

L'anneau des entiers en classe de Cinquième

E. DEHAME,

Mathématiques Supérieures, lycée de Poitiers.

Dans un précédent article (*Bulletin 259*, p. 355), nous avons vu comment il était possible de donner aux élèves de Sixième une idée assez complète de la structure de groupe (additif) ordonné de $\mathbb{Z}$. A cette fin, nous avons adopté le principe pédagogique suivant :

- étudier plusieurs situations concrètes conduisant à différents ensembles $\mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2, \dots$ ayant tous la même structure;

- étudier cette structure sur un ensemble - type, appelé $\mathbb{Z}$, susceptible d'une définition purement mathématique ($\mathbb{Z}$ est le modèle mathématique correspondant aux ensembles $\mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2, \dots$);

- utiliser ce modèle dans l'étude de nouvelles situations concrètes.

Le programme de la Commission Lichnérowicz prévoit l'introduction, en classe de Cinquième, de l'ensemble $\mathbb{Z}$ muni de sa structure d'anneau ordonné, c'est-à-dire muni de l'addition, de l'ordre, et aussi de la multiplication.

Le but du présent article est de chercher si cette introduction peut être faite en appliquant le même principe pédagogique.

Le problème est ici beaucoup plus complexe. Afin de mieux saisir quelles sont les difficultés pédagogiques, nous commencerons par faire une étude théorique de $\mathbb{Z}$ indépendante du niveau des élèves auxquels s'adresse cet enseignement.

1. Étude théorique de l'anneau des entiers.

1. 1. Le groupe additif ordonné des entiers.

$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des classes de couples d'entiers naturels pour la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par

$$(a, b) \mathcal{R} (a', b') \Leftrightarrow a + b' = b + a'$$

Afin d'éviter toute introduction prématurée des signes $+$ et $-$, nous désignerons les éléments de $\mathbb{Z}$ par des nombres en couleurs ; pour des raisons typographiques, nous écrirons a_r et a_v au lieu de a (en rouge) et a (en vert).

Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, la classe de $(a, 0)$ sera notée a_r , celle de $(0, a)$ sera notée a_v . La classe de $(0, 0)$ sera notée 0_z .

Nous désignerons par $\mathbb{Z}_r$ le sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ constitué par O_z et par tous les a_r ($a \in \mathbb{N}^*$), par $\mathbb{Z}_v$ le sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ constitué par O_z et tous les a_v ($a \in \mathbb{N}^*$).

Addition. Soient x et y deux éléments de $\mathbb{Z}$, (a, b) un couple de naturels appartenant à la classe x , (c, d) un couple de naturels appartenant à la classe y . On démontre que la classe du couple $(a+c, b+d)$ ne dépend que de x et de y . C'est cette classe qu'on appelle $x+y$.

On vérifie que, muni de l'addition ainsi définie, $\mathbb{Z}$ est un groupe abélien, dont l'élément neutre est O_z . L'opposé d'un entier x sera noté $\text{opp } x$. L'ensemble des opposés d'une partie A de $\mathbb{Z}$ sera noté $\text{opp } A$.

Relation d'ordre. Si, dans un groupe abélien quelconque G , une partie A possède les propriétés suivantes :

- (1) A est stable pour l'addition,
- (2) $A \cap (\text{opp } A) = \{0_G\}$ (0_G : élément neutre de G),
- (3) $A \cup (\text{opp } A) = G$,

on démontre que la relation α , entre éléments de G , définie par

$$x \alpha y \Leftrightarrow y + \text{opp } x \in A$$

est une relation d'ordre total dans G , compatible avec l'addition

$$(x \alpha y) \Rightarrow (x+z) \alpha (y+z)$$

On dit alors que $(G, +, \alpha)$ est un groupe abélien totalement ordonné. A est l'ensemble des $x \in G$ qui vérifient

$$0_G \alpha x.$$

On dit que A est l'ensemble des éléments positifs de G (pour la relation d'ordre α).

La relation réciproque de α , c'est-à-dire la relation $\preceq$ définie par :

$$x \preceq y \Leftrightarrow y \alpha x$$

est aussi une relation d'ordre total compatible avec l'addition dans G . L'ensemble des éléments positifs de G pour la relation $\preceq$ est $\text{opp } A$.

Cette circonstance se produit dans $\mathbb{Z}$: chacune des parties $\mathbb{Z}_r$, $\mathbb{Z}_v$ (qui sont opposées l'une de l'autre) jouit des propriétés (1), (2), (3). Il est donc possible de définir dans $\mathbb{Z}$ deux relations d'ordre total, réciproque l'une de l'autre, et toutes deux compatibles avec l'addition :

$$\begin{aligned} x \alpha y &\Leftrightarrow y + \text{opp } x \in \mathbb{Z}_r \\ x \preceq y &\Leftrightarrow y + \text{opp } x \in \mathbb{Z}_v \end{aligned}$$

Les éléments de $\mathbb{Z}_r$ sont positifs pour la relation d'ordre α , ceux de $\mathbb{Z}_v$ sont positifs pour la relation d'ordre $\preceq$.

1. 2. L'anneau ordonné des entiers.

Il est facile de démontrer (cela peut constituer un exercice pour élèves de terminale) qu'il y a deux lois de composition et deux seulement qui, jointes à l'addition,

munissent $\mathbb{Z}$ d'une structure d'anneau unitaire. Ce sont les lois $\top$ et $\perp$ définies respectivement par : (1)

$$\left\{ \begin{array}{lll} \forall a \in \mathbb{N}^*, \forall b \in \mathbb{N}^*, & a_r \top b_r = a_v \top b_v = (a \ b)_r \\ \forall a \in \mathbb{N}^*, \forall b \in \mathbb{N}^*, & a_r \top b_v = a_v \top b_r = (a \ b)_v \\ \forall x \in \mathbb{Z}, & 0_z \top x = x \top 0_z = 0_z. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{lll} \forall a \in \mathbb{Z}^*, \forall b \in \mathbb{N}^*, & a_v \perp b_v = a_r \perp b_r = (a \ b)_v \\ \forall a \in \mathbb{N}, \forall b \in \mathbb{N}^*, & a_v \perp b_r = a_r \perp b_v = (a \ b)_r \\ \forall x \in \mathbb{Z}, & 0_z \perp x = x \perp 0_z = 0_z. \end{array} \right.$$

L'élément neutre pour la loi $\top$ est 1_r , l'élément neutre pour la loi $\perp$ est 1_v .

On constate, à posteriori, que les deux anneaux ainsi obtenus : $(\mathbb{Z}, +, \top)$ et $(\mathbb{Z}, +, \perp)$ sont commutatifs. Ils sont d'ailleurs isomorphes entre eux, l'isomorphisme étant défini par : $x \mapsto \text{opp } x$.

Multiplication et ordre. Si $(G, +, \times)$ est un anneau quelconque, si A est l'ensemble des éléments positifs de G pour une relation d'ordre α compatible avec l'addition, et si, de plus, A est stable pour la multiplication, on dit que $(G, +, \times, \alpha)$ est un anneau ordonné. Dans tout anneau ordonné G ,

$$x\alpha y \text{ et } 0_G\alpha z \Rightarrow (x \ z)\alpha(y \ z)$$

Dans le cas de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_r$ est stable pour la loi $\top$, mais non pour la loi $\perp$, $\mathbb{Z}_v$ est stable pour la loi $\perp$ mais non pour la loi $\top$.

$(\mathbb{Z}, +, \top, \alpha)$ et $(\mathbb{Z}, +, \perp, \alpha)$ sont des anneaux ordonnés, admettant respectivement pour ensembles des éléments positifs $\mathbb{Z}_r$ et $\mathbb{Z}_v$. Ces anneaux ordonnés sont d'ailleurs isomorphes entre eux (isomorphisme : $x \mapsto \text{opp } x$).

$(\mathbb{Z}, +, \top, \alpha)$ et $(\mathbb{Z}, +, \perp, \alpha)$ ne sont pas des anneaux ordonnés.

Pour le mathématicien, la situation est très simple : la structure d'anneau ordonné étant plus féconde que celle d'anneau non ordonné, il choisira l'un des anneaux $(\mathbb{Z}, +, \perp, \alpha)$ ou $(\mathbb{Z}, +, \top, \alpha)$. Et, puisque ces anneaux ordonnés sont isomorphes, il choisira n'importe lequel des deux. Du point de vue mathématique, il n'y a aucun inconvénient à décréter que les classes des couples de la forme $(a, 0)$ sont les entiers positifs, à les noter a^+ , et à définir la multiplication dans $\mathbb{Z}$ par

$$\left\{ \begin{array}{lll} \forall a \in \mathbb{N}^*, \forall b \in \mathbb{N}^*, & a^+ \times b^+ = a^- \times b^- = (ab)^+ \\ \forall a \in \mathbb{N}^*, \forall b \in \mathbb{N}^*, & a^+ \times b^- = a^- \times b^+ = (ab)^- \\ \forall x \in \mathbb{Z}, & 0_z \times x = x \times 0_z = 0_z \end{array} \right.$$

Mais, pour le pédagogue qui cherche à dégager la structure d'anneau de $\mathbb{Z}$ de situations concrètes, ce choix n'est pas arbitraire. En effet la situation idéale (difficile à réaliser, comme nous le verrons par la suite) est la suivante : on a établi une bijection d'un ensemble E d'objets

$$\dots\dots\dots A'_2 \ A'_1 \ A_0 \ A_1 \ A_2 \ \dots\dots\dots$$

sur $\mathbb{Z}$, par exemple

$$A'_n \mapsto n_r, \ A_n \mapsto n_v, \ A_0 \mapsto 0_z.$$

(1) En d'autres termes, pour chacune des « multiplications » $\top$ et $\perp$, la valeur absolue du produit est égale au produit des valeurs absolues; pour $\top$, le produit de deux nombres de même couleur est rouge, le produit de deux nombres de couleurs différentes est vert; pour $\perp$ c'est le contraire.

A l'addition dans $\mathbb{Z}$, correspond une loi de composition dans E qui a une signification concrète. Il peut arriver qu'à l'une des lois $\top$ ou $\perp$ corresponde aussi une loi dans E qui a une signification concrète, mais qu'à l'autre loi ne corresponde rien d'intéressant.

1. 3. Identification de $\mathbb{N}$ à une partie de $\mathbb{Z}$.

La bijection φ de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}_r$ définie par :

$$\forall a \in \mathbb{N}^*, \varphi(a) = a_r \text{ et } \varphi(0) = 0_z$$

est un isomorphisme de $(\mathbb{N}, +, \leq)$ sur $(\mathbb{Z}_r, +, \alpha)$.

La bijection ψ de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}_v$ définie par

$$\forall a \in \mathbb{N}^*, \psi(a) = a_v \text{ et } \psi(0) = 0_z$$

est un isomorphisme de $(\mathbb{N}, +, \leq)$ sur $(\mathbb{Z}_v, +, \alpha)$.

Si $\mathbb{Z}$ est muni de la multiplication notée ci-dessus par le signe $\top$ (resp. $\perp$), seule la bijection φ (resp. ψ) est un isomorphisme pour la multiplication.

Souvent, mais peut-être pas aussi souvent qu'on ne le pense, on a intérêt à considérer les naturels comme des entiers particuliers. Il faut alors identifier $\mathbb{N}$ à $\mathbb{Z}_r$ (resp. $\mathbb{Z}_v$) au moyen de la bijection φ (resp. ψ).

Le choix de la partie ($\mathbb{Z}_r$ ou $\mathbb{Z}_v$) de $\mathbb{Z}$ qu'on identifie à $\mathbb{N}$ équivaut au choix de la relation d'ordre (α ou α) dans $\mathbb{Z}$, ou encore au choix de la multiplication ($\top$ ou $\perp$) dans $\mathbb{Z}$. Dans un exposé idéal de la théorie des entiers, ces trois choix devraient intervenir au même instant.

Ces choix étant faits, la relation d'ordre choisie dans $\mathbb{Z}$ peut se noter $\leq$, car elle prolonge la relation d'ordre notée de cette façon dans $\mathbb{N}$, et les éléments de $\mathbb{Z}$ peuvent se noter (dans l'ordre croissant) :

$$\dots\dots \text{opp } 2, \text{ opp } 1, 0, 1, 2, 3 \dots\dots$$

Le signe — pour désigner l'opposé ne s'impose pas encore.

1. 4. Multiplication externe d'un entier par un naturel.

Soit G un groupe abélien (additif) quelconque. Pour tout élément x de G et pour tout naturel n , on définit nx comme étant la somme de n termes égaux à x . Il s'agit en réalité d'une définition par récurrence :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad & 0x = 0_G \\ & nx = (n-1)x + x. \end{aligned}$$

On démontre les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in G, \quad \forall y \in G, \quad & n(x+y) = nx + ny \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in G, \quad & (n+m)x = nx + mx \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in G, \quad & n(mx) = (nm)x \end{aligned}$$

La première exprime que l'application

$$f_n : x \mapsto nx$$

est un *endomorphisme* de G (une application de G dans G qui respecte l'addition). La seconde exprime que la somme des endomorphismes f_n et f_m est l'endomorphisme f_{n+m} , la troisième que le composé $f_n \circ f_m$ est l'endomorphisme f_{nm} .

Cette définition et ces propriétés s'appliquent au cas où G est le groupe $(\mathbb{Z}, +)$. *L'étude de la multiplication d'un entier par un naturel peut donc se faire avant d'avoir choisi celui des deux ensembles $\mathbb{Z}_r, \mathbb{Z}_v$ qu'on identifiera à $\mathbb{N}$.*

Cette multiplication externe possède, dans le cas de $\mathbb{Z}$, la propriété suivante :

$$nx = 0_x \Rightarrow n = 0 \text{ ou } x = 0_x$$

qui est fautive dans d'autres groupes abéliens $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \text{ p. ex.})$.

En outre, pour tout naturel n , l'application f_n est croissante (pour chacune des relations d'ordre α, v) :

$$x \alpha y \Rightarrow (nx) \alpha (ny)$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, cette application est même strictement croissante.

1. 5. L'anneau des endomorphismes du groupe $(\mathbb{Z}, +)$.

