur la sphère. En Cinquième, il est possible d'aller au delà d'une simple exploration en abordant quelques transformations simples sur divers quadrillages : translation, symétries, composition d'applications, etc.

L'expérience a montré que de telles notions, présentées naïvement, mais en utilisant le vocabulaire correct pour ne pas avoir à le changer en cours de scolarité, sont fort bien comprises et utilisées.

Il conviendra ensuite de se libérer du quadrillage, mais c'est une autre affaire. Dans un premier temps, on ne se posera pas de questions sur le plan quadrillé, comment il est fabriqué; de telles considérations paraîtraient sans intérêt à des enfants qui utilisent ces quadrillages de leurs cahiers d'écolier depuis qu'ils savent dessiner leurs premières lettres.

Les quelques idées qui suivent ont été présentées, à peu de détails près, dans une quarantaine de classes de Cinquième, sous la forme de six fiches de travail (§ 1 à 7).

1. Cheminements.

On utilisera des quadrillages obliques ou non. On appellera « point » du quadrillage un point où deux lignes se coupent.

On s'intéressera à ces points et à eux seuls.

Exemple : A et B.

Sur la figure 1, on a tracé un *chemin* qui, partant de A, conduit à B en *suivant les lignes du quadrillage*.

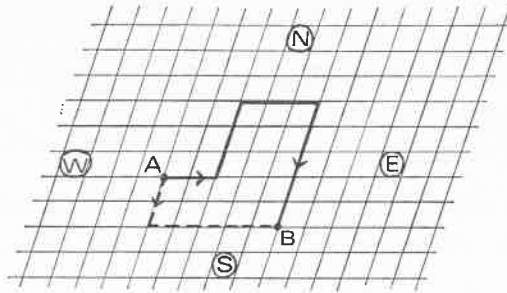


FIG. 1.

Pour *coder* ce chemin, on est amené à choisir un certain nombre de conventions. En voici une possible, mais ce n'est pas la seule :

- direction EST (e) OUEST (w),
- direction NORD (n) SUD (s).

Voici le code pour l'un des chemins conduisant de A à B :

2e; 3n; 3e; 5s
 A |—————> B (trait plein)

Autre chemin de A à B :

2s; 5e;
 A |—————> B (trait pointillé)

On pourra faire de nombreux exercices de codage et de décodage. On sera amené à remarquer que l'on peut trouver de nombreux chemins possibles conduisant de A à B : deux chemins qui ont même point de départ et même point d'arrivée seront dits chemins ÉQUIVALENTS.

Parmi ces chemins équivalents, deux sont plus simples que les autres, en ce sens qu'ils comportent moins de « virages que les autres ».

Un chemin à un seul virage au plus sera un chemin SIMPLE.

Faire trouver des chemins simples ne présente aucune espèce de difficulté. On s'intéressera très vite aux seuls chemins simples.

Le codage d'un chemin simple peut alors être présenté de manière plus dépouillée, puisque l'enfant dispose des entiers.

Il suffira de faire deux conventions supplémentaires pour associer à l'un des chemins simplifiés un *couple d'entiers*.

Règle 1

On s'intéressera uniquement au chemin simple qui commence par un *déplacement vers l'est ou vers l'ouest*. Il est alors codé par un couple

(5e, 2s)
 A |—————> B

Le premier terme du couple indique un déplacement vers l'est (ou un déplacement vers l'ouest). Le second indique un déplacement vers le sud (ou vers le nord).

Règle 2

Déplacement vers l'est : noté avec un entier positif
 vers l'ouest : noté avec un entier négatif. } $(5, 2^-)$
 Déplacement vers le nord : noté avec un entier positif } $A \longrightarrow B$
 vers le sud : noté avec un entier négatif.

Il serait intéressant ici d'utiliser dans un premier temps au moins, des chiffres en couleur : mais les collègues savent bien les problèmes que pose l'utilisation de la couleur dans la rédaction de documents qui seront remis aux élèves.

