

Il y a plus de trente ans que j'ai passé l'agrégation : dans trente ans (ce sera quasiment l'an deux mille) il y a peu de chances que je voie, non pas ce que sera devenu, mais ce que sera demeuré l'enseignement des mathématiques dans notre pays. Camarades agrégatifs, gardiens des conoïdes et du cercle des neuf points, si au printemps prochain vous reprenez l'action pour votre libération, faites donc signe aux vieilles gens de mon espèce : fossiles contre fossiles, on verra qui rira le dernier !

G. Th. GUILBAUD.

Agrégation 1968

Mathématiques élémentaires et mathématiques spéciales.

I. — A toute partie non vide E du plan euclidien, on associe, pour chaque entier n strictement supérieur à un, son *diamètre d'ordre n* , noté $d_n(E)$, défini comme suit : $A_1, A_2, \dots, A_n$ désignant n points de E , et $\delta(A_1, \dots, A_n)$ la moyenne géométrique.

$$\left[\prod_{i < j \leq n} A_i A_j \right]^{\frac{2}{n(n-1)}}$$

de leurs distances mutuelles, $d_n(E)$ est la borne supérieure, finie ou non, des nombres $\delta(A_1, \dots, A_n)$, lorsque les n points $A_1, A_2, \dots, A_n$ varient arbitrairement dans E .

Ainsi $d_2(E)$ est le diamètre de E au sens usuel.

1° a) Démontrer que, si E est non borné, $d_n(E)$ est infini.

b) Démontrer que, si E est inclus dans E' , on a $d_n(E) \leq d_n(E')$.

2° Calculer $d_3(E)$ dans les cas suivants :

a) E est un segment de longueur a ;

b) E est un cercle de rayon r ; un arc de cercle de rayon r et de longueur θr (discuter);

c) E est un disque fermé de rayon r ; un disque ouvert de rayon r ;

d) E est la réunion des trois côtés d'un triangle équilatéral.

3° E étant supposé borné, démontrer, pour tout n , l'inégalité

$$d_{n+1}(E) \leq d_n(E).$$

En déduire que $d_n(E)$ a une limite positive ou nulle lorsque n augmente indéfiniment ; cette limite sera appelée *diamètre transfini* de E , noté $d(E)$.

Dans la suite, $d_n(E)$ et $d(E)$ seront abrégés en d_n et d lorsqu'il n'y aura pas de risque de confusion pour l'ensemble E .

II. — On se propose de calculer d_n et d dans le cas où E est un cercle de rayon unité.

1° $A_1, A_2, \dots, A_n$ étant n points du cercle rangés dans cet ordre, on pose

$$A_{n+1} = A_1, \quad A_{n+2} = A_2, \quad \text{etc.}$$

et l'on considère les produits $p_k = \prod_{i=1}^{i=n} A_i A_{i+k}$, où k est un entier naturel.

Démontrer, pour tout k inférieur ou égal à $\frac{n}{2}$, l'inégalité $p_k \leq \left(2 \sin \frac{k\pi}{n} \right)^n$.

(On pourra, pour cela, utiliser la propriété de la fonction $x \mapsto -\text{Log} \sin x$ d'être convexe sur $]0, \pi[$.)

2° Dédire de ce qui précède que le produit des distances mutuelles de n points du cercle est maximal dans le cas d'une disposition régulière de ces points.

3° Calculer d_n et d .

(On pourra, en désignant par $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ les racines du polynôme $z^n - 1$, introduire les produits

$$U_h = \prod_j (\alpha_h - \alpha_j),$$

où h est fixé et j décrit l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\} - \{h\}$, et montrer que U_h est égal à $n \alpha_h^{n-1}$.)

III. — Dans cette partie III, on étudie une méthode de détermination du diamètre transfini d'une partie E bornée du plan.

A tout point du plan on associe son affixe (complexe) dans un repère ortho-normé donné.

P étant un polynôme unitaire (c'est-à-dire dont le terme de plus haut degré a pour coefficient un), on désigne par $\mu(P)$ la borne supérieure de $|P(z)|$ lorsque le point d'affixe z décrit E . Soit μ_n la borne inférieure des $\mu(P)$ lorsque P décrit l'ensem-

ble des polynômes unitaires de degré n . On pose $m_n = \frac{1}{\mu_n}$.

1° a) Démontrer que $\mu(P)$ est fini.

b) Démontrer que m_n ne dépend que de E et de n et non du repère choisi.

c) Comparer m_n et d_n .

2° Démontrer l'inégalité

$$m_{p+q} \leq m_p^{\frac{p}{p+q}} m_q^{\frac{q}{p+q}}$$

pour tout couple d'entiers p, q .

Soit m la borne inférieure des nombres m_n ; démontrer que m_n tend vers m lorsque n augmente indéfiniment.