Cherchons quelles sont toutes les applications f de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Si f est une telle application, on vérifie immédiatement que :

$$\begin{array}{lll} \forall x \in \mathbb{Z}, & f(0_x) = 0_x \\ \forall n \in \mathbb{N}, & \forall x \in \mathbb{Z}, & f(\text{opp } x) = \text{opp } f(x) \\ & & f(nx) = nf(x) \end{array}$$

Il en résulte qu'un endomorphisme f du groupe additif $\mathbb{Z}$ est entièrement déterminé par la donnée de $f(1_r)$ (ou de $f(1_v)$). En effet, deux cas sont possibles :

— ou bien $f(1_r)$ appartient à $\mathbb{Z}_r$; posons alors $f(1_r) = n_r$ (n naturel donné),

$$\begin{array}{ll} \forall p \in \mathbb{N}, & f(p_r) = f(p1_r) = pn_r = (pn)_r = np_r \\ \forall p \in \mathbb{N}, & f(p_v) = \text{opp } f(p_r) = np_v; \end{array}$$

dans ce cas, il existe un naturel n tel que

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \quad f(x) = nx$$

f est l'application f_n étudiée ci-dessus (§ 1.4.);

— ou bien $f(1_r)$ n'appartient pas à $\mathbb{Z}_r$; il existe alors un naturel strictement positif n tel que $f(1_r) = n_v$, et on démontre, comme dans le cas précédent, que

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \quad f(x) = \text{opp } (nx)$$

Réciproquement, l'application f qui à tout x associe $\text{opp } (nx)$ est bien un endomorphisme du groupe additif $\mathbb{Z}$: c'est la composée des endomorphismes f_n et

$$x \mapsto \text{opp } x.$$

Nous noterons cette application f'_n .

Il y a donc deux sortes d'endomorphismes de $(\mathbb{Z}, +)$:

— les *endomorphismes croissants* f_n (qui « conservent la couleur ») ;

— les endomorphismes décroissants f'_n (qui « changent la couleur »).

L'endomorphisme nul f_0 , qui est une application constante, doit être considéré comme appartenant aux deux classes.

Addition des endomorphismes

D'une façon générale, si f et g sont des endomorphismes d'un groupe abélien G , l'application $f+g$ définie par

$$x \mapsto f(x) + g(x)$$

est encore un endomorphisme de G .

Dans le cas où G est le groupe $(\mathbb{Z}, +)$, on constate facilement que l'addition des endomorphismes s'effectue selon les règles suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \begin{aligned} f_n + f_m &= f_{n+m} \\ f'_n + f'_m &= f'_{n+m} \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall m \geq n, \quad \begin{aligned} f_n + f'_m &= f'_{m-n} \\ f'_n + f_m &= f_{m-n} \end{aligned}$$

Ces règles opératoires sont analogues à celles qui permettent de calculer la somme de deux éléments de $\mathbb{Z}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \begin{aligned} n_r + m_r &= (n+m)_r \\ n_v + m_v &= (n+m)_v \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall m \geq n, \quad \begin{aligned} n_r + m_v &= (m-n)_v \\ n_v + m_r &= (m-n)_r \end{aligned}$$

Cela signifie que la bijection de $\mathbb{Z}$ sur l'ensemble $\mathcal{E}$ des endomorphismes de $(\mathbb{Z}, +)$ définie par :

$$(1) \quad \begin{cases} n_r \mapsto f_n \\ n_v \mapsto f'_n \\ 0_z \mapsto f_0 \end{cases}$$

est un isomorphisme de groupes. Il en est de même, bien entendu, pour la bijection déduite de la précédente en échangeant les rôles des indices r et v .

Composition des endomorphismes

Le composé $g \circ f$ de deux endomorphismes f et g d'un groupe G est encore un endomorphisme de G . Dans le cas du groupe $(\mathbb{Z}, +)$, les endomorphismes se composent de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad f_n \circ f_m &= f'_n \circ f'_m = f_{nm} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad f_n \circ f'_m &= f'_n \circ f_m = f'_{nm} \end{aligned}$$

La bijection définie par (1) est donc un isomorphisme de l'anneau $(\mathbb{Z}, +, \top)$ défini au paragraphe 1.2. sur l'ensemble $\mathcal{E}$ muni de l'addition et de la composition des endomorphismes.

On peut donc identifier l'ensemble $\mathcal{E}$ des endomorphismes du groupe additif $\mathbb{Z}$, muni de ces deux lois, à l'anneau $\mathbb{Z}$. Cette identification ne peut se faire que d'une seule façon : les éléments positifs de $\mathcal{E}$ sont les endomorphismes croissants.

Nous rencontrons ainsi pour la première fois un ensemble d'objets :

$$\mathcal{E} = \{ \dots f'_2, f'_1, f_0, f_1, f_2, \dots \}$$

en correspondance bijective avec $\mathbb{Z}$, la bijection ne pouvant s'effectuer que d'une seule façon si on veut qu'à l'addition et à la multiplication dans l'anneau $\mathbb{Z}$ correspondent l'addition et la composition des endomorphismes.

Malheureusement, ces objets sont des êtres mathématiques au nom barbare et peu élémentaires du point de vue conceptuel. Songeons par exemple que l'égalité de deux éléments de $\mathcal{E}$ ($f = g$) signifie que, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $f(x) = g(x)$!

Remarque sur la terminologie.

Il faut éviter de confondre les endomorphismes du groupe additif $\mathbb{Z}$ et les endomorphismes de l'anneau $(\mathbb{Z}, +, \times)$. Dans l'ensemble $\mathcal{E}$ des endomorphismes de $(\mathbb{Z}, +)$, seuls f_0 (application constante $x \mapsto 0$) et f_1 (application identique de $\mathbb{Z}$) sont des endomorphismes pour la structure d'anneau. L'expression « endomorphismes de $\mathbb{Z}$ » (sans préciser la structure) est donc à proscrire.

On pourrait remédier à cet inconvénient en appelant les éléments de $\mathcal{E}$ les *homothéties* de $\mathbb{Z}$. Par exemple, f_n est l'homothétie de rapport n , f'_n l'homothétie de rapport (opp n). Mais c'est au titre d'endomorphismes de $(\mathbb{Z}, +)$ et non au titre d'homothéties (dans l'anneau $\mathbb{Z}$ ou dans le $\mathbb{Z}$ -module $\mathbb{Z}$) que les éléments de $\mathcal{E}$ interviennent dans cette étude.

De toute façon, les élèves de Cinquième n'ayant pas la notion générale d'endomorphisme ni celle d'homothétie, si les éléments de $\mathcal{E}$ interviennent dans un jeu, il sera préférable de leur donner un nom qui n'a pas de sens mathématique précis (machines, opérations, etc...).

Anneau des endomorphismes d'un groupe abélien quelconque $(G, +)$.

On démontre que, pour tout groupe abélien $(G, +)$, l'ensemble (noté $\text{End } G$) des endomorphismes de G est un anneau pour l'addition et pour la composition des endomorphismes. Mais, en général, le groupe $(\text{End } G, +)$ n'est pas isomorphe au groupe $(G, +)$. On peut s'en rendre compte, par exemple, en étudiant l'anneau des endomorphismes du groupe de Klein.

La possibilité de définir une structure d'anneau sur $(\mathbb{Z}, +)$ en identifiant $\mathbb{Z}$ à l'ensemble de ses endomorphismes (de groupe) n'est donc pas généralisable à n'importe quel groupe abélien. Elle est due à la propriété tout à fait remarquable suivante :

$$(\text{End } \mathbb{Z}, +) \text{ est isomorphe à } (\mathbb{Z}, +)$$

$\mathbb{Z}$ n'est pas le seul groupe qui possède cette propriété : elle vaut aussi pour le groupe additif des réels, des rationnels, des décimaux, des classes d'entiers modulo p .

2. Recherche de situations conduisant à la multiplication des entiers.

Ce problème pédagogique n'est pas particulier à $\mathbb{Z}$. Il se pose aussi pour la multiplication des décimaux (D), des rationnels ($\mathbb{Q}$), des réels ($\mathbb{R}$), et même déjà pour la multiplication dans D^+ , dans $\mathbb{Q}^+$ ou dans $\mathbb{R}^+$. Le cas de $\mathbb{N}$ est favorisé, la multiplication des naturels pouvant s'interpréter comme une multiplication de cardinaux.

2. 1. Multiplication externe.

Que le lecteur m'autorise à user, pendant quelques lignes, d'un langage qui n'est pas celui des mathématiciens ! Les exemples concrets de multiplications (dans $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$, etc...) consistent à multiplier des grandeurs de deux espèces différentes, les produits étant des grandeurs d'une troisième espèce (deux de ces espèces pouvant d'ailleurs être les mêmes). Par exemple,

longueur $\times$ longueur = aire

vitesse $\times$ durée = longueur, etc...

Pour le mathématicien, il n'y a dans ces exemples que des multiplications de nombres :

$$\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ etc...}$$

Mais, si on part d'une situation concrète, on considère trois ensembles d'objets E_1 , E_2 , E_3 en correspondance bijective avec $\mathbb{R}$ (ou avec $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}^+$, etc...) ; à l'addition dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}^+$, etc...) correspondent des lois internes dans E_1 , E_2 , E_3 qui ont une signification concrète ; à la multiplication dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}^+$, etc...) correspond une application

$$E_1 \times E_2 \rightarrow E_3$$

qui a une signification concrète.

Dans le cas de $\mathbb{Z}$, la difficulté provient du fait que les bijections de E_1 , E_2 , E_3 sur $\mathbb{Z}$ qui respectent l'addition ne sont pas uniques : on peut les composer avec l'automorphisme de $(\mathbb{Z}, +)$:

$$x \mapsto \text{opp } x.$$

Supposons que, ces trois bijections étant choisies, l'opération concrète $E_1 \times E_2 \rightarrow E_3$ corresponde à la multiplication dans $\mathbb{Z}$ notée ci-dessus (§ 1.2.) par le signe $\top$. Si on change l'une de ces bijections, ou si on les change toutes les trois, cette opération correspondra à la loi notée $\perp$.

Un tel exemple illustre donc mal la structure d'anneau de $\mathbb{Z}$: les deux lois $\top$ et $\perp$ jouent le même rôle, il n'y a pas dans $\mathbb{Z}$ d'éléments positifs, aucune partie de $\mathbb{Z}$ ne peut être canoniquement identifiée à $\mathbb{N}$.

Exemple. On distribue aux élèves des jetons rouges ou verts (ainsi qu'un jeton « zéro ») : ... 2_v , 1_v , 0_{rv} , 1_r , 2_r ...

Chaque élève joue avec des jetons tous de la même espèce (p. ex. des jetons 6_v) au jeu décrit dans l'article mentionné ci-dessus (*Bulletin* 259, p. 355). Ce jeu consiste à jeter les jetons sur une table comportant une partie gagnante G et une partie perdante P. Si 5 jetons tombent dans G, 2 dans P, l'élève obtient le « score » (5, 2) ; la classe du couple (5, 2) se note 3_g (3 points gagnants) ; si 2 jetons tombent dans G, 4 dans P, le score est (2, 4) et la classe de (2, 4) se note 2_p , etc... On convient qu'avec les jetons rouges, les scores gagnants font gagner de l'argent, les scores perdants en font perdre, et qu'avec les jetons verts c'est le contraire. Cela donne lieu à des multiplications telles que :

$$6_v \times 3_g = 18_d \quad (18 \text{ centimes déboursés})$$

$$5_r \times 2_g = 10_r \quad (10 \text{ centimes reçus})$$

etc...

Dans cette situation, on a trois ensembles distincts :

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}_{rv} &= \{ \dots 2_v ; 1_v ; 0_{rv} ; 1_r ; 2_r \dots \} \\ \mathbb{Z}_{gp} &= \{ \dots 2_p ; 1_p ; 0_{gp} ; 1_g ; 2_g \dots \} \\ \mathbb{Z}_{r'd} &= \{ \dots 2_d ; 1_d ; 0_{r'd} ; 1_{r'} ; 2_{r'} \dots \}\end{aligned}$$

et une application de $\mathbb{Z}_{rv} \times \mathbb{Z}_{gp}$ dans $\mathbb{Z}_{r'd}$.

Des artifices permettent de réduire ces trois ensembles à deux ou à un. Par exemple, au lieu de solder les résultats par un gain ou une perte de monnaie, on peut convenir que le joueur reçoit ou donne des jetons rouges ou verts (en convenant d'identifier 18_d à 18_v , $10_{r'}$ à 10_r , et en convenant que donner 18_r équivaut à recevoir 18_p) ; on a alors une application de $\mathbb{Z}_{rv} \times \mathbb{Z}_{gp}$ dans $\mathbb{Z}_{rv}$. On peut aussi décider qu'un jeton 6_p équivaut à 6 points perdants, un jeton 5_r à 5 points gagnants, et on obtient une loi interne :

$$\mathbb{Z}_{gp} \times \mathbb{Z}_{gp} \rightarrow \mathbb{Z}_{gp}.$$

Mais ces conventions ne s'imposent pas ; les conventions contraires (rouge correspondant à perdant, vert à gagnant) sont tout aussi justifiées. En somme, un tel exemple ne fait pas apparaître la multiplication comme loi interne dans $\mathbb{Z}$.

Dans le cas de $\mathbb{R}$ (ou de $\mathbb{D}$, ou de $\mathbb{Q}$), la situation se complique encore par l'arbitraire que comporte le choix d'une unité. En effet, contrairement à $(\mathbb{Z}, +)$ qui n'admet qu'un seul automorphisme (autre que l'identité).

$$x \mapsto \text{opp } x,$$

$(\mathbb{R}, +)$ en admet une infinité :

$$x \mapsto ax \quad (a \in \mathbb{R}^*)$$

S'il existe une bijection f d'un ensemble E (p. ex. l'ensemble des points d'une droite) sur $\mathbb{R}$, et si on connaît une loi interne dans E ayant une signification concrète et correspondant, par f , à l'addition des réels, toutes les bijections obtenues en composant f avec les automorphismes $x \mapsto ax$ de $(\mathbb{R}, +)$ possèdent la même propriété.

Composer f avec $x \mapsto ax$ revient à faire un changement d'unité (et aussi, si $a < 0$, un changement d'orientation).

Ainsi, si on veut illustrer la multiplication des réels par la relation entre l'espace parcouru x , la vitesse v , et la durée du parcours t , si on oriente arbitrairement les axes des abscisses, des vitesses et des temps, et si on choisit arbitrairement une unité sur chacun d'eux, on obtient une relation du type

$$x = kvt$$

où k est un réel non nul fixe.

Le physicien choisit des orientations concordantes et des systèmes d'unités cohérents, de façon que $k = 1$. Mais cela présuppose la connaissance de la multiplication dans $\mathbb{R}$. Ce n'est pas une introduction à la multiplication des réels.

2. 2. Multiplication interne.

Les seules situations concrètes pouvant servir à introduire la multiplication dans $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ etc... sont celles où (si on veut bien me permettre, encore un instant, ce langage non mathématique) on multiplie des grandeurs de même espèce pour obtenir une grandeur de même espèce :

$$E \times E \rightarrow E$$

En physique, cela ne se produit que lorsqu'on multiplie des nombres abstraits (des nombres « sans dimension »). Essayons de traduire cela en langage mathématique :

Un « nombre abstrait » est le rapport de deux grandeurs de même espèce. On a donc un ensemble F de « grandeurs », un ensemble de nombres ($\mathbb{R}$ p. ex.) et une loi externe dans F dont les opérateurs sont les éléments de $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R} \times F \rightarrow F \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda x$$

Le « rapport de deux grandeurs x et y de F » est le réel λ tel que $y = \lambda x$.

Le « nombre abstrait » du physicien est un opérateur d'homothétie dans F :

$$f_\lambda : x \mapsto \lambda x$$

et, au produit de deux nombres λ, λ' correspond la composée des homothéties $f_\lambda \circ f_{\lambda'}$.

Donc les seules situations concrètes conduisant à la multiplication interne dans $\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, etc...) sont celles où les éléments de $\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, etc...) opèrent dans un ensemble F . Il faut supposer que F est muni d'une addition (pour pouvoir définir la somme de deux homothéties), qu'à la somme de deux nombres correspond la somme des homothéties :

$$f_{\lambda+\lambda'} = f_\lambda + f_{\lambda'}$$

et qu'au produit de deux nombres correspond la composée :

$$f_{\lambda\lambda'} = f_\lambda \circ f_{\lambda'}$$

Enfin, si on veut que la composée des homothéties f_λ et $f_{\lambda'}$ définisse sans ambiguïté le produit $\lambda\lambda'$, il faut exiger que :

$$f_{\lambda_1} = f_{\lambda_2} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

S'il s'agit d'introduire $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$, toutes ces conditions sont réalisées quand on prend pour F un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ (resp. sur $\mathbb{R}$). Les situations les mieux adaptées à l'introduction de la multiplication des rationnels et des réels, sont :

- les rationnels opérant dans $\mathbb{Q}$ lui-même (ou, pour des raisons pédagogiques, les rationnels positifs définissant des opérations non partout définies dans $\mathbb{N}$),
- les réels définissant des homothéties sur la droite ou dans le plan,
- les réels positifs considérés comme des taux opérant par exemple dans un ensemble de sommes d'argent (problèmes d'intérêts composés avec taux variable) ou dans un ensemble de marchandises (rapport des productions annuelles d'une certaine denrée), etc...

S'il s'agit d'introduire $\mathbb{Z}$, toutes ces conditions sont réalisées quand on prend pour F un groupe abélien dans lequel $\mathbb{Z}$ opère fidèlement (ou, comme on dit aussi, un $\mathbb{Z}$ -module fidèle). Rappelons que, dans tout groupe abélien $(F, +)$, on définit une loi externe dont les opérateurs sont les éléments de $\mathbb{Z}$:

$$n \in \mathbb{Z}, \quad x \in F, \quad (n, x) \mapsto nx$$

et que cette loi vérifie les axiomes de module :

$$n(x+y) = nx+ny, \quad (n+m)x = nx+mx, \quad n(mx) = (nm)x.$$

On dit que $\mathbb{Z}$ opère fidèlement dans F si

$$[\forall x, nx = mx] \Rightarrow n = m$$

C'est cette dernière propriété qui assure que la correspondance entre les éléments de $\mathbb{Z}$ et les homothéties qu'ils définissent est bijective.

On est donc amené, pour introduire la multiplication dans $\mathbb{Z}$

— soit à faire opérer $\mathbb{Z}$ dans lui-même. Les homothéties sont alors les endomorphismes de $(\mathbb{Z}, +)$ étudiés au § 1.5. L'inconvénient de cette méthode est la présence simultanée de deux ensembles $\mathbb{Z}$ structurés de façon différente et qu'on ne peut pas identifier canoniquement.

— soit, pour remédier à cet inconvénient, à faire opérer $\mathbb{Z}$ dans un autre groupe abélien dans lequel il opère fidèlement, par exemple le groupe $(D, +)$ des décimaux relatifs, le groupe $(\mathbb{Z}^2, +)$ des couples d'entiers, le plan $(\mathbb{R}^2, +)$, etc..., mais non le groupe des classes d'entiers modulo p dans lequel $\mathbb{Z}$ n'opère pas fidèlement.

3. Quelques propositions pour la classe de Cinquième.

3. 1. Le groupe ordonné $(\mathbb{Z}, +, \alpha)$.

Les élèves de Cinquième ne peuvent prendre conscience de la structure, assez complexe, constituée par $(\mathbb{Z}, +, \times)$ opérant dans $(\mathbb{Z}, +)$ que si, au cours d'une révision du programme de Sixième, on les a habitués à manier différents ensembles isomorphes à $(\mathbb{Z}, +)$ notés de façons différentes :

- ensemble des nombres gagnants ou perdants,
- ensemble des nombres rouges ou verts, etc...,

et si aucun choix prématuré n'a été fait entre les deux relations d'ordre α, ν , donc aucune identification entre $\mathbb{N}$ et une partie de $\mathbb{Z}$.

On peut imaginer deux jeux tels que le suivant (ce jeu sera repris ensuite pour introduire la multiplication : § 3.3).

Au pays des monnaies rouges et vertes.

Dans un pays imaginaire, on utilise des pièces de monnaie, soit rouges, soit vertes, sur chacune desquelles est inscrit un naturel (sa valeur absolue) ; les pièces marquées 0 sont en partie rouges, en partie vertes. La « valeur » d'une pièce est un entier : $2_r, 5_v, 0_{rv}$, etc...

On distribue de telles pièces aux élèves, et chacun calcule sa « fortune » (la somme des « valeurs » des pièces qu'il possède). Puis on joue « au marchand » : un objet coûte 18_r ; on peut le payer avec une pièce de 20_r et une pièce de 2_v , etc...

Chez un certain marchand, tous les objets ont pour valeur un nombre rouge : les clients les plus riches sont ceux dont la fortune est « la plus rouge » ou la « moins verte ». Chez un autre marchand, tous les objets ont pour valeur un nombre vert : la notion de richesse est inversée.

Ainsi, aucun des ensembles $\mathbb{Z}_r, \mathbb{Z}_v$, n'est privilégié, les deux relations d'ordre jouent le même rôle.

Remarque sur les relations d'ordre.

Il vaut mieux éviter, pour l'instant les notations $\leq, \geq$ qui supposent un choix d'entiers « positifs ». Il n'est peut-être pas nécessaire d'introduire d'autres symboles tels que $\alpha, \approx$. On peut, à propos de chaque exemple, trouver des locutions telles que « a au moins autant de chance que », « est au moins aussi rouge que ». Ce qui importe c'est que, quelle que soit la notation adoptée, les élèves aient — au niveau de la Cinquième — une définition précise de l'ordre :

$$x \alpha y \text{ signifie : } y + \text{opp } x \in \mathbb{Z}_r$$

et que leur attention soit attirée sur l'unique propriété qui relie l'ordre à l'addition :

$$x \alpha y \Rightarrow (x+z) \alpha (y+z)$$

Multiplication d'un entier par un naturel.

C'est dans le cadre de la révision de $(\mathbb{Z}, +, \leq)$ au début de la classe de Cinquième que s'introduit cette multiplication externe (définie comme somme répétée).

On peut faire remarquer que, si M est la « machine à multiplier par n », si on fait entrer dans la machine deux entiers, puis leur somme, il en sortira deux entiers puis leur somme. On peut aussi composer les machines, les additionner, comme nous le verrons ci-dessous (§ 3.2.) dans un cas plus général.

En somme, l'étude de la multiplication externe

$$\mathbb{N} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

est une première initiation à l'étude des endomorphismes de $(\mathbb{Z}, +)$.

3. 2. Étude systématique des endomorphismes de $(\mathbb{Z}, +)$.

L'étude de l'anneau $\mathbb{Z}$ ne devant intervenir que vers la fin de la classe de Cinquième, on peut espérer qu'à ce moment les élèves seront suffisamment familiarisés avec la notion d'application pour comprendre la signification de phrases telles que « quels que soient les entiers $x, y, f(x+y) = f(x) + f(y)$ ».

Néanmoins, au niveau de la Cinquième, une telle phrase ne peut être considérée que comme le résultat d'un exercice de style ; pour l'approche intuitive de la structure d'anneau de $\mathbb{Z}$, les « petites machines » seront sans doute plus efficaces.

On connaît des machines qui transforment les sommes en sommes (les machines à multiplier par un naturel). Peut-on en construire d'autres ?

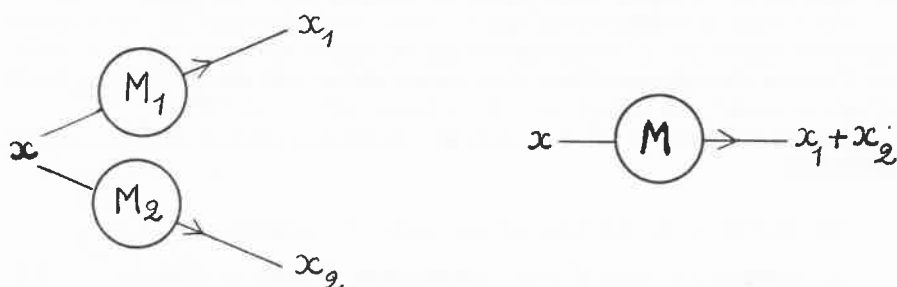
Supposons qu'une machine M transforme 1_r en 3_r . Qu'obtient-on si on fait entrer dans cette machine $2_r, 3_r, 0_r, 2_r, \dots$?

Existe-t-il une telle machine transformant 2_r en 3_r ?

Différents exercices de ce genre montrent qu'une machine est entièrement déterminée quand on connaît l'image de 1_r (ou de 1_p) et que cette image peut être un entier choisi arbitrairement. On peut alors noter les machines de la façon suivante :

$$1_r \longrightarrow \textcircled{3^+} \longrightarrow 3_r \qquad 1_r \longrightarrow \textcircled{2^-} \longrightarrow 2_p$$

On définit la somme M de deux machines M_1 et M_2 :



On vérifie que M est encore une machine qui conserve l'addition. On cherche une règle permettant de trouver la somme de deux machines, et on constate que cette règle est analogue à celle qui donne la somme de deux entiers : l'égalité

$$(3^+) + (2^-) = (1^+)$$

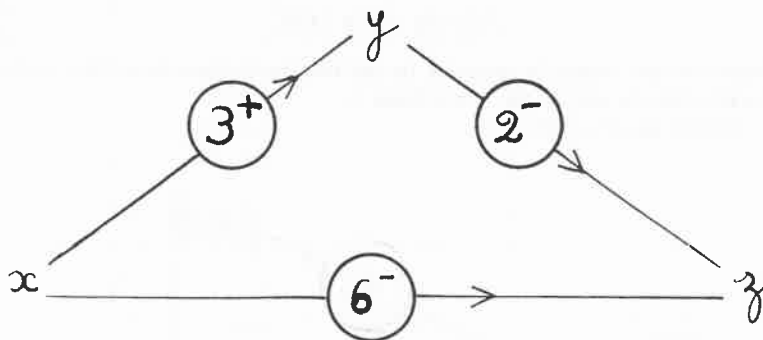
correspond à :

$$3_r + 2_v = 1_r \quad (\text{ou à } 3_v + 2_r = 1_v)$$

On introduit ainsi un nouvel ensemble $\mathbb{Z}$ dont les éléments se notent

$$\dots, 2^-, 1^-, 0^+, 1^+, 2^+, \dots$$

Ensuite, on étudie la composition des machines (trouver une machine M qui, à elle seule, travaille de la même façon que deux machines M_1, M_2 opérant successivement) et on est conduit à la définition de la multiplication dans le nouvel ensemble $\mathbb{Z}$ qu'on vient de construire :



6^- est, par définition le produit $3^+ \times 2^-$ (ou, si on préfère : $2^- \times 3^+$; les deux conventions sont valables, mais il faut en adopter une).

Il est alors facile d'obtenir les règles usuelles permettant de calculer le produit de deux entiers. Ces règles peuvent désormais servir de définition, et permettent de faire des démonstrations indépendantes des machines (c'est-à-dire indépendantes du fait que les éléments de $\mathbb{Z}$ sont interprétés comme définissant des endomorphismes de $(\mathbb{Z}, +)$).

Pour l'associativité de la multiplication, c'est évidemment l'interprétation par les machines qui s'impose (associativité de la composition des applications).

Par contre, la commutativité (qui se déduit immédiatement des règles opératoires) ne résulte pas de l'interprétation par les endomorphismes : il peut arriver que l'anneau des endomorphismes d'un groupe abélien soit non commutatif ; c'est ce qui se produit par exemple pour les groupes $(\mathbb{Z}^2, +)$ et $(\mathbb{R}^2, +)$.

L'étude du rôle de 0^{+-} et de 1^+ dans la multiplication ne pose pas de problèmes particuliers.

Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

La multiplication dans $\mathbb{Z}$ étant commutative, il suffit de démontrer, soit la distributivité à gauche, soit la distributivité à droite.

Nous donnerons quand même les deux démonstrations, car elles sont de nature différente et toutes deux intéressantes. Nous commencerons par la démonstration « sérieuse », peut-être trop sérieuse pour les élèves de Cinquième.

1) Soient f, g, h trois endomorphismes de $(\mathbb{Z}, +)$. Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, l'image de x par $(f+g) \circ h$ est, d'après la définition-même de la somme de deux endomorphismes :

$$f(h(x)) + g(h(x)).$$

C'est aussi l'image de x par $(f \circ h + g \circ h)$. Donc,

$$(f+g) \circ h = f \circ h + g \circ h.$$

2) L'image de x par $f \circ (g+h)$ est $f(g(x) + h(x))$, c'est-à-dire, puisque f est un endomorphisme :

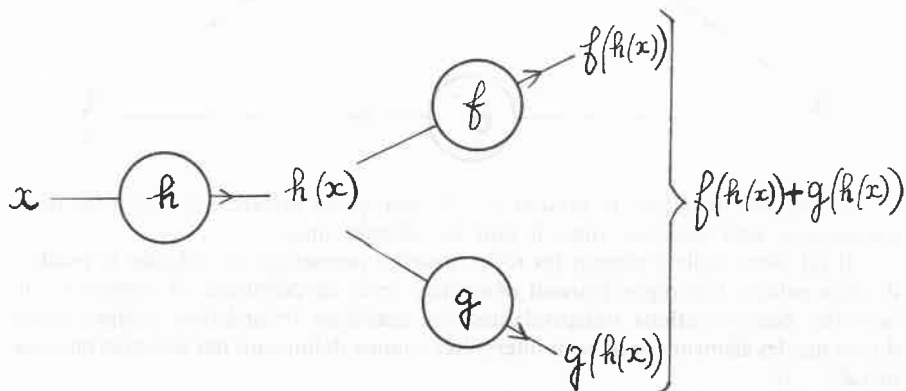
$$f(g(x)) + f(h(x)).$$

C'est aussi l'image de x par $(f \circ g + f \circ h)$. Donc,

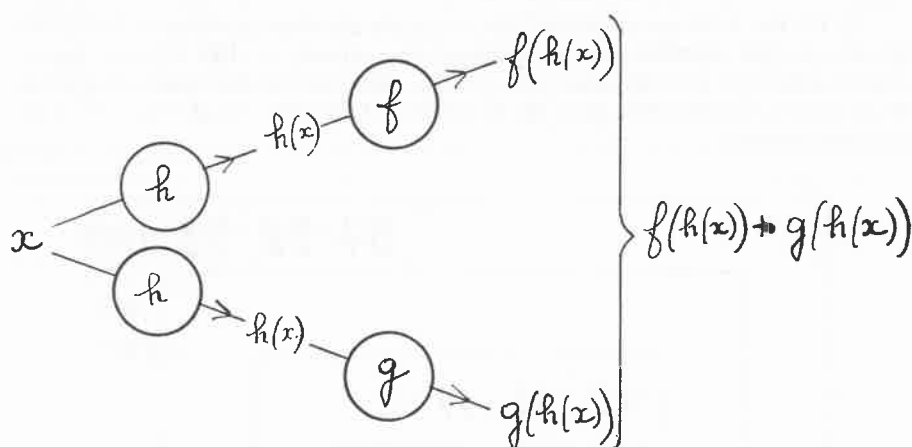
$$f \circ (g+h) = f \circ g + f \circ h.$$

Voyons ce que donne la première de ces démonstrations dans l'illustration des endomorphismes au moyen de « machines » :

— schéma de $(f+g) \circ h$:



— schéma de $f \circ h + g \circ h$:



On peut commencer par effectuer ces schémas sur des exemples numériques, constater que, dans ces exemples, les deux « montages » conduisent au même résultat, puis essayer de voir pourquoi cette propriété est générale.

3. 3. Jeux où interviennent les endomorphismes de $(\mathbb{Z}, +)$.

1) Au pays des monnaies rouges et vertes (§ 3.1.), un « banquier » effectue l'opération suivante : à chaque instant, un « cours » est fixé (le cours est un élément de $\mathbb{Z}$ noté 1^- , 2^+ , etc...); supposons par exemple que le cours soit 5^+ ; si un client donne au banquier une pièce x , le banquier lui rend 5 pièces analogues à x . Si le cours est 5^- , le banquier lui rend 5 pièces de même valeur absolue que x , mais de couleur différente :

Cours 5^+ :

$$\begin{aligned} 1_r &\mapsto 5_r \\ 2_v &\mapsto 10_v \\ 0_{rv} &\mapsto 0_{rv} \end{aligned}$$

Cours 5^- :

$$\begin{aligned} 1_r &\mapsto 5_v \\ 2_v &\mapsto 10_r \\ 0_{rv} &\mapsto 0_{rv} \end{aligned}$$

Cette situation est exactement la même que celle des machines du paragraphe 3.2. : peut-être que, présentée sous cette forme, elle accrochera mieux les élèves, car ici ce sont les élèves eux-mêmes qui jouent :

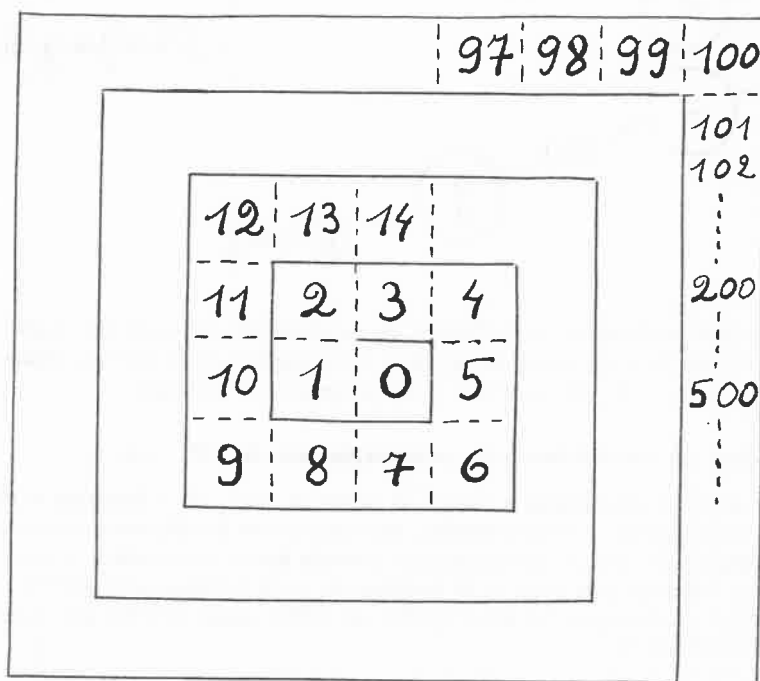
Jean joue le rôle du banquier, mais ne veut pas dévoiler le cours ; Pierre donne à Jean une pièce x , Jean lui rend une pièce y . Pierre peut-il en déduire le cours ?

Pour l'addition, on peut imaginer que deux banquiers opèrent dans une même banque et additionnent leurs résultats ; pour la multiplication, le client passe successivement dans deux banques.

Remarque. Une variante de ce jeu consiste à utiliser des pièces de monnaie dont la valeur absolue est un décimal ; le cours est toujours un entier. Les éléments de $\mathbb{Z}$ apparaissent ainsi comme définissant des homothéties dans D . Cet exemple présente

l'intérêt d'écarter tout risque de confusion entre l'ensemble des opérateurs et l'ensemble des éléments sur lesquels ils opèrent.

2) Un jeu, analogue au jeu de l'oie, comporte des cases numérotées de 0 à 100 (p. ex.) et une dernière case représentant les naturels > 100 . Chaque joueur dispose d'un pion dont les deux faces peuvent facilement se distinguer (un endroit et un envers). On joue avec deux dés de couleurs différentes : un dé blanc et un dé noir par exemple.



Si un joueur obtient 5 avec le dé blanc et 2 avec le dé noir (ou 6 avec le blanc, 3 avec le noir ; ou 4 avec le blanc, 1 avec le noir) ; il effectue l'opération (3^+) qui consiste à faire passer son pion, *sans le retourner*, de la case numérotée par le naturel n à la case numérotée par le naturel $3n$.

Si un joueur obtient (2, 5) (ou (3, 6), ou (1, 4)), il effectue l'opération (3^-) qui consiste à faire passer son pion de la case n à la case $3n$, *et à retourner ce pion*.

En somme, les éléments de $\mathbb{Z}$ opèrent ici dans l'ensemble $\mathbb{Z}' = \{ \dots (2, \text{envers}), (1, \text{envers}), 0, (1, \text{endroit}), (2, \text{endroit}), \dots \}$ de la façon suivante :

(3^+)

1, endroit $\mapsto$ 3, endroit
2, envers $\mapsto$ 6, envers
0 $\mapsto$ 0

(3^-)

1, endroit $\mapsto$ 3, envers
2, envers $\mapsto$ 6, endroit
0 $\mapsto$ 0

Au début du jeu, tous les pions sont à l'endroit dans la case 1. Le gagnant est le premier qui arrive à mettre son pion à l'endroit dans la case des nombres > 100 .

La case 0 est « la prison ». On ne peut en sortir que quand on est délivré par un autre joueur (dans ce cas, on recommence en mettant son pion à l'endroit dans la case 1).

On peut introduire la multiplication et l'addition en compliquant un peu la règle du jeu : dans certains cas, un joueur joue deux fois de suite (multiplication) ; dans d'autres cas, il joue avec deux paires de dés et additionne les résultats.

3. 4. Identification de $\mathbb{Z}^+$ à $\mathbb{N}$.

Évariste a effectué des additions et des multiplications de nombres, puis il a remplacé les nombres par des petits dessins. Il n'a pas dit si ces nombres étaient des entiers ou des naturels. Il a dit uniquement ceci :

— quand un même dessin figure plusieurs fois, il représente toujours le même nombre

— Δ et $\square$ représentent des nombres différents.

Exercice : retrouver les calculs effectués par Évariste :

a) en supposant que les dessins représentent des naturels;

b) en supposant que les dessins représentent des entiers.

$$\begin{array}{lll} \square + \square = \square & \square + \Delta = \Delta & \Delta \times \square = \square \\ \Delta \times \Delta = \Delta & \Delta + \Delta = \bigcirc & \Delta + \bigcirc = \diamond, \text{ etc...} \end{array}$$

La comparaison des résultats des questions a) et b) montre qu'il n'y a qu'une bijection de $\mathbb{N}$ sur une partie de $\mathbb{Z}$ qui soit susceptible de respecter à la fois l'addition et la multiplication.

C'est :

$$\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}^+$$

définie par $\varphi(n) = n^+$, $\varphi(0) = 0^+$.

Réciproquement, quels que soient les naturels n, m ,

$$\varphi(n+m) = \varphi(n) + \varphi(m) \text{ et } \varphi(nm) = \varphi(n) \varphi(m).$$

Dans toutes les questions où $\mathbb{Z}$ intervient par sa structure d'anneau, on pourra désormais identifier $\mathbb{Z}^+$ à $\mathbb{N}$ au moyen de la bijection φ .

L'une des deux relations d'ordre dans $\mathbb{Z}$ est maintenant privilégiée : c'est celle qui prolonge la relation d'ordre notée $\leq$ dans $\mathbb{N}$. On la notera par le même signe. Elle est définie par :

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{Z}^+$$

Les éléments de $\mathbb{Z}^+$ sont les $x \in \mathbb{Z}$ tels que $0 \leq x$. On les appelle les *entiers positifs*.

Toutes les propriétés de $\mathbb{Z}$ faisant intervenir à la fois la multiplication et l'ordre sont des conséquences de la suivante :

$\mathbb{Z}^+$ est stable pour la multiplication. On utilise souvent un corollaire de cette propriété :

$$x \leq y \text{ et } 0 \leq z \Rightarrow xz \leq yz$$

Remarque. L'identification de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{Z}^+$ justifie les notations employées pour la multiplication externe $\mathbb{N} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ et pour la multiplication interne $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$:

nx et n^+x représentent le même élément de $\mathbb{Z}$.

3. 5. Les notations usuelles.

Il ne semble pas indispensable d'introduire en Cinquième les notations usuelles (+5, -5, etc...) qui sont une source de confusion.

Le signe — de la soustraction peut toutefois être introduit (mais le plus tard possible) pour deux raisons :

a) $(x, y) \mapsto x + \text{opp } y$ est une loi de composition interne (partout définie) dans $\mathbb{Z}$. Il est naturel de représenter cette loi par un signe particulier :

$$(x, y) \mapsto x - y$$

et d'en étudier les propriétés. C'est un exemple simple de loi non commutative, non associative, admettant un élément neutre à droite et non à gauche.

b) la soustraction dans $\mathbb{Z}$ prolonge la soustraction dans $\mathbb{N}$, déjà connue des élèves. Il est naturel de la noter par le même signe.

Mais une introduction prématurée des notations -5, +5... qui ne peuvent s'expliquer que par omission du zéro (-5 signifie 0-5, +5 signifie 0+5) risque de donner aux élèves la mauvaise habitude de ne pas tenir compte du zéro, au lieu d'attirer leur attention sur l'importance des éléments neutres.

La notation $-x$, au lieu de $\text{opp } x$, présente le même danger.

4. Les démarches successives dans l'initiation à $\mathbb{Z}$ et à D .

Les remarques qui suivent valent aussi bien pour l'anneau des entiers que pour l'anneau des décimaux qui peut être introduit par des méthodes analogues aux précédentes.

On peut distinguer trois phases dans l'initiation à ces anneaux de nombres.

4. 1. Construction d'un anneau à partir de situations concrètes.

C'est la phase décrite dans le paragraphe précédent (§ 3.2 et 3.3). Pour les élèves arrivés à ce point de l'initiation un entier représente un endomorphisme (appelé — selon le jeu choisi — machine, opération bancaire, opération au jeu de l'oie).

En somme, un entier (positif ou négatif) est une étiquette servant à désigner une application d'un autre ensemble (l'ensemble des nombres rouges ou verts p. ex.) dans lui-même (2).

4. 2. Étude abstraite d'un anneau.

Dans cette seconde phase, un entier est un élément abstrait noté :

$$\dots 2^-, 1^-, 0, 1^+, 2^+ \text{ (ou } 1), 2^+ \text{ (ou } 2), \dots$$

(2) En donnant la priorité à l'aspect « opérateurs » des entiers, ne prépare-t-on pas déjà les élèves à mettre l'accent sur les applications linéaires plutôt que sur l'algèbre des matrices?

Les lois de composition et la relation d'ordre sont définies indépendamment de l'interprétation de ces éléments comme endomorphismes :

$$a^+ + b^+ = (a + b)^+ ; \text{ si } a < b, a^+ + b^- = (a - b)^+, \text{ etc...}$$

$$a^+ b^+ = a^- b^- = (ab)^+ ; \text{ etc...}$$

$$x \leq y \Rightarrow y + \text{opp } x \in \mathbb{Z}^+.$$

Des exercices ne faisant pas appel au concret permettent d'approfondir l'étude de la structure de $\mathbb{Z}$: calculs numériques, vérification de nouvelles propriétés des lois de composition (associativité généralisée, produit d'une somme par une somme, etc...), résolutions d'équations simples dans $\mathbb{Z}$.

4. 3. Application à de nouvelles situations concrètes.

Dans cette troisième phase, la structure abstraite $(\mathbb{Z}, +, \times)$ ou $(D, +, \times)$ étudiée en 4.2. servira de modèle pour la résolution de nouveaux problèmes concrets.

Dans la plupart des cas, il s'agira de multiplication externe (§ 2.1.) et le problème concret ne se traduira dans le langage des entiers (ou des décimaux) que moyennant un choix convenable des orientations (et des unités).

Le jeu mentionné au paragraphe 2.1. (jeu des jetons verts ou rouges) fournit un exemple d'utilisation de $\mathbb{Z}$. Les exercices classiques sur les espaces parcourus, les vitesses et les durées fournissent des exemples d'utilisation des décimaux.

E. D.

Chantiers de pédagogie mathématique

Cahiers pour la formation permanente

Une nouvelle publication de la Régionale Parisienne
de l'A.P.M.E.P. : voir p. 572 les conditions d'abonnement