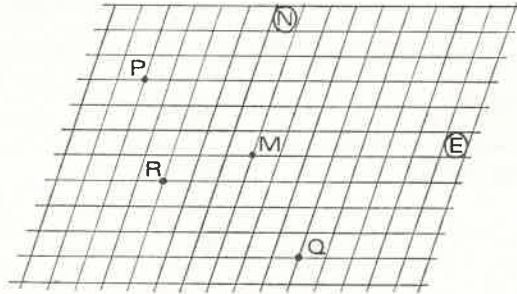


FIG. 2.

Voici des exemples de codage :

$(5^-, 3)$ $(3, 4^-)$
 $M \longrightarrow P$ $M \longrightarrow Q$
 $(3, 1)$ $(6, 3^-)$
 $R \longrightarrow M$ $R \longrightarrow Q$

On imagine sans peine tous les exercices variés que l'on peut faire ici.

Nous avons rencontré bien sûr une première difficulté : inversion des termes du couple, fautes de signes. Il convient que tout cela soit bien assimilé avant d'aller plus loin.

2. Equipollence.

A chaque couple de points du quadrillage, est associé un couple d'entiers.

Exemple d'exercice : trouver les couples associés aux couples de points marqués sur la figure 3.

Couple de points	Couple d'entiers associés
(M, N) (M, R) (N, M) (Q, P)	(..., ...)

Couple de points	Couple d'entiers
(S, R) (P, Q) (S, M) (R, N) etc.	

On découvre ainsi que certains couples de points sont associés au *même* couple d'entiers.

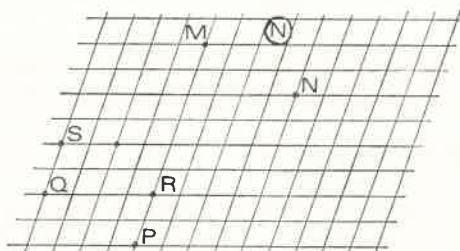
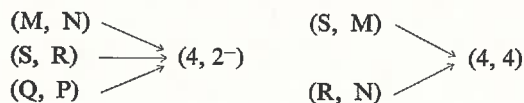


FIG. 3.

Des couples de points associés au *même* couple d'entiers sont ÉQUIPOLLENTS. Voici des thèmes d'exercices :

- placer des couples de points équipollents à un couple donné ;
- donner un point de départ et faire marquer le point d'arrivée ;
- dans un ensemble de couples, faire étudier la relation formulée par : « ... est équipollent à ... ». La réflexivité, la symétrie et la transitivité ne posent pas de problèmes, les enfants ayant été familiarisés avec ces propriétés sur de nombreux exercices tout au long de la classe de Cinquième. On découvrira des classes ; il ne semble pas nécessaire d'aller plus loin... mais la translation qui viendra ensuite mettra bien en jeu, en fait, des classes d'équipollence !

- fabrication de parallélogrammes, sur le quadrillage, au moyen de couples équipollents ; deux parallélogrammes ayant un côté en commun illustrent la transitivité.

3. Translations.

On utilisera le couple (5, 3). A chaque point désigné par une lettre sur la figure 4, on associera un point tel que le couple formé par le premier et le second corresponde à (5, 2).

Exemple :

$$\text{Construire } A', B', C', \dots \left. \begin{array}{l} B \mapsto B' \\ C \mapsto C' \\ A \mapsto A' \\ D \mapsto D' \\ E \mapsto E' \end{array} \right\} \text{ tels que } \left. \begin{array}{l} F \mapsto F' \\ G \mapsto G' \\ H \mapsto H' \\ I \mapsto I' \end{array} \right\}$$

tous ces couples de points étant équipollents et associés au couple d'entiers (5, 3).

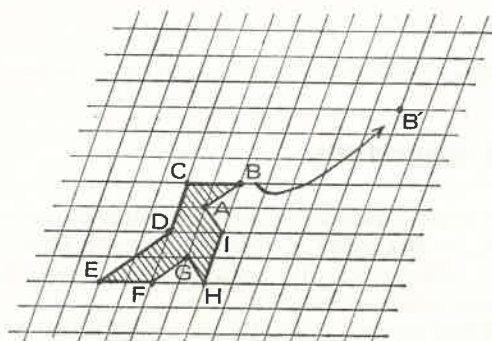


FIG. 4.

Si on choisit un point quelconque X du quadrillage, on pourra toujours lui associer un point X' unique tel que (X, X') soit associé à $(5, 3)$ (sous la réserve d'imaginer que le quadrillage peut être prolongé).

On dispose ainsi d'une *application* qui a un ensemble de points du quadrillage permet de faire correspondre un ensemble de points du quadrillage (avec la réserve indiquée). Cette application porte le nom de **TRANSLATION**.

Se pose alors la question de la notation : il importe, au moins dans un premier temps, de noter la translation de façon autre que le couple d'entiers; nous avons utilisé la notation $t(5, 3)$.

On pourrait aussi proposer $\langle 5, 3 \rangle$, ou encore $\overrightarrow{5, 3}$ ou bien $t_{(5,3)}$... Mais c'est là, à notre sens, une question annexe.

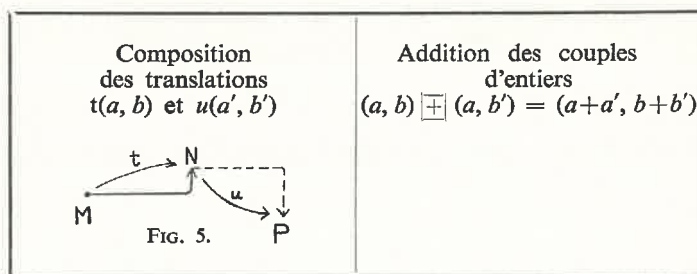
Thèmes d'exercices :

- construire les images de points donnés par une translation donnée;
- une translation est connue dès que sont connus un point et son image (translation définie par un couple de points images);
- (A, A') et (B, B') étant équipollents et donnés sur un quadrillage, trouver le couple d'entiers qui définit la translation $A \mapsto A'$.

Remarquer que l'on peut trouver aussi une translation qui à A associe B et à A' associe B' .

- translations réciproques;

— exercices de composition de translations (cette question n'a pas été expérimentée cette année). Mais il y a là sujet à exercices simples si on dispose de temps, en particulier découvrir le parallélisme :



4. Translation et alignements.

On choisira un quadrillage assez grand et on marquera un point A. En utilisant la translation $t(3, 0)$, on fera placer B, image de A par t , puis C image de B par t , puis D image de C... On pourra ainsi envisager de prolonger la « chaîne » A, B, C, D, E, ... si le quadrillage le permet.

Par ailleurs l'enfant trouvera le point a qui a pour image A par t ; il découvrira que l'on peut prolonger la chaîne dans l'autre sens sans difficulté en utilisant la translation $t'(3^-, 0)$, réciproque de t .

Les points ... baABCDE ... sont tous sur une ligne du quadrillage : cette ligne, désignée par X, est tracée à la règle : c'est la *droite X*.

A partir d'un autre point A' , on pourra obtenir un autre ensemble de *points alignés* sur la droite Y.

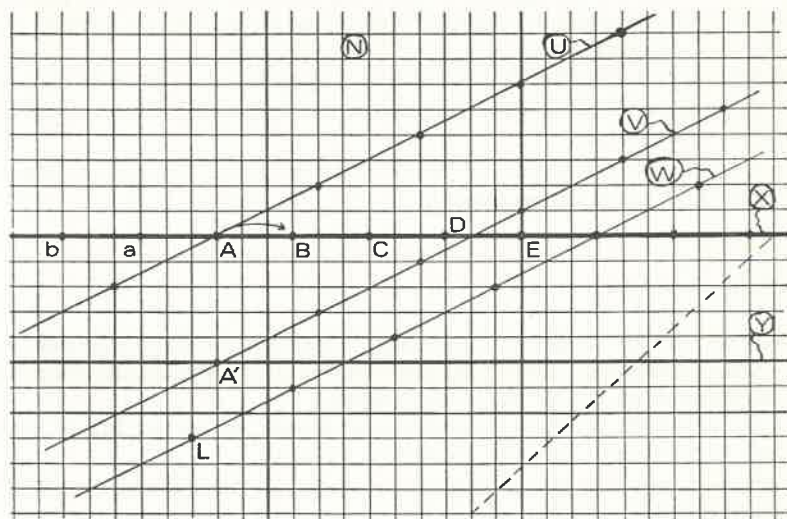


FIG. 6.

Les droites X et Y, joignant les points obtenus en utilisant la même translation t (ou t'), sont dites de même DIRECTION ou droites parallèles.

Notation pour cette relation : $X//Y$.

Que se passe-t-il si A' est choisi sur X? On obtiendra $Y = X$ et on peut dire que X est parallèle à X :

$$X//X.$$

Mêmes exercices avec la translation $u(4, 2)$:

- à partir du point A : on obtient la droite U,
- du point A' : on obtient la droite V,
- du point L : on obtient la droite W.

Ces manipulations ont pour seul but d'amener l'élève à se familiariser avec la notion de parallélisme, avec des translations, avec aussi l'alignement des points.

Il n'est pas question de bâtir sur ce thème une quelconque « construction axiomatique » pour le moment: c'est une approche, rien de plus. Il est clair aussi qu'il faudra bien insister sur le fait que sur la « droite X » il y a d'autres points que ceux obtenus par la translation t ou sa réciproque.

Thèmes d'exercices :

On a tracé sur le quadrillage les droites X, Y, U, V, W : on pourra faire dessiner le schéma sagittal de la relation « être parallèle à » dans cet ensemble de droites (fig. 6).

Voici une nouvelle relation d'équivalence assez simple.

On pourra donner un schéma sagittal pour cette relation et demander de tracer les droites correspondantes : on sera surpris de la facilité avec laquelle les enfants répondent à cette question.

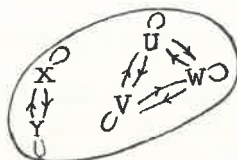


FIG. 7.

5. Coordonnées sur un quadrillage pointé.

Placer des points M, N, P, Q, R, S et I. On envisage tous les couples de points de premier élément I et on cherche le couple d'entier associé à chaque couple de points :

- (I, M) : (5, 2⁻)
- (I, N) : (3⁻, 4)
- (I, P) : (0, 3)
- (I, Q) : (4⁻, 0) etc.

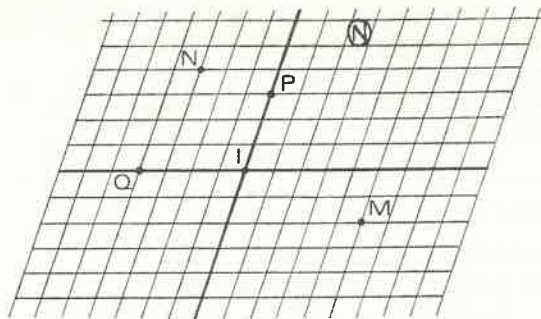


FIG. 8.

L'élève remarquera que, pour tout point du quadrillage, on peut trouver un couple d'entiers qui permet de le repérer à partir de I et si on donne un couple d'entiers, on pourra trouver X tel que (I, X) soit associé à ce couple d'entiers.

On repère les points à partir de I : I est l'ORIGINE.

Le couple d'entiers (x, y) est le couple de COORDONNÉES de X :

x : première coordonnée,

y : seconde coordonnée.

On devra bien insister sur le rôle privilégié de I; on aura au début encore des confusions entre première et seconde coordonnée.

Thèmes d'exercices :

— construire des points de coordonnées données et inversement;

— que se passe-t-il pour les coordonnées si on choisit une autre origine? (non expérimenté cette année).

Mais là aussi, si le temps le permet, il y a une mine où l'on peut encore reparler de la translation...

L'origine étant choisie, on place des points A, B, C auxquels on applique une translation $t(x, y)$: que dire des coordonnées des images obtenues?

