

Économies

J. COMMEAU,

Mathématiques Supérieures, Lycée Kléber, Strasbourg.

In memoriam.

Notre Collègue Joanny COMMEAU est décédé à Strasbourg le 14 septembre 1968, à la suite d'une crise cardiaque qui l'a emporté en vingt-quatre heures. La cérémonie des obsèques a eu lieu le 16 septembre, en l'église Saint-Maurice de Strasbourg, en présence d'une assistance nombreuse et recueillie de parents, d'amis et d'anciens élèves.

L'A.P.M.E.P. renouvelle l'expression de ses respectueuses condoléances à M^{me} Commeau si cruellement atteinte puisque, dans le même jour, elle a perdu son mari et sa mère, M^{me} REY, terrassée par l'émotion à l'annonce du décès de son gendre.

Né au Creusot en 1907, Joanny Commeau a eu une enfance malade ; il n'est entré qu'assez tard au lycée de Dijon, après des études techniques dans sa ville natale. Reçu à l'E.N.S. en 1929, agrégé en 1932, il commence sa carrière par de courts séjours à Cherbourg, Clermont et Dijon, avant d'être nommé, à la veille de la guerre, professeur de mathématiques supérieures au lycée de Strasbourg. De 1940 à 1945 il enseigne en Spéciales, d'abord à Mauriac — où il a suivi ses élèves alsaciens repliés — puis à Montpellier ; la rentrée de 1945 le voit reprendre possession de sa chaire du lycée Kléber qu'il ne va plus quitter.

C'est dans cette tâche de professeur de mathématiques supérieures si passionnante mais en même temps si délicate, à la charnière de deux formes d'enseignement, que Commeau a pu s'épanouir sur les plans professionnel et humain. Il excellait dans l'art d'amener ses disciples à découvrir par eux-mêmes l'origine des notions qu'il leur exposait, quitte à mettre au net, en une vigoureuse synthèse, ce qui devait rester de ses leçons ; il savait voir dans les jeunes gens qui lui étaient confiés non pas des robots plus ou moins aptes à ingurgiter des mathématiques, mais bien des adolescents en pleine mutation, conditionnés par un environnement familial et local qu'il s'efforçait de discerner par des prises de contact individuelles.

Nul plus que Commeau n'a eu le souci constant de l'amélioration permanente qui est l'honneur de notre métier. Jamais pleinement satisfait de son cours, il le remettait en cause chaque année, modifiant des chapitres entiers, et obtenant ainsi une présentation toujours neuve, toujours fraîche. Cette année il avait refondu son cours d'algèbre linéaire et c'est à cette occasion que, moins de dix jours avant sa mort, il nous envoyait, impeccablement présentée de sa belle écriture moulée et vigoureuse, la note que nous publions aujourd'hui.

Joanny Commeau était chevalier de la Légion d'Honneur ; en 1967 il avait partagé le prix Gaston Julia avec son collègue Marvillet, professeur de Spéciales au Lycée Kléber.

E. RAMIS.

Il convient de faire ici une remarque très importante pour la suite : les deux

$$\mathcal{B} \quad \mathcal{B}$$

écussons $\mathcal{A} \left[\begin{array}{c} \mathcal{B} \\ \alpha \end{array} \right]$ et $\mathcal{A} \left[\begin{array}{c} \mathcal{B} \\ \alpha' \end{array} \right]$ entraînent $\alpha = \alpha'$ si, et seulement si, $\mathcal{A}$ est un système libre.

Les graphies (1), (2), (3), (4), (5), (6) sont équivalentes ; on mesure l'économie réalisée en passant de (1) à (6).

2. Opérations linéaires.

Si $\mathcal{B}' = \{ B'_j \}$ est un autre système de q combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{A}$, les égalités :

$$\left. \begin{aligned} B_j &= \sum_{i \in P} a_{ij} A_i \text{ et } B'_j = \sum_{i \in P} a'_{ij} A_i \\ B_j + B'_j &= \sum_{i \in P} (a_{ij} + a'_{ij}) A_i \end{aligned} \right\} \forall j \in Q$$

entraînent :

On est conduit à appeler *somme* des matrices $\alpha = [a_{ij}]$ et $\alpha' = [a'_{ij}]$ (de mêmes dimensions) la matrice notée, $\alpha + \alpha'$, dont l'élément générique est $a_{ij} + a'_{ij}$.

On pourra alors écrire :

$$(7) \quad \left(\begin{array}{c} B_j \\ A_i \left[\begin{array}{c} \mathcal{B} \\ \alpha \end{array} \right] \text{ et } A_i \left[\begin{array}{c} \mathcal{B}' \\ \alpha' \end{array} \right] \end{array} \right) \Rightarrow A_i \left[\begin{array}{c} B_j + B'_j \\ \alpha + \alpha' \end{array} \right]$$

De même, si on appelle *produit* de la matrice $\alpha = [a_{ij}]$ par l'élément s du corps K , la matrice, notée $s\alpha$, dont l'élément générique est sa_{ij} , on pourra écrire :

$$(8) \quad \left(\begin{array}{c} B_j \\ A_i \left[\begin{array}{c} \mathcal{B} \\ \alpha \end{array} \right] \text{ et } s \in K \end{array} \right) \Rightarrow A_i \left[\begin{array}{c} sB_j \\ s\alpha \end{array} \right]$$

3. Multiplication.

Soit $\mathcal{C} = \{ C_k \}$, $k \in R$ un système de r combinaisons linéaires des vecteurs B_j . Les égalités :

$$C_k = \sum_{j \in Q} b_{jk} B_j \text{ et } B_j = \sum_{i \in P} a_{ij} A_i$$

entraînent (après l'interversion permise des signes Σ) :

$$C_k = \sum_{i \in P} \left(\sum_{j \in Q} a_{ij} b_{jk} \right) A_i$$

Ce qui montre que les vecteurs C_k sont aussi combinaisons linéaires des A_i avec les coefficients : $c_{ik} = a_{ij} b_{jk}$.

On est conduit à définir le *produit* de la matrice $\alpha = [a_{ij}]$ ($i \in P, j \in Q$) par la matrice $\beta = [b_{jk}]$ ($j \in Q, k \in R$) : c'est la matrice, notée $\alpha\beta$, d'élément générique :

$$c_{ik} = \sum_{j \in Q} a_{ij} b_{jk} \quad (i \in P, k \in R).$$

De cette définition. et du calcul qui précède. résulte la graphie suivante :

$$(9) \quad \left(A_i \left| \begin{array}{c} B_j \\ \alpha \end{array} \right. \text{ et } B_j \left| \begin{array}{c} C_k \\ \beta \end{array} \right. \right) \Rightarrow A_i \left| \begin{array}{c} C_k \\ \alpha\beta \end{array} \right.$$

4. Applications.

Les graphies (7). (8). (9) traduisent les trois règles élémentaires du calcul matriciel. Donnons quelques applications de (9).

1) *Toute matrice de changement de base est inversible.* Supposons que $\mathcal{E}$ soit de dimension finie n , et rapportons-le à deux bases $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$. Chacune est déterminée. dans l'autre, par sa matrice, dite *matrice de passage* de la première à la seconde. Les deux écussons :

$$\mathcal{U} \left| \begin{array}{c} \mathcal{V} \\ \varpi \end{array} \right. \text{ et } \mathcal{V} \left| \begin{array}{c} \mathcal{U} \\ \varpi' \end{array} \right.,$$

pris dans cet ordre, puis dans l'ordre inverse, conduisant aux suivants :

$$\mathcal{U} \left| \begin{array}{c} \mathcal{U} \\ \varpi\varpi' \end{array} \right. \text{ et } \mathcal{V} \left| \begin{array}{c} \mathcal{V} \\ \varpi'\varpi \end{array} \right.$$

Or, si ε est la matrice unité d'ordre n ,

$$\mathcal{U} \left| \begin{array}{c} \mathcal{U} \\ \varepsilon \end{array} \right. \text{ et } \mathcal{V} \left| \begin{array}{c} \mathcal{V} \\ \varepsilon \end{array} \right.$$

Puisque les systèmes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont libres, on a :

$$\varpi\varpi' = \varpi'\varpi = \varepsilon$$

2) *Changement de base.* Connaissant la matrice β du système $\mathcal{A}$ dans la base $\mathcal{V}$, déterminer la matrice α de ce même système dans la base $\mathcal{U}$?

Le problème est résolu immédiatement par l'application de la « formule » (9) :

$$\left(\mathcal{U} \left| \begin{array}{c} \mathcal{V} \\ \varpi \end{array} \right. \text{ et } \mathcal{V} \left| \begin{array}{c} \mathcal{A} \\ \beta \end{array} \right. \right) \Rightarrow \mathcal{U} \left| \begin{array}{c} \mathcal{A} \\ \varpi\beta \end{array} \right.$$

et, puisque le système $\mathcal{U}$ est libre, $\alpha = \varpi\beta$.

3) *Matrice d'une application linéaire.* Supposons que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ soient de dimensions finies p et q . La matrice α de l'application linéaire f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$, rapportés aux bases $\mathcal{U} = \{ U_j \}$ et $\mathcal{V} = \{ V_i \}$ est définie, par l'écusson :

$$(10) \quad V_i \left| \begin{array}{c} f(U_j) \\ [a_{ij}] \end{array} \right. = \alpha.$$

Soit $\mathfrak{X} = \{X_k\} (k \in R)$ un système de r vecteurs de $\mathfrak{E}$, déterminé par sa matrice $\xi = [x_{kj}]$ dans la base $\mathfrak{U}$. Proposons-nous de déterminer la matrice η , dans la base $\mathfrak{V}$, du système :

$$f(\mathfrak{X}) = \{f(X_k)\} (k \in R)$$

En écrivant :

$$X_k = \sum_{j \in P} x_{kj} U_j, \text{ on en déduit } f(X_k) = \sum_{j \in P} x_{kj} f(U_j)$$

Ces égalités, valables pour tout $k \in R$, se traduisent par l'écusson :

$$(11) \quad f(\mathfrak{U}_j) \left| \begin{array}{c} f(X_k) \\ \xi \end{array} \right.$$

$$\text{Or (10) et (11)} \Rightarrow V_i \left| \begin{array}{c} f(X_k) \\ \alpha \xi \end{array} \right.$$

Et, puisque $\mathfrak{V}$ est libre, $\eta = \alpha \xi$.

4) *Matrice du produit de deux applications linéaires.* $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ sont de dimensions finies p, q, r , et rapportés aux bases $\mathfrak{U} = \{U_i\}$, $\mathfrak{V} = \{V_j\}$, $\mathfrak{W} = \{W_k\}$. f et g sont deux applications linéaires de $\mathfrak{E}$ dans $\mathfrak{F}$ et de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{G}$, déterminées par leurs matrices α et β . Quelle est la matrice de $g \circ f = h$?

Il s'agit de déterminer la matrice du système $\{h(U_i)\}$ dans la base $\mathfrak{W}$. Or, en posant : $\alpha = [a_{ij}]$, on a :

$$f(U_i) = \sum_{j \in Q} a_{ji} V_j$$

Il en résulte que :

$$g(fU_i) = h(U_i) = \sum_{j \in Q} a_{ji} g(V_j)$$

Ces égalités ont lieu pour tout $i \in P$, ce qui se traduit par l'écusson :

$$(12) \quad g(V_j) \left| \begin{array}{c} h(U_i) \\ \alpha \end{array} \right.$$

Or, par définition de β :

$$(13) \quad W_k \left| \begin{array}{c} g(V_j) \\ \beta \end{array} \right.$$

$$\text{Et :} \quad (13) \text{ et } (12) \Rightarrow W_k \left| \begin{array}{c} h(U_i) \\ \beta \alpha \end{array} \right.$$

Puisque $\mathfrak{W}$ est un système libre, $\beta \alpha$ est la matrice de $h = g \circ f$.

On remarquera que les problèmes posés dans ce paragraphe ont été résolus sans qu'il ait été nécessaire de reprendre, sous une forme plus ou moins déguisée, les calculs du paragraphe 3.

J. C.