3° A tout système de $n+1$ points $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ de E , d'affixes respectives $z_1, z_2, \dots, z_{n+1}$, on associe le déterminant :

$$V(z_1, z_2, \dots, z_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{n-1} & z_2^{n-1} & \dots & z_{n+1}^{n-1} \\ z_1^n & z_2^n & \dots & z_{n+1}^n \end{vmatrix}.$$

Démontrer que, quel que soit le polynôme P unitaire de degré n , on a l'égalité

$$V(z_1, z_2, \dots, z_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{n-1} & z_2^{n-1} & \dots & z_{n+1}^{n-1} \\ P(z_1) & P(z_2) & \dots & P(z_{n+1}) \end{vmatrix}.$$

En utilisant le développement de ce dernier déterminant et éventuellement un polynôme P convenablement choisi en fonction des points, établir les inégalités

$$\frac{(n-1)}{d_n^2} (m_n)^n \leq \frac{n(n+1)}{d_{n+1}^2} \leq (n+1) \frac{n(n-1)}{d_n^2} (m_n)^n.$$

4° Dédurre de ce qui précède :

a) l'inégalité $d_{n+1} \geq m_n$;

b) une majoration de d_{n+1} faisant intervenir $m_1, m_2, \dots, m_n$ et n ;

c) l'égalité $m = d$. (On rappelle que, si une suite u_n admet la limite u , la suite $\frac{u_1 + 2u_2 + \dots + nu_n}{n^2}$ admet la limite $\frac{u}{2}$.)

IV. — On se propose de calculer le diamètre transfini d'un segment par la méthode précédente.

E désigne le segment $[-1, +1]$ de l'axe réel et x une variable décrivant E.

1° Étant donné un entier naturel n , démontrer que la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \operatorname{Arc} \cos x)$$

est la restriction à E d'un polynôme T unique, de degré n , unitaire et à coefficients réels. Quelle est la borne supérieure de son module sur E?

2° Démontrer, en considérant la différence $P - T$, que, si le polynôme unitaire P est de degré n et à coefficients réels, la borne supérieure sur E du module de P ne peut être strictement inférieure à $\frac{1}{2^{n-1}}$.

3° Quels sont pour E les nombres μ_n définis dans la partie III?

En déduire la valeur de $d(E)$ et, plus généralement, le diamètre transfini d'un segment de longueur a .

4° Démontrer qu'une condition suffisante pour que le diamètre transfini d'une partie bornée E du plan soit non nul est que E contienne un arc de courbe continu.

Donner un exemple d'ensemble dénombrable borné dont le diamètre transfini est non nul.

V. — 1° E étant une partie bornée du plan complexe et H un polynôme fixé, unitaire, de degré q , on note E_1 l'ensemble $H^{-1}(E)$ ainsi défini : le point d'affixe z appartient à E_1 si, et seulement si, le point d'affixe $H(z)$ appartient à E.

Établir la formule $d(E) = [d(E_1)]^q$.

2° A l'aide de cette formule, retrouver les valeurs des diamètres transfinis d'un segment et d'un cercle en supposant que ces diamètres sont non nuls.

3° Calculer les diamètres transfinis :

a) d'un disque;

b) d'un ovale de Cassini.

Analyse.

On désigne par $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels, par $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls. On rappelle que le support d'une application de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ est le plus petit ensemble fermé dans le complémentaire duquel la restriction de cette application est nulle. Le corps des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$; la distance de deux points, z et z' , de $\mathbb{C}$ est le module de $z - z'$ noté $|z - z'|$. Dans un espace topologique, on désigne l'adhérence d'une partie X par $\bar{X}$.

Dans tout le texte on note $z = x + iy$. ($z \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.)

I. — 1° Soit $t \mapsto \gamma_1(t)$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\gamma_1(t) = 0 \quad \text{si } t \leq 0, \quad \gamma_1(t) = \exp\left(-\frac{1}{t^2}\right) \quad \text{si } t > 0.$$

Montrer qu'elle est indéfiniment dérivable.

En déduire que la fonction γ définie dans le plan complexe par

$$\gamma(z) = \gamma_1\left(\frac{1}{2} + |z|\right) \gamma_1\left(\frac{1}{2} - |z|\right),$$

dont le support est la boule fermée de centre zéro et de rayon $\frac{1}{2}$, est indéfiniment dérivable en tant qu'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

2° On note

$$\varphi(z) = \frac{\gamma(z)}{a} \quad \text{avec} \quad a = \iint_{\mathbb{R}^2} \gamma(z) \, dx \, dy$$

et, pour

$$m \in \mathbb{R}^+, \quad \varphi_m(z) = m^2 \varphi(mz).$$

Soit Ω un ouvert borné du plan complexe et Ω_1 un ouvert relativement compact de Ω . On désigne par α un nombre strictement positif, par d la borne inférieure de $|z - u|$ pour z élément de Ω_1 et u élément du complémentaire de Ω dans $\mathbb{C}$, par $\Omega_{1,\alpha}$ la réunion des boules ouvertes de rayon αd et de centre dans Ω_1 , enfin par $\chi_{1,\alpha}$ la fonction caractéristique de $\Omega_{1,\alpha}$.

Montrer que la fonction

$$\zeta \mapsto \chi(\zeta) = \iint_{\mathbb{R}^2} \chi_{1,\alpha}(z) \varphi_{(\alpha d)^{-1}}(\zeta - z) \, dx \, dy$$

est indéfiniment dérivable en tant qu'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, à support compact dans Ω pour $\alpha < \frac{2}{3}$ et égale à 1 sur Ω_1 .

3° Soit g une fonction holomorphe dans Ω ; démontrer que, pour tout $z \in \Omega_1$, on a

$$(1) \quad g(z) = \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial \chi}{\partial \bar{u}}(u) \frac{dv \, dw}{z - u}, \quad \text{avec} \quad u = v + iw, \quad v \in \mathbb{R}, \quad w \in \mathbb{R}$$

[on rappelle la notation $\frac{\partial \chi}{\partial \bar{u}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \chi}{\partial v} + i \frac{\partial \chi}{\partial w} \right)$].

On pourra appliquer la formule de Stokes dans l'ouvert défini par $|z - u| > r$, où r est un nombre strictement positif assez petit.

II. — Soit Ω un ouvert, borné ou non, du plan complexe. On note $H^2(\Omega)$ l'espace vectoriel normé des fonctions f holomorphes dans Ω et de carré sommable dans Ω , c'est-à-dire telles que

$$\|f\|_{\Omega} = \left(\iint_{\Omega} |f(z)|^2 \, dx \, dy \right)^{\frac{1}{2}}$$

soit fini.

1° Évaluer $\|f\|_{\Omega}^2$ à l'aide des coefficients du développement de Taylor à l'origine de la fonction f , dans le cas où Ω est une boule de centre zéro et de rayon R .

2° Démontrer que $H^2(\mathbb{C})$ est réduit à 0.

Soit $z_0 \in \Omega$; on note par $\Omega - \{z_0\}$ l'ensemble des points de Ω distincts de z_0 . Montrer que toute fonction de $H^2(\Omega - \{z_0\})$ est la restriction à $\Omega - \{z_0\}$ d'une fonction de $H^2(\Omega)$.

3° Démontrer que, si Ω est le demi-plan $y > 0$, alors $H^2(\Omega)$ est de dimension infinie.

4° On se propose de prouver que $H^2(\Omega)$ est un espace complet pour la norme $f \mapsto \|f\|_{\Omega}$ donc qu'on peut lui appliquer les résultats de la théorie des espaces de Hilbert.

a) Soit Ω_1 un ouvert relativement compact de Ω et δ un nombre réel strictement positif. On note par Ω_1^δ l'ensemble des points de Ω_1 dont la distance à la frontière de Ω_1 est supérieure ou égale à δ . Démontrer, en utilisant la représentation intégrale (1) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que pour tout couple (φ, ψ) d'éléments de $H^2(\Omega)$ on a une inégalité de la forme

$$\sup_{z \in \Omega_1^\delta} |\varphi(z) - \psi(z)| \leq C(\varphi - \psi)_\Omega,$$

où le nombre positif C est indépendant de φ et de ψ .

b) En déduire que, si (f_n) est une suite de Cauchy dans $H^2(\Omega)$, (f_n) converge uniformément sur tout compact de Ω vers une fonction holomorphe f .

c) Démontrer que cette fonction f appartient à $H^2(\Omega)$ et qu'elle est limite de la suite (f_n) pour la norme de $H^2(\Omega)$.

III. — Dans cette partie l'ouvert Ω est supposé borné. On se propose d'étudier sous quelles conditions les polynômes sont denses dans $H^2(\Omega)$.

1° Soit K un compact de la sphère de Riemann (c'est-à-dire du plan complexe compactifié par l'adjonction d'un point noté ∞), une fonction définie dans un voisinage V de ∞ et holomorphe étant une fonction continue sur V , qui est holomorphe au sens habituel dans le complémentaire de ∞ dans V). On considère l'ensemble $\mathcal{H}(K)$ formé des couples (ω, f) , où ω est un voisinage ouvert de K et f une fonction holomorphe dans ω . On introduit dans $\mathcal{H}(K)$ la relation suivante :

$$(\omega, f) \mathcal{R} (\omega', f')$$

s'il existe ω'' voisinage ouvert de K inclus dans $\omega \cap \omega'$ tel que la restriction de f à ω'' soit égale à celle de f' à ω'' .

a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. On notera par $f^\sim$, ou $(\omega, f)^\sim$, la classe d'équivalence de (ω, f) . Le quotient de $\mathcal{H}(K)$ par $\mathcal{R}$ sera noté $H(K)$.

b) Soit (ω_1, f_1) un élément de $f_1^\sim$, (ω_2, f_2) un élément de $f_2^\sim$.

Montrer que, pour tout λ et tout μ appartenant à $\mathbb{C}$, on peut définir $\lambda f_1^\sim + \mu f_2^\sim$ en posant

$$\lambda f_1^\sim + \mu f_2^\sim = (\omega_1 \cap \omega_2, \lambda f_1 + \mu f_2)^\sim,$$

$\lambda f_1 + \mu f_2$ étant définie dans $\omega_1 \cap \omega_2$; $H(K)$ est ainsi muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

Démontrer aussi que la valeur de $f^\sim$ est définie en tout point k de K par $f^\sim(k) = f(k)$ si (ω, f) est un élément de $f^\sim$.

2° Dans cette question, K est le complémentaire de Ω dans la sphère de Riemann. Soit $f^\sim$ un élément de $H(K)$ et (ω, f) un élément de $f^\sim$. On considère un ouvert Ω_1 , voisinage du complémentaire de ω et relativement compact dans Ω .

Soit χ une fonction indéfiniment dérivable (en tant qu'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$), égale à 1 sur Ω_1 et à support compact dans Ω . Soit g une fonction holomorphe dans Ω . On pose

$$F(g) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(z) g(z) \frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}} dx dy.$$

Démontrer que le nombre $F(g)$ ne dépend pas du choix de la fonction χ ; en déduire que $F(g)$ ne dépend pas du choix de l'élément (ω, f) de $f^\sim$.

Vérifier que l'application $g \mapsto F(g)$, restreinte à $H^2(\Omega)$, est une forme linéaire continue.

3° Calculer $F(g)$ pour (ω, f) défini comme suit :

ω est le complémentaire de z dans la sphère de Riemann et f est la fonction $s \mapsto \frac{1}{z-s}, (s \in \omega)$.

En conclure que l'ensemble des formes linéaires $F, f^{\sim}$ parcourant $H(K)$, est dense dans le dual de $H^2(\Omega)$.

4° Soit l une forme linéaire continue sur $H^2(\Omega)$ et soit u un élément du complémentaire Π de $\bar{\Omega}$. On considère la fonction Φ_u définie dans Ω par $z \mapsto \frac{1}{z-u}$ et qui appartient à $H^2(\Omega)$. On pose $\mathcal{J}_l(u) = l(\Phi_u)$. Démontrer que la fonction $u \mapsto \mathcal{J}_l(u)$ est holomorphe dans l'ouvert Π .

5° On désigne par $H_0^2(\Omega)$ le sous-espace fermé de $H^2(\Omega)$ engendré par les restrictions à Ω des fonctions holomorphes dans les voisinages ouverts de $\bar{\Omega}$. Soit l_0 une forme linéaire continue sur $H_0^2(\Omega)$. Démontrer que $\mathcal{J}_{l_0} = 0$ entraîne $l_0 = 0$.

On dit que Ω est étoilé par rapport à l'origine si, pour tout $z \in \Omega$, le segment $[0, z]$ est dans Ω .

Démontrer que, si Ω est étoilé par rapport à l'origine, et si de plus il est l'intérieur de son adhérence, on a

$$H_0^2(\Omega) = H^2(\Omega).$$

[Dans ce but on pourra montrer que, si f est un élément de $H^2(\Omega)$ et si l'on pose $f_\nu(z) = f(\nu z)$, on a

$$f_\nu \in H_0^2(\Omega) \text{ si } \nu < 1, \text{ puis } f = \lim_{\nu \rightarrow 1} f_\nu.]$$

6° Déterminer les coefficients du développement de $\mathcal{J}_l$ en série de puissances de $\frac{1}{u}$ au voisinage de ∞ .

7° Si Π n'est pas connexe, démontrer qu'il existe une forme linéaire continue, associée à un élément $f^{\sim}$ de $H(K)$, s'annulant sur les polynômes et non identiquement nulle.

En déduire que les polynômes sont denses dans $H_0^2(\Omega)$ si, et seulement si, Π est connexe, puis, qu'ils sont denses dans $H^2(\Omega)$ lorsque Ω est étoilé par rapport à l'origine et égal à l'intérieur de son adhérence.

IV. — A l'aide des résultats des trois premières questions, on se propose d'étudier une propriété d'approximation dans l'espace $H(\Omega)$ des fonctions holomorphes dans un ouvert Ω , borné ou non, de $\mathbb{C}$.

Soit (Ω_j) une suite d'ouverts relativement compacts de Ω , telle que tout compact de Ω soit inclus dans l'un des $\Omega_j (j = 1, 2, \dots)$.

1° Soit

$$p_j(f) = \left(\int \int_{\Omega_j} |f(z)|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Une suite (f_n) de $H(\Omega)$ sera dite convergente vers un élément f de $H(\Omega)$ si, pour tout j , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_j(f_n - f) = 0.$$

Montrer que, étant donné une série $\sum \alpha_j$ de termes tous strictement positifs, telle que $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j = 1$, la fonction

$$(g, h) \mapsto d(g, h) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \inf [p_j(h - g), 1]$$

est une distance sur $H(\Omega)$ et que les suites convergentes au sens précédent sont les suites convergentes pour la distance d .

2° Démontrer que la topologie introduite dans la question IV, 1° est la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de Ω .

3° Soit L un compact de Ω . On désigne par L^* la réunion de L et des composantes connexes relativement compactes de son complémentaire par rapport à Ω .

Démontrer que L^* est un compact de Ω .

4° Appliquant IV, 3°, aux $\overline{\Omega}_j^*$, déduire des résultats de la partie III que, si le complémentaire de Ω n'a pas de composante connexe compacte, les polynômes sont denses dans $H(\Omega)$.

Mécanique générale.

L'espace euclidien réel de dimension trois dans lequel seront étudiés les mouvements définis ci-dessous est supposé rapporté à un repère galiléen $O_1x_1y_1z_1$, considéré comme orthonormé et direct.

On désigne par « système H » tout système mécanique dont la position à tout instant t se déduit de la position initiale à l'instant t_0 par une similitude $S(t)$, produit d'un déplacement par une homothétie de rapport positif $k(t)$ [la fonction k sera supposée dans la suite pourvue de dérivées jusqu'à l'ordre 2 au moins, sauf dans la question II, 2°]. On notera que le fait pour un système mécanique d'être un système H est indépendant du choix de t_0 .

On appelle « point lié au système H » tout point mobile $M(t)$ dont la position à l'instant t se déduit de la position initiale $M(t_0)$ par la similitude $S(t)$. On appelle « repère associé au système H » tout repère orthonormé direct dont l'origine est un point lié au système H et dont les directions d'axes se déduisent par la similitude $S(t)$ de celles d'un repère orthonormé direct défini à l'instant t_0 .

On associe à toute « partie » d'un système H (ensemble de points liés à H) un scalaire positif ou nul qui est la masse de cette partie. La loi de conservation de la masse implique l'invariance de cette quantité par les transformations $S(t)$.

I. — CINÉMATIQUE ET CINÉTIQUE. — 1° Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système matériel soit un système H est que le champ des vitesses satisfasse, à tout instant t et pour tout couple de points M_1 et M_2 du système, à la condition

$$(1) \quad \mathbf{V}(M_2) = \mathbf{V}(M_1) + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 + \lambda \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2,$$

le vecteur $\boldsymbol{\Omega}$ et le scalaire λ étant indépendants du couple M_1M_2 considéré, mais pouvant dépendre du temps. Exprimer λ à l'aide de $k(t)$ et de la dérivée $k'(t)$.

2° Déterminer, à un instant t donné, le lieu des points liés à un système H dont le vecteur vitesse est colinéaire à $\boldsymbol{\Omega}$. Montrer qu'il existe en général (on précisera sous quelle hypothèse) un point unique I dont la vitesse s'annule à cet instant (centre instantané de similitude à l'instant t).

3° Oxyz étant un repère associé au système H, on désigne par J le point déduit de I à chaque instant par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{k(t)}$. Soit C_1 la trajectoire de I relativement au repère $O_1z_1y_1x_1$ et soit C la trajectoire de J relativement au repère Oxyz. Comparer les directions des tangentes à C_1 et à C en deux points homologues I et J, ainsi que les différentielles ds_1 et ds des longueurs des arcs décrits respectivement par I sur C_1 et par J sur C.

4° Montrer que le centre des masses d'un système H est un point lié à ce système et que les axes principaux d'inertie en un point arbitraire O lié au système coïncident

au cours du temps avec les axes d'un repère associé au système. Exprimer le moment d'inertie du système par rapport à un tel axe en fonction de sa valeur à l'instant t_0 et de la fonction $k(t)$.

II. — DYNAMIQUE. — On se propose d'étudier ici, pour des systèmes H, différentes questions classiques en mécanique du solide. Dans toute cette étude, la condition pour qu'un système mécanique soit un système H est supposée réalisée uniquement par l'intervention de forces de liaison *intérieures* à ce système.

La position d'un système H quelconque est définie relativement au repère $O_1x_1y_1z_1$ par les coordonnées ξ, η, ζ de son centre des masses G, par les angles d'Euler ψ, θ, φ d'un repère central et principal d'inertie $Gxyz$ et par la valeur de k . On utilisera les composantes p, q, r sur $Gxyz$ du vecteur Ω défini dans la première partie. On désignera par m la masse du système et par A, B, C les moments principaux d'inertie du système en G à l'instant t_0 .

1° Sur un tel système H sont exercées des forces extérieures dont le torseur [E] a pour somme le vecteur S de composantes X, Y, Z sur $O_1x_1y_1z_1$ et pour moment en G le vecteur $\mathcal{M}_G$ de composantes $\mathcal{M}_x, \mathcal{M}_y, \mathcal{M}_z$ sur $Gxyz$.

Former les équations obtenues en appliquant les théorèmes généraux de la dynamique au système H.

Pour déterminer le mouvement de ce système, il faut avoir recours à une équation supplémentaire faisant intervenir les forces intérieures. On supposera que, pour un champ de vitesses virtuelles arbitraires du système satisfaisant à la condition (1) de la première partie et défini par des dérivées virtuelles $\xi'^*, \eta'^*, \zeta'^*, \psi'^*, \theta'^*, \varphi'^*, k'^*$ des paramètres, la puissance virtuelle des forces intérieures est de la forme $\mathcal{P}^* = P(k) k'^*$, où $P(k)$ est une fonction donnée du paramètre k , et l'on formera l'équation obtenue en appliquant le principe des puissances virtuelles au système H, lorsque le champ des vitesses virtuelles est défini par la seule dérivée virtuelle k'^* du paramètre k , les autres dérivées virtuelles étant nulles. On notera e la quantité :

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{GM}_i + \int_{\mathcal{D}} f(\mathbf{M}) \cdot \mathbf{GM} \, dv$$

en supposant que le système des forces extérieures comporte d'une part des forces $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$ appliquées respectivement aux points $M_1, M_2, \dots, M_n$ et, d'autre part, une répartition continue de densité $f(\mathbf{M})$ au point M; l'intégration est étendue au domaine $\mathcal{D}$, d'élément de volume dv , occupé par le système H.

2° On exerce sur un système H un ensemble de percussions extérieures $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$ appliquées respectivement aux points $M_1, M_2, \dots, M_n$ et l'on appelle [II] leur torseur (somme Π de composantes Π_x, Π_y, Π_z sur $O_1x_1y_1z_1$, moment μ en G de composantes μ_x, μ_y, μ_z sur $Gxyz$) et $\bar{\omega}$ la quantité $\sum_{i=1}^n \Pi_i \cdot \mathbf{GM}_i$.

On suppose que la puissance virtuelle du système des percussions intérieures est nulle pour tout champ de vitesses virtuelles satisfaisant à la condition (1) de la première partie.

En supposant donné l'état des vitesses du système H avant le choc par les valeurs des dérivées des différents paramètres, former les équations déterminant l'état des vitesses après le choc.

3° Étudier le mouvement d'un système H en l'absence de toute force extérieure, qu'elle soit donnée ou de liaison. On se placera uniquement ici dans l'hypothèse où la fonction $P(k)$ est égale à αk (α constant).

On étudiera, outre le cas général, les cas particuliers où le système H est sphérique ($A = B = C$) et celui où il est de révolution ($A = B \neq C$).

On recherchera s'il existe des mouvements dans lesquels k reste constant au cours du temps et l'on étudiera leur stabilité relativement aux variations de ce paramètre.

4° On suppose l'axe O_1z_1 vertical ascendant. On désigne par S un système H sphérique, homogène et de masse m , de rayon $R = kR_0$; S est soumis au champ de la pesanteur (son poids a pour composantes scalaires $0, 0, -mg$ sur $O_1x_1y_1z_1$) et S est astreint à rester en contact avec le plan horizontal $O_1x_1y_1$ du côté des points dont les cotes z_1 sont positives.

La fonction $P(k)$ est encore supposée égale à αk . Étudier le mouvement de S dans les deux hypothèses suivantes : le contact de S et de $O_1x_1y_1$ a lieu :

a) sans frottement;

b) sans glissement (le point lié à S qui est au contact avec le plan a une vitesse nulle par rapport à $O_1x_1y_1$).

Mathématiques appliquées.

N. B. — Deux feuilles de papier millimétré seront remises à chaque candidat.

Pour tous les tracés demandés l'unité graphique sera prise de 5 cm. Sur les deux feuilles l'origine des coordonnées sera le point situé à 5 cm du bord gauche et à 10 cm du bord inférieur de la feuille.

La qualité des constructions graphiques, la présentation, l'exactitude des valeurs numériques interviendront de façon importante dans la cotation des copies. Il est recommandé d'utiliser toutes les remarques géométriques susceptibles de simplifier les calculs.

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté, de dimension 2, et II un plan affine associé à E. Les points mobiles J, M, N, ... considérés dans le problème se déplacent tous dans II; leurs positions sont repérées par des fonctions $t \mapsto J(t)$, $t \mapsto M(t)$, $t \mapsto N(t)$... d'une même variable t , supposées continûment dérivables deux fois dans les intervalles où elles sont définies. Le mouvement du point J est une donnée du problème, la fonction $t \mapsto J(t)$ étant définie dans un intervalle contenant zéro. A tout mouvement d'un mobile M on associe celui du mobile N tel que, pour chaque valeur de t , la position $N(t)$ de N se déduise de la position $M(t)$ de M par la rotation d'angle $2t$ et de centre $J(t)$:

$$[(JM, JN) = 2t \pmod{2\pi}; JM = JN].$$

I. — Le plan II est rapporté à un repère orthonormé direct d'origine O, d'axes Ox et Oy . On appelle A le point de Oy d'ordonnée égale à un et (C) l'ellipse d'équation

$$x^2 + y^2 - xy\sqrt{2} + (\sqrt{2}-1)x - y = 0.$$

Le point J décrit (C); il passe en A pour $t = 0$ et, pour chaque valeur de t , sa position est telle qu'une détermination de l'angle de droites (OJ, OA) soit égale à $\frac{t}{2}$:

$$(OJ, OA) = \frac{t}{2} \pmod{\pi}.$$

1° a) Sur une première feuille de papier millimétré, placer les points de (C) à coordonnées entières, le centre, dont on calculera les coordonnées, les axes et les sommets (unité graphique : 5 cm).

Construire la tangente en O et la tangente à (C) qui lui est parallèle. (On rappelle que $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$.)

b) Les coordonnées cartésiennes u et v de $J(t)$ peuvent s'écrire

$$u = r \sin \frac{t}{2}, \quad v = r \cos \frac{t}{2};$$

calculer r en fonction de t , puis u, v ($v-1$) en fonction de $\cos t$ et $\sin t$.

Montrer que les cordes $J(t)$ et $J(\pi-t)$ ont même direction; placer les tangentes à (C) parallèles à cette direction et leurs points de contact.

c) Graduer (C) en fonction de t en plaçant et marquant les points de paramètre $k\frac{\pi}{4}$, k étant entier. Calculer les paramètres t des sommets. Tracer (C) avec soin.

2° Soit O' le point mobile associé au point fixe O [$(JO, JO') = 2t \pmod{2\pi}$, $JO = JO'$ pour chaque valeur de t], et (Γ) sa trajectoire.

Calculer en fonction de t un système de coordonnées polaires de $O'(t)$, l'axe polaire étant Ox et le pôle O . En déduire :

- le rayon de courbure de (Γ) pour $t = 0$,
- la relation $\cotg \varphi + \cotg \psi = 2 \cotg t$, où φ est l'angle du rayon vecteur et de la tangente au point J de (C) et ψ celui du rayon vecteur et de la tangente au point O' de (Γ) pour une même valeur de t ,
- les positions des tangentes (T) et (T') perpendiculaires à l'axe d'angle polaire

$\frac{5\pi}{8}$, à l'aide d'une projection orthogonale sur cet axe.

Construire, sur la même feuille millimétrée que (C), les points O' correspondant aux points J graduant (C) et aux sommets de (C). Placer les tangentes en ces points ainsi que (T) et (T').

Tracer la courbe (Γ) par jonction des points en utilisant les éléments ainsi connus. (*L'étude des variations du rayon vecteur n'est pas demandée.*)

3° Soit (D) la droite d'équation $x + y = 1$. On se propose de rechercher un couple (m, n) de mobiles associés tel que, le point m se déplaçant sur (D), le point n varie sur Oy ,

a) Montrer géométriquement que, connaissant t , les positions de m et n sont en général déterminées; discuter.

b) Construire les positions de m et n correspondant aux positions de J graduant (C).

Cette construction sera effectuée sur la seconde feuille de papier millimétré et le milieu de chacun des segments mn ainsi obtenus sera désigné par la valeur de t correspondante.

c) Compléter la figure en construisant les segments mn correspondant aux valeurs $k\frac{\pi}{8}$ de t non encore rencontrées et leurs milieux.

Aucun calcul n'est exigé pour déterminer les nouveaux points J ; ils seront obtenus graphiquement sur la courbe (C) de la première figure et simplement reportés sur la seconde figure.

d) En appelant a l'abscisse de m et $1 + b$ l'ordonnée de n , qui dépendent de t , établir que les matrices $\begin{bmatrix} a\sqrt{2} \\ b \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} u \\ v-1 \end{bmatrix}$ sont liées par une relation de la forme

$$\begin{bmatrix} a\sqrt{2} \\ b \end{bmatrix} = K(t) \begin{bmatrix} \sin t & \cos t \\ \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) & -\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v-1 \end{bmatrix}$$

$K(t)$ étant un coefficient, que l'on calculera.

e) Soit (L) le lieu géométrique du milieu de mn .

Exprimer le rapport $\frac{b}{a\sqrt{2}}$ en fonction de t et du rapport $\frac{v-1}{u}$. En déduire l'étude de (L) au voisinage de A ainsi que les directions asymptotiques et les asymptotes de (L); pour ces calculs on utilisera, après les avoir évaluées directement sur le tracé de (C), les valeurs (approchées ou non) ou les limites de $\frac{v-1}{u}$, u et $v-1$ pour les valeurs étudiées de t .

f) A l'aide des éléments ainsi déterminés, donner un tracé approximatif de (L).

II. — Dans E on désigne par S_Δ la symétrie par rapport à la direction Δ , par R_v , la rotation d'angle v et, pour simplifier l'écriture, par R la rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$.

U et V étant des vecteurs quelconques de E, on note :

- $U \cdot V$ leur produit scalaire.
- $U \wedge V$ leur déterminant dans une base orthonormée directe,
- $R_v(U)$ et $S_\Delta(U)$ les images de U par R_v , et S_Δ .

On remarque que l'on a

$$U \wedge R(U) = U \cdot U \quad \text{et} \quad R_v(U) = \cos v \, U + \sin v \, R(U).$$

Exprimer $R(U) \wedge R(V)$, $U \wedge R(V)$ et $R(U) \wedge V$ en fonction de $U \wedge V$ ou $U \cdot V$.

Dans cette seconde partie, M et N désignent deux points mobiles associés assujettis à avoir des trajectoires rectilignes dont on donne seulement le point commun Ω ; pour $t = 0$, les deux mobiles sont en Ω . La fonction $t \mapsto J(t)$ est donnée.

1° Il existe un vecteur V de E, dépendant de t , tel que l'on a

$$\Omega M = \Omega J + R_{-t}(V), \quad \Omega N = \Omega J + R_t(V).$$

En notant $P = \Omega J = \cos t \, V$ et $Q = \sin t \, V$, les égalités précédentes deviennent :

$$\Omega M = P - R(Q) \quad \text{et} \quad \Omega N = P + R(Q).$$

Représenter géométriquement les vecteurs V, P et Q, connaissant Ω et les positions de J, M et N pour la valeur t de la variable.

Démontrer que, si M et N se déplacent sur des droites distinctes passant par Ω , P et Q satisfont :

— au système différentiel :

$$(1) \quad \begin{cases} X \wedge dX + Y \wedge dY = 0, \\ X \cdot dY - Y \cdot dX = 0 \end{cases}$$

— et à une condition qui les rattache à ΩJ .

2° Si X et Y sont deux variables de E, le système (1) est une condition nécessaire et suffisante pour que $X + R(Y)$ et $X - R(Y)$ aient des directions fixes. On se propose de montrer par intégration que, lorsque X n'a pas une direction fixe, le système (1) établit entre les variables X et Y non nulles une relation de la forme $Y = \mathcal{C}(X)$, $\mathcal{C}$ étant un opérateur linéaire qui ne dépend que des constantes d'intégration.

a) On décompose Y suivant X et $R(X)$:

$$Y = \alpha X + \beta R(X).$$

Démontrer que les scalaires α et β satisfont à une relation de la forme

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha \operatorname{tg} \lambda = 1,$$

où λ est une constante arbitraire.

Démontrer de plus que, si θ est l'angle polaire de X relativement à un vecteur fixe non nul de E , les différentielles $d\theta$ et $d\alpha$ sont liées à β par une relation simple.

Calculer α et β en fonction de θ , de λ et d'une seconde constante d'intégration.

b) En déduire que, si (X, Y) est solution de (1), les vecteurs X et Y sont liés par une relation de la forme

$$Y \cos \lambda - X \sin \lambda = S_{\Delta}(X), \quad \text{ou} \quad Y \sin \lambda + X \cos \lambda = S_{\Delta}(Y),$$

dans laquelle l'angle λ et la direction Δ sont arbitraires.

3° Revenant à l'étude proposée des couples (M, N) , démontrer qu'à tout angle μ non nul et à toute direction Δ on peut associer un vecteur unique W dépendant de t et un couple unique de mobiles (M, N) , tels que l'on ait

$$\Omega M = R_{-\mu}(W) + S_{\Delta}(W), \quad \Omega N = R_{\mu}(W) + S_{\Delta}(W).$$

Exprimer W en fonction de ΩJ , μ et Δ .

Quels sont les vecteurs propres et les valeurs propres des opérateurs $R_{\mu} + S_{\Delta}$ et $R_{-\mu} + S_{\Delta}$? Connaissant Ω , Δ , μ et W , placer sur une figure les supports des trajectoires de M et N et indiquer une construction géométrique des positions des mobiles pour une valeur quelconque de t .

Rechercher μ , Δ et W dans le cas des points m et n de I , 3°.

4° Caractériser dans l'ensemble des endomorphismes de E la famille des opérateurs $\mathcal{G}$ obtenus dans II, 2°.

Montrer que toute solution (X, Y) de (1) peut s'exprimer sous la forme :

$$\begin{cases} X = Z \cos \frac{\lambda}{2} - S_{\Delta}(Z) \sin \frac{\lambda}{2}, \\ Y = Z \sin \frac{\lambda}{2} + S_{\Delta}(Z) \cos \frac{\lambda}{2}, \end{cases}$$

où Z est un vecteur arbitraire et où λ et S_{Δ} ont mêmes significations qu'au II, 2° [on comparera à cet effet $X + S_{\Delta}(Y)$ et $Y - S_{\Delta}(X)$].

Pour vous détendre..., ou pour vous cultiver, après lecture des textes officiels ou des énoncés d'agrégation,

lisez les publications de l'APM.

Précisions sur celles-ci : p. 420, 571 et 572.