— Points dont la première coordonnée est 0.

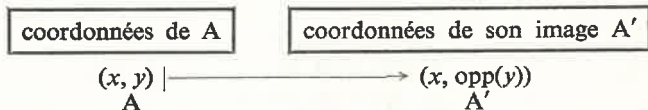
— Points dont la seconde coordonnée est 0.

— Points tels que $x = y$; $x = \text{opp}(y)$.

6. Symétries.

On placera des points A, B, C, D sur un quadrillage pointé.

A chaque point on va associer un point obtenu de la façon suivante :



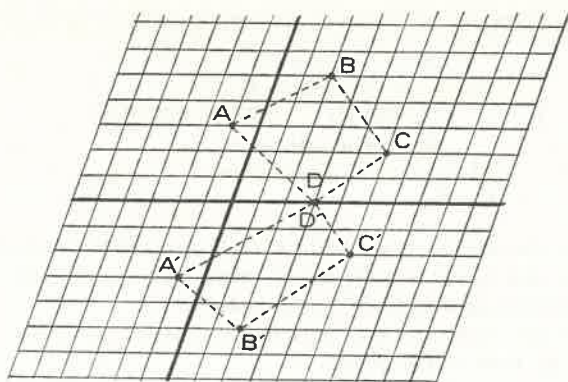


FIG. 9.

On conserve la première coordonnée, et on remplace la seconde par son *opposée*.

Si on admet le principe du « prolongement possible » du quadrillage, on se convaincra sans peine que cette relation est une application.

Cette application, qui conserve la première coordonnée, est la *symétrie* S_1 .

Il est facile d'imaginer les exercices possibles après une initiation très rapidement faite :

- images des points d'une figure donnée;
- points confondus avec leurs images?
- application réciproque de S_1 ?
- composition : S_1 —suivie —de $-S_1$.

On définira de même l'application S_2 , ou symétrie S_2 , qui conserve la *seconde coordonnée* et remplace la première par son opposée :

$$S_2 \left\{ \begin{array}{l} A \longmapsto A'' \\ (x, y) \quad (\text{opp}(x), y) \end{array} \right.$$

On pourra se poser, à propos de S_2 les mêmes questions que pour S_1 . Il y aura là encore des confusions, dans les débuts, entre S_1 et S_2 , mais ces confusions disparaissent bien vite après quelques exercices.

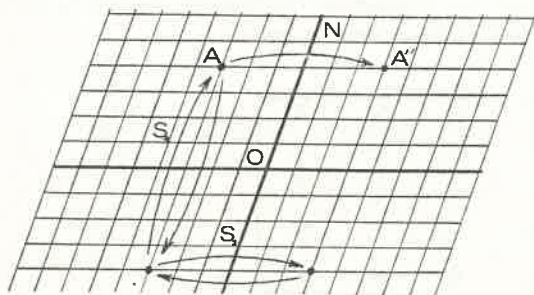


FIG. 10.

Il est alors intéressant de composer les applications S_1 et S_2 /

$$\begin{array}{c}
 M \xrightarrow{S_1} N \xrightarrow{S_2} P \\
 (x, y) \quad (x, \text{opp}(y)) \quad (\text{opp}(x), \text{opp}(y)) \\
 \xrightarrow{S_1\text{-suivie-de-}S_2} \\
 M \xrightarrow{\quad\quad\quad} P \\
 (x, y) \quad (\text{opp}(x), \text{opp}(y))
 \end{array}$$

On découvre une nouvelle application. C'est la symétrie S_0 ou *symétrie—point—O*.

On vérifiera que S_1 -suivie-de- S_2 est la même application que S_2 -suivie-de- S_1 .

On étudiera l'application composée S_0 -suivie-de- S_0 .

Dans toutes ces vérifications, il conviendra d'insister sur le fait que le résultat ne dépend pas du *point initial* choisi.

Il ne s'agit pas non plus, à partir de ces manipulations, de vouloir énoncer des résultats *géométriques* généraux : c'est purement et simplement une initiation qui prétend préparer l'avenir. Cette initiation a le mérite d'être extrêmement concrète et simple.

Il est à noter que, pour cette première présentation, il est sans doute préférable d'utiliser des quadrillages obliques.

7. Compositions de symétries.

Si l'on veut exploiter ces compositions de symétries simples, se pose le problème de la notation de la composée : jusqu'à maintenant, nous avons écrit :

$$S_1\text{-suivie-de-}S_2$$

Il est clair que cette écriture est lourde et mal adaptée. On peut convenir de juxtaposer tout simplement les deux applications et écrire :

$$S_1S_2$$

Il est peut-être prématuré d'utiliser la notation correcte $S_2 \circ S_1$.

En utilisant le plus grand nombre possible de manipulations et de recherche libre, on pourra envisager de composer de toutes les façons possibles les symétries S_1 , S_2 et S_0 .

Il convient aussi de représenter l'application composée S_1S_1 par exemple, application qui à tout point associe ce point.

	S_1	S_2	S_0	R
S_1	R	S_0	S_2	S_1
S_2	S_0	R	S_1	S_2
S_0	S_2	S_1	R	S_0
R	S_1	S_2	S_0	R

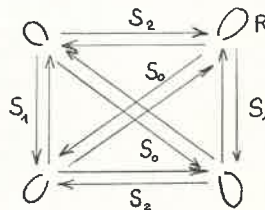


FIG. 11.

On peut la noter par une lettre quelconque par exemple R. Il n'est pas indispensable de lui donner un nom particulier.

Les élèves de Cinquième sont alors fort capables de dresser la table de Pythagore pour la composition des symétries de l'ensemble

$$\{S_1, S_2, S_0, R\}.$$

On peut sans peine examiner les propriétés de l'opération ainsi définie (faut-il utiliser les grands mots et parler de loi de composition? ...).

Rien ne s'oppose d'ailleurs à ce que l'on résolve alors des équations du type :

$$S_1 S_0 X S_2 = S_2 S_0.$$

L'usage de la table permettra de contrôler un résultat qui peut être obtenu par la recherche sur le quadrillage lui-même.

Ce « groupe » aura sans doute été rencontré sur d'autres situations et le fait d'en donner plusieurs modèles est le meilleur moyen pour bien le faire comprendre : ce ne sont pas les objets sur lesquels on travaille qui comptent, mais la structure obtenue.

8. Prolongements.

En classe de Cinquième, nous nous sommes bornés à ces quelques exercices sur les quadrillages. Mais il est évident que l'on peut trouver des prolongements très enrichissants, par exemple pour la classe de Quatrième.

Voici quelques idées à développer :

- La composition de deux symétries-point S_m et S_n permettra de retrouver la translation comme composée de symétries.
- La composition de symétries et de translations.
- Homothétie sur un quadrillage pointé :

$$(a \in \mathbb{Z}) \quad A \begin{array}{c} | \longrightarrow \\ (x, y) \end{array} \begin{array}{c} A' \\ (ax, ay) \end{array}$$

La recherche de l'application réciproque ne manquera pas d'évoquer certains problèmes, comme celui de l'existence d'un « nombre inverse de a ».

- Affinités.
- La mesure des segments, des aires, des secteurs angulaires dans le cas de l'utilisation d'un quadrillage à *mailles carrées*.

Ces mesures sont alors invariantes par symétries et translations et ça n'est pas un hasard, bien sûr.

Il a semblé intéressant de développer ici quelques exercices qui conduiront de manière purement expérimentale au théorème de Pythagore, à la découverte des « irrationnels » comme $\sqrt{2}$ par exemple.

Sur un quadrillage à mailles carrées, le carré N a pour image C par S_1 , S par S_2 et F par la translation $t(4, 2)$.

Après avoir fait choix d'unités, les mesures des côtés, des secteurs angulaires, de sa surface, sont les mêmes sur la figure initiale que sur les images respectives par ces applications : une étude expérimentale simple suffira pour en convaincre l'enfant.

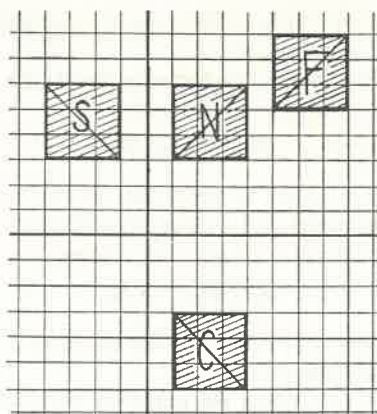


FIG. 12.

Segments, secteurs angulaires et surfaces de même mesure pourront être dits ISOMÉTRIQUES (même mesure).

Translation et symétries qui « conservent les mesures » seront des isométries.

On pourra donner comme contre-exemples les mêmes applications sur un quadrillage à mailles non-carrées, ou encore d'autres applications comme l'homothétie et l'affinité sur un quadrillage à mailles carrées.

Cela dit, il conviendra de rappeler ce que sont des surfaces équivalentes (programme de Sixième), comment est trouvée l'aire du carré, l'aire du triangle, du rectangle, etc.

On pourra alors tenter de présenter sous une forme expérimentale simple le théorème de Pythagore.

Sur la figure 13, avec l'unité u , les côtés du carré M ont pour mesure 1.

Sa diagonale AB a pour mesure x avec la même unité.

L'aire de ce carré est 1 en choisissant pour unité d'aire la mesure de l'aire du carré de côté 1.

On fera construire les images de O , A , B :

- dans la symétrie S_1
- dans la symétrie S_2 ,
- dans la symétrie S_0 .

OAB , OAD , OBC , ODC sont donc des triangles isométriques, parties du carré $ABCD$.

Donc :

$$\begin{aligned} \text{mes}(ABCD) &= 4 \cdot \text{mes}(OAB) \\ &= 2 \cdot \text{mes}(M) \\ &= 2 \end{aligned}$$

x est un « nombre » tel que : $x^2 = 2$.

On cherchera alors des encadrements décimaux successifs de cette mesure x .

Si on dispose d'une machine à calculer de bureau, on pourra pousser la recherche assez loin et on découvrira un développement décimal non périodique. De là à approcher la notion d'irrationnel, le pas est assez vite franchi.

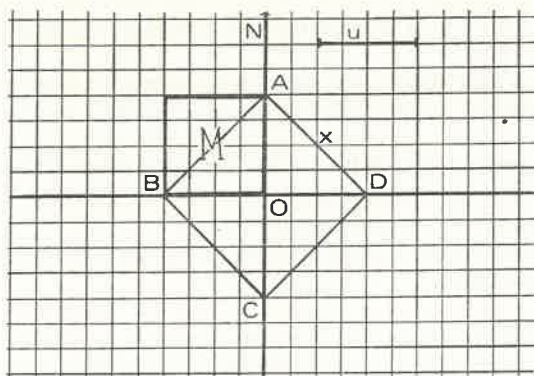


FIG. 13.

On doit même pouvoir faire mieux et présenter le théorème de Pythagore sous une forme qui vaut bien, à n'en pas douter, toutes les « pseudo-démonstrations » utilisant les triangles semblables, alors que ce théorème n'a visiblement rien à voir avec la similitude.

L'exercice qui suit n'a rien d'original et se trouve dans de nombreux bouquins « d'initiation » ou de « mathématique amusante » : mais on peut lui donner une forme qui utilise simplement les translations sur un quadrillage à mailles carrées (fig. 14 (a)).

a) L'aire du domaine passé en gris, réunion de deux carrés, est exprimée par :

$$\alpha = m^2 + n^2$$

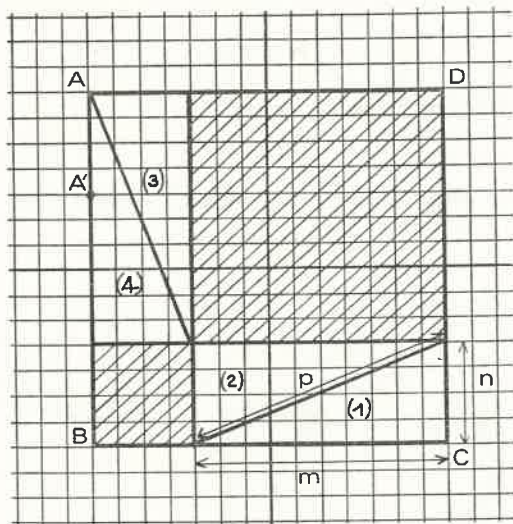


FIG. 14 (a).

Dans la translation $(0, 4^-)$, le triangle (4) a pour image le triangle (4'), isométrique.

Dans la translation $(10, 0)$, le triangle (3) a pour image le triangle isométrique (3').

Dans la translation $(4^-, 10)$, le triangle (2) a pour image le triangle isométrique (2').

b) Il reste à prouver que $A'B'C'D'$ est un carré, ce qui ne présentera pas de difficultés particulières du fait de l'isométrie des côtés dans les translations envisagées et de l'isométrie des secteurs angulaires.

Sur cette seconde figure, le domaine grisé est visiblement équivalent au domaine grisé de la première figure.

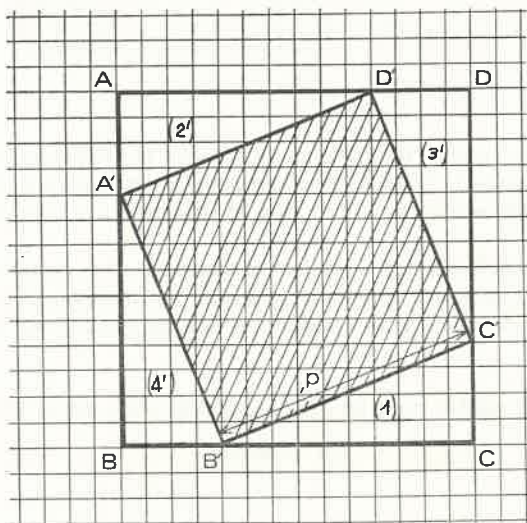


FIG. 14 (b).

L'aire de ce domaine est exprimée par :

$$\mathcal{A} = p^2$$

Si bien que, en définitive, pour le triangle rectangle $B'CC'$:

$$m^2 + n^2 = p^2.$$

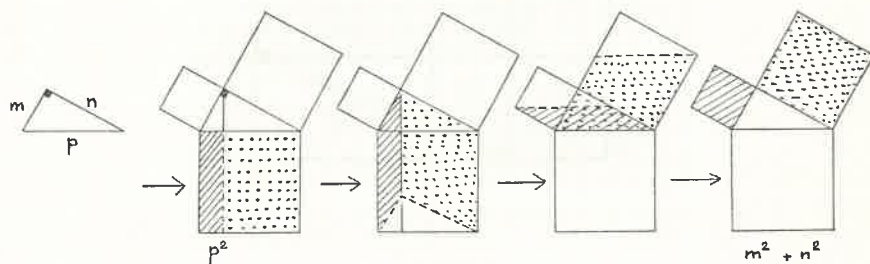


FIG. 15.

Il existe d'ailleurs d'autres approches possibles pour ce fameux théorème. L'analyse de la dernière figure en donnera un exemple, basé sur les quadrilatères équivalents : elle est tirée d'un petit livre anglais assez passionnant (*Experiments in mathematics*).

Nous ne pensons pas que ces « méthodes d'approche » puissent être considérées uniquement comme du bricolage : elles constituent incontestablement une motivation pour une recherche plus profonde et une axiomatisation qui viendra en son temps. Il ne faut pas brûler les étapes, surtout en géométrie, et vouloir construire d'emblée une théorie dure et pure qui satisfait les seuls puristes et laisse nos élèves désorientés.

Rédaction : GAGNAIRE et GAUTHIER.

Clermont

7 - 10 Mai 1970

Voir page 562