

« ...car vous aurez beau faire, c'est toujours avec le même élément de base qu'il vous faudra reconstruire. »

Roger Martin du Gard.

Les relations

Maurice GLAYMANN.

Faculté des Sciences. Lyon.

Je me propose de présenter dans cet article, le chapitre du nouveau programme de la classe de Sixième concernant les relations.

Je ferai état ici du travail de recherche entrepris par l'Équipe Lyonnaise dans 40 classes durant l'année 1967-1968.

Le concept de relation est un des plus importants de la mathématique ; c'est la clé de voûte de la plupart des grandes notions modernes. L'expérience a montré qu'au niveau de la classe de Sixième, il faut passer très rapidement sur l'introduction des ensembles ; il suffit que les enfants connaissent quelques rudiments de la grammaire des ensembles ; mais par contre, il faut aborder le plus tôt possible l'étude des relations ; ce concept, par sa nature dynamique, permet de présenter très simplement et avec grande efficacité de nombreuses notions. Le lecteur trouvera en annexe un organigramme des concepts engendrés par les relations. Il n'est pas question d'étudier toutes ces questions au niveau de la classe de Sixième ; le but est de présenter aux enfants un outil et de l'utiliser chaque fois que cela sera possible. En outre, il faut éviter tout formalisme inutile ; il est possible d'aller assez loin, sans pour autant introduire un vocabulaire abondant. Du point de vue pédagogique, il est beaucoup plus important que l'enfant découvre une notion et sache l'utiliser, plutôt que de connaître par cœur une définition qui restera bien souvent vide de sens, si l'on n'a pas pris soin de faire découvrir auparavant son intérêt.

Notons d'autre part, que le concept de relation a un caractère essentiellement non numérique. Il faut que l'enfant prenne conscience que la mathématique n'est pas uniquement l'art de calculer. En fait, si nous trouvons dans nos classes tant d'enfants hostiles et fermés à la mathématique, c'est que pour eux la mathématique, c'est faire du calcul. L'apprentissage du calcul doit cependant rester une partie importante de notre enseignement et il est important d'apprendre aux enfants à calculer sur d'autres objets que les nombres.

Je vais maintenant analyser le contenu des fiches qui ont été proposées aux enfants. L'Équipe Lyonnaise, compte tenu des résultats de la recherche a repris complètement la rédaction de ces fiches avant de les publier sous le nom de Galion.

En entrant en Sixième l'enfant connaît un grand nombre d'exemples de relations. C'est pour cette raison que nous sommes partis d'exemples familiers pour introduire ce concept. Nous avons d'abord présenté l'étude de relations d'un ensemble vers un autre ensemble.

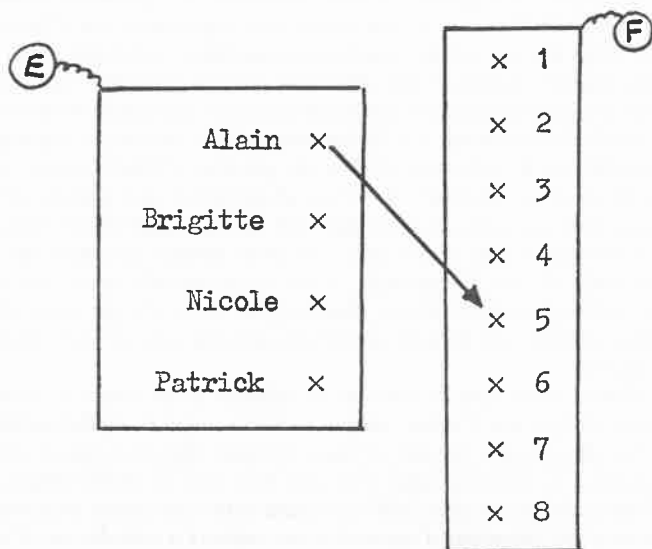
Fiche 1.

1. Voici deux ensembles : E est un ensemble d'enfants {Alain, Brigitte, Nicole, Patrick} et F est un ensemble de livres; ces livres sont numérotés pour plus de commodité :

- 1° Robur le Conquérant.
- 2° Les Malheurs de Sophie.
- 3° La Case de l'Oncle Tom.
- 4° Le Grand Meaulnes.
- 5° Les Misérables.
- 6° Sans Famille.
- 7° Don Quichotte.
- 8° Le Livre de la Jungle.

Alain *a lu* les livres 1, 5 et 6. Brigitte *a lu* les livres 2, 3 et 6. Nicole *a lu* les livres 1, 3 et 5. Patrick *a lu* les livres 8 et 6.

2. La phrase « Alain *a lu* le livre 5 » établit un lien entre Alain, élément de l'ensemble E, et le livre 5, élément de l'ensemble F. On représente cette phrase par une *flèche* allant de Alain vers le livre 5.



Trace *toutes* les flèches qui signifient « ...*a lu*... ».

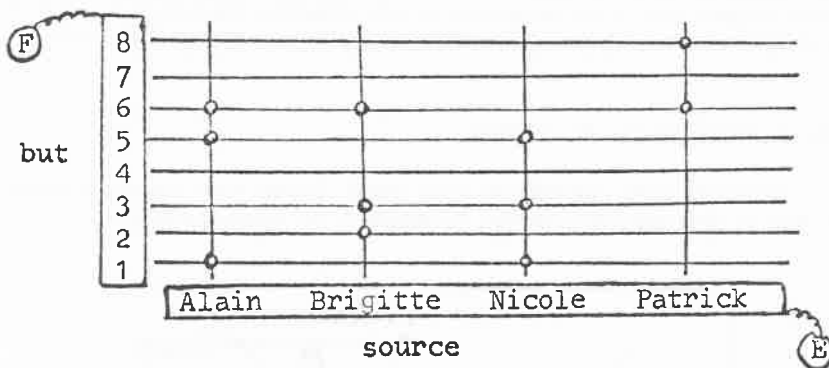
Tu as ainsi défini la *relation* « ... *a lu*... » de l'ensemble E vers l'ensemble F.

E est la *source* de la relation.

F est le *but* de la relation.

Le dessin ci-dessus, une fois complété est le schéma *sagittal* de la relation. En latin, « sagitta » veut dire « flèche ».

3. Voici ci-dessous une autre façon de représenter la relation : c'est le *schéma cartésien* de la relation.



Dans la phrase « Alain a lu le livre 5 », Alain est le *sujet* et le livre 5 le *complément*. Cette phrase peut être abrégée de la façon suivante :

A $\mathcal{L}$ 5

où $\mathcal{L}$ représente la relation « ... a lu... ».

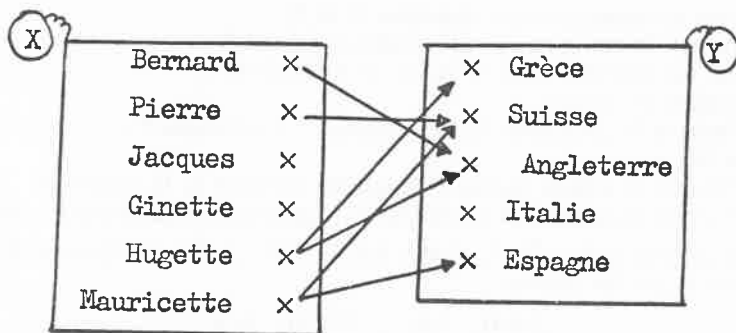
4. Exercice.

Voici deux ensembles :

$X = \{\text{Ginette, Mauricette, Huguette, Bernard, Pierre, Jacques}\}$.

$Y = \{\text{Suisse, Grèce, Angleterre, Espagne, Italie}\}$.

Voici le schéma sagittal de la relation de la source X vers le but Y : « ... a visité... ».



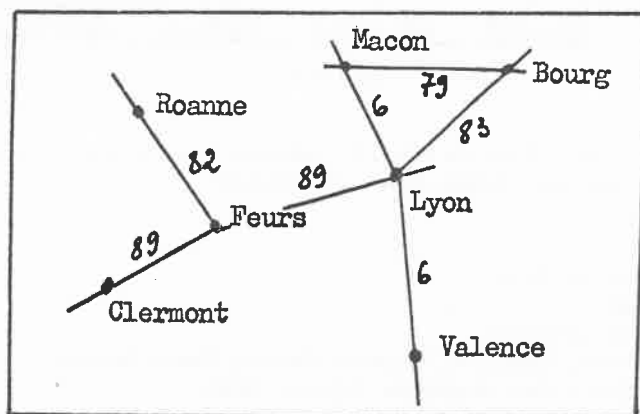
Quels pays a visités Bernard? Même question pour les cinq autres personnes? Dessinez le schéma cartésien de cette relation.

Dans cette première fiche, nous donnons une relation par sa source, son but et un groupe verbal : « ... a lu... ». Du point de vue formel, une relation $\mathcal{R}$ est définie par la donnée de trois ensembles : une source S , un but B et un sous-ensemble G du produit cartésien $S \times B$. G est le graphe de la relation $\mathcal{R}$; c'est un ensemble de couples. Nous

avons réservé à la classe de Cinquième ce point de vue. Par contre, en Sixième nous avons concrétisé les relations par des schémas sagittaux et cartésiens. Ces schémas permettent de mieux comprendre et d'organiser les éléments qui sont présentés aux enfants. D'autre part, il est intéressant et utile d'habituer les enfants à passer d'un type de schéma à l'autre, c'est l'objet de la quatrième question de cette fiche.

Fiche 2. Exercices sur les relations.

1. Voici une carte simplifiée de notre région. Prends pour source l'ensemble E des villes de cette carte et pour but, l'ensemble F des routes nationales.



Donne les inventaires des ensembles E et F.

a) Soit $\mathcal{N}$ l'écriture abrégée de la relation de E vers F : « ... est sur la nationale... ».

Ainsi, par exemple, « Lyon est sur la nationale 89 ».

Complète les phrases :

« Clermont $\mathcal{N}$... », « Feurs $\mathcal{N}$... », « Feurs $\mathcal{N}$... », « Valence $\mathcal{N}$... », « Bourg $\mathcal{N}$... », « Bourg $\mathcal{N}$... ».

b) Dessine le schéma sagittal et le schéma cartésien de la relation $\mathcal{N}$.

c) Dessine les schémas de la relation $\mathcal{F}$ « ... passe par... » de source F et de but E.

2. La source est $S = \{\Delta, *, A\}$ et le but $B = \{O, \square\}$. On exprime une relation $\mathcal{R}$ de S vers B par les phrases

$$\Delta \mathcal{R} O, * \mathcal{R} \square, * \mathcal{R} O, A \mathcal{R} \square.$$

Dessine le schéma sagittal et le schéma cartésien de cette relation.

3. S est l'ensemble de tes professeurs de Sixième et B l'ensemble des matières de ton emploi du temps.

Écris S et B en extension.

La relation $\mathcal{E}$ est « ... enseigne... » de S vers B.

Dessine les schémas de cette relation.

4. Invente d'autres exemples de relations.

Cette fiche présente d'autres relations d'un ensemble vers un autre ensemble. Le premier exemple montre l'usage que l'on peut faire d'une carte de géographie. Il conduit à deux relations $\mathcal{N}$ et $\mathcal{V}$ réciproques. Il est intéressant de comparer leurs schémas sagittaux. Une relation n'est pas toujours définie par sa source, son but et un groupe verbal. C'est pour cette raison que le deuxième exercice propose deux ensembles S et B et une relation $\mathcal{R}$ de S vers B par la donnée de phrases. Autrement dit, la relation est caractérisée ici, sans le dire, par sa source, son but et son graphe :

$$G = \{(\Delta, O), (*, \square), (*, O), (A, \square)\}.$$

Nous demandons alors aux enfants de dessiner les schémas sagittal et cartésien de cette relation $\mathcal{R}$.

Le paragraphe 3 met en évidence le rôle de la source et du but. Pour un enfant donné, la source S désigne l'ensemble de ses professeurs et B l'ensemble des matières de son emploi du temps. On étudie alors la relation $\mathcal{E}$, caractérisée par « ... enseigne... ». Il est clair que tous les enfants n'auront pas les mêmes schémas, car en particulier, ils n'étudient pas tous la même langue vivante, et par suite n'ont pas les mêmes professeurs. Cet exemple conduit à une discussion intéressante qui met en relief le fait qu'un groupe verbal ne suffit pas pour définir une relation, il faut connaître en outre la source et le but.

Nous invitons ensuite les enfants à inventer des relations. Cet exercice a un double but : permettre au maître de contrôler de façon précise si le concept est acquis et d'autre part développer l'imagination et la créativité de l'enfant.

Fiche 3. Relation dans un ensemble.

1. Voici un ensemble de personnes :

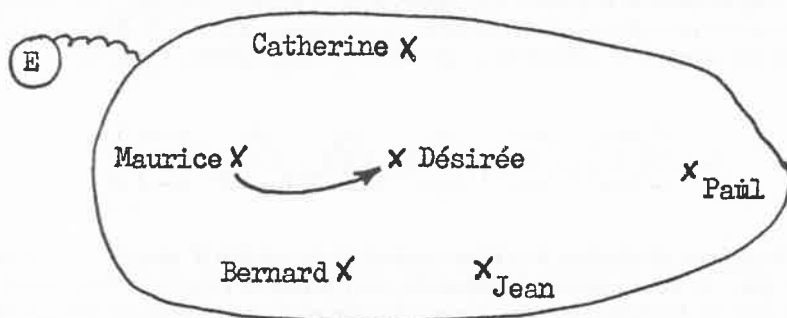
$$E = \{\text{Catherine, Désirée, Paul, Maurice, Bernard, Jules}\}.$$

Maurice est le fils de Désirée et le père de Jules; Bernard et Paul sont les fils de Catherine.

Ces phrases établissent une relation $\mathcal{F}$ entre des éléments de l'ensemble E : « ... est le fils de ... ».

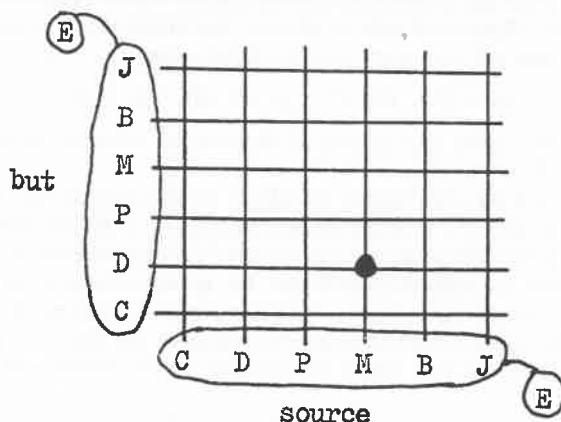
Ici, la source et le but sont des ensembles égaux : l'ensemble E .

Pour dessiner le schéma sagittal de cette relation $\mathcal{F}$, dessine deux fois l'ensemble E . Tu peux ensuite dessiner ce schéma en utilisant une seule fois l'ensemble E . Reproduis le dessin ci-dessous et complète-le.



Pour le schéma cartésien, il est nécessaire de représenter *deux fois* l'ensemble E. Il convient d'indiquer où est le but et où est la source !

Complète le schéma suivant :



2. Dessine une patate dans laquelle tu traceras :

- trois cercles, un bleu, un jaune et un rouge
- deux triangles, un bleu et un rouge
- un carré rouge.

L'ensemble de ces dessins est noté U.

Dessine le schéma sagittal de la relation $\mathcal{F}$ « ... a même forme que... » dans U.

Dessines-tu une flèche partant du carré rouge ?

Dessine le schéma sagittal de la relation $\mathcal{C}$ « ... a même couleur que... » dans U.

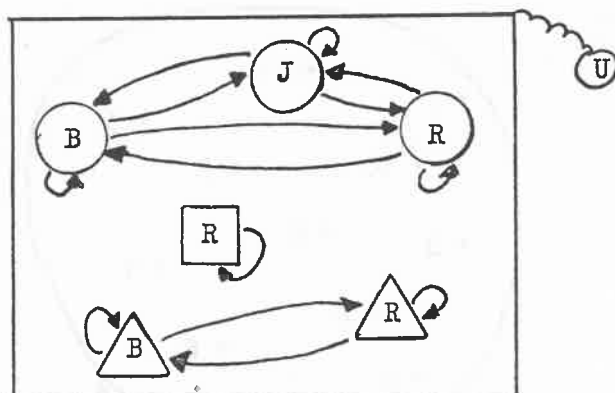
Nous abordons dans cette fiche l'étude des relations d'un ensemble vers lui-même (relations dans un ensemble) ; ici la source est égale au but.

En prenant un ensemble de personnes E et des liens de parenté, on étudie la relation dans E : «... est le fils de... ». Dans une première étape, pour construire le schéma sagittal de cette relation, nous suggérons de représenter deux fois l'ensemble E (comme dans le cas déjà étudié des relations d'un ensemble vers un autre ensemble), puis nous faisons constater qu'il suffit de représenter une seule fois cet ensemble ; d'où le schéma sagittal d'une relation dans un ensemble. Par contre, pour le schéma cartésien, il est nécessaire de représenter deux fois le même ensemble, en distinguant la source du but. L'exercice 2 prépare les concepts de réflexivité et de relation d'équivalence. On prend l'ensemble

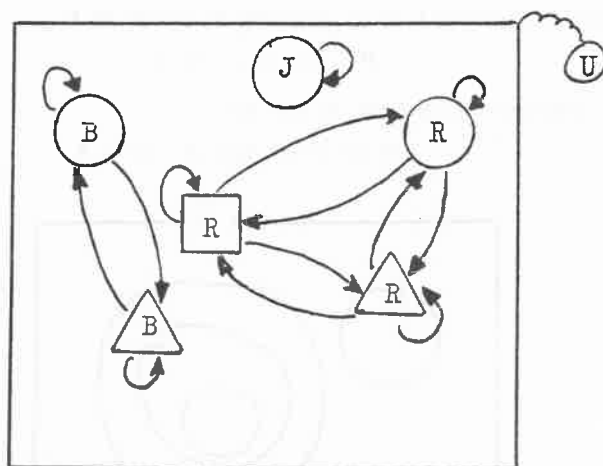
$$U = \{ \text{B}, \text{J}, \text{R}, \triangle \text{B}, \triangle \text{J}, \square \text{R} \}.$$

On propose de dessiner le schéma sagittal de la relation $\mathcal{F}$ dans U : «... a même forme que... ». Pour suggérer la réflexivité, nous posons la question « Dessines-tu une flèche partant du carré rouge ? » Comme le carré rouge a même forme que lui-même,

il faut tracer une telle flèche. Il en est de même des autres éléments de U , d'où le schéma sagittal :



De même, la relation C dans U : «... a même couleur que... » conduit au schéma suivant :



Fiche 4. Exercices.

1. Voici un ensemble $B = \{2, 5, 1, 7, 9, 11, 3, 8, 10, 4, 6\}$.

Dessine le diagramme ci-après une fois sur ton cahier et deux fois sur du papier calque.

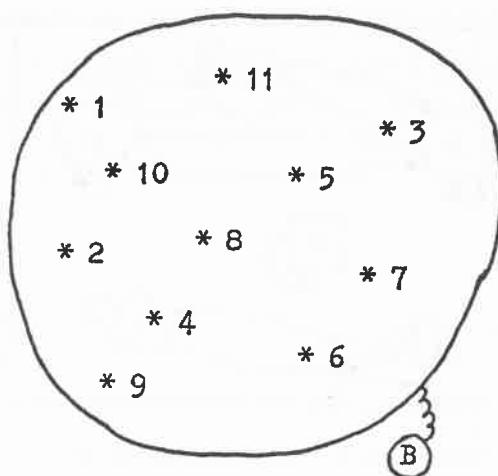
a) Sur ton cahier dessine le schéma sagittal de la relation $\mathcal{D}$: « ... est le double de... » dans B .

b) Dessine sur le papier calque le schéma de la relation $\mathcal{M}$: « ... est la moitié de... » dans B .

c) Superpose le calque au dessin. Que remarques-tu?

d) Sur le second calque, dessine le schéma de la relation $\mathcal{N}$: « ... n'est pas le double de... » dans B . Que remarques-tu?

e) Refais ces exercices à l'aide de schémas cartésiens.

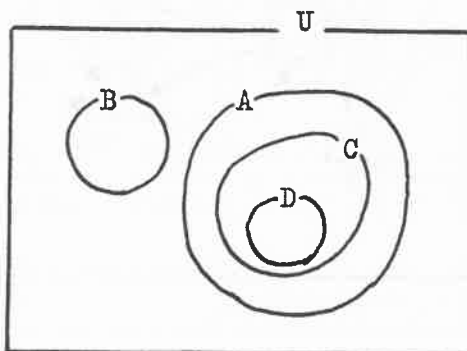


2. Voici un ensemble U et un ensemble de parties de U :

$$P = \{A, B, C, D, U\}.$$

Sur le diagramme ci-dessous, tu vois que

D est inclus dans A : $D \subset A$

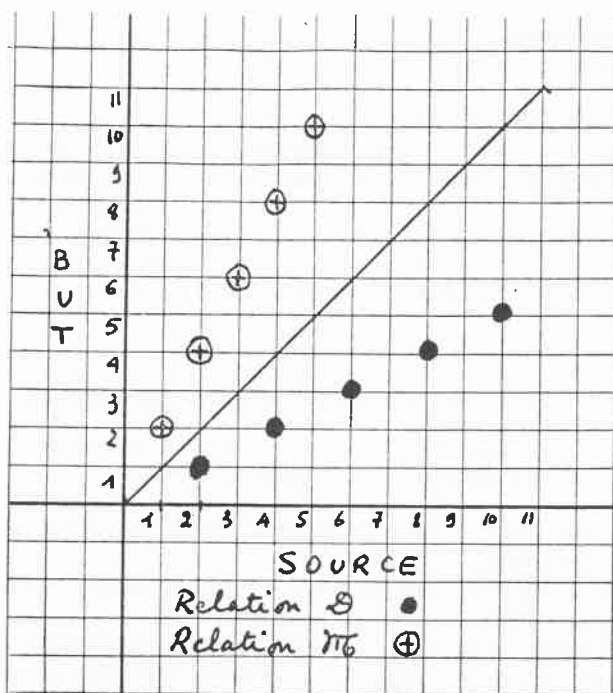


Dessine le schéma cartésien et le schéma sagittal de la relation «... est inclus dans... » dans P .

3. Imagine des relations dans l'ensemble E des élèves de ta classe. Pense, par exemple, au mois de naissance, aux initiales des noms.

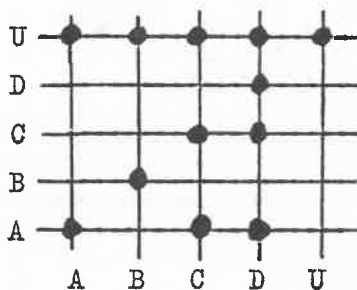
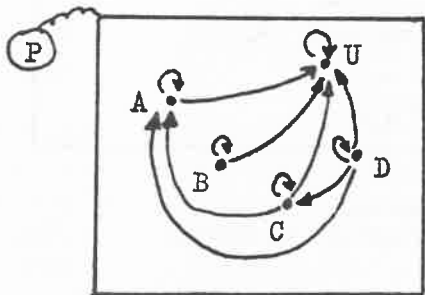
Nous proposons dans cette fiche trois exercices sur les relations dans un ensemble. Le premier est l'étude de trois relations dans un ensemble de naturels : $\mathcal{D}$ « ... est le double de... », sa relation réciproque $\mathcal{M}$ « ... est la moitié de... » et sa relation complémentaire $\mathcal{N}$ « ... n'est pas le double de ... ». L'utilisation de papier calque permet de

montrer que l'on passe du schéma sagittal de la relation $\mathcal{D}$ au schéma sagittal de la relation $\mathcal{M}$ en changeant le sens des flèches. De même, on passe du schéma sagittal de la relation $\mathcal{D}$ à celui de la relation $\mathcal{N}$ en traçant toutes les flèches qui manquent et en supprimant celles de $\mathcal{D}$. Il est alors intéressant d'utiliser les schémas cartésiens et de constater qu'en traçant sur un même schéma les relations $\mathcal{D}$ et $\mathcal{M}$ les deux ensembles de points sont symétriques par rapport à la première bissectrice.



Pour obtenir le schéma cartésien de la relation $\mathcal{N}$, il suffit d'utiliser celui de la relation $\mathcal{D}$ et de placer des points là où il n'y en a pas. Les graphes des relations $\mathcal{D}$ et $\mathcal{N}$ sont complémentaires dans $B \times B$.

Le second exercice est plus délicat. On donne un ensemble U et un ensemble P de parties de U , défini par un diagramme de Venn. La relation à étudier est « ... est inclus dans ... » qui conduit aux schémas suivants :



C'est le deuxième exemple de relation réflexive ; en effet, comme toute partie est incluse dans elle-même, chaque élément de P est relié à lui-même.

Le troisième exercice propose aux enfants d'imaginer des relations dans l'ensemble E des élèves de la classe. Le lecteur trouvera dans le livre de Papy « Mathématique Moderne 1 » des exemples intéressants.

Fiche 5. Répartissons...

(Cette fiche sera étudiée en Travaux Dirigés.)

1. Prends l'ensemble des Blocs Logiques L .
 - a) La relation $\mathcal{C}$: « ... a même couleur que... » dans L , te permet de répartir tous les éléments de L en trois tas. Lesquels ? Tu peux désigner ces tas par les lettres R , J et B .
 - b) Même étude avec la relation $\mathcal{F}$: « ... a même forme que... » dans L .
 - c) La relation $\mathcal{W}$: « ... a même forme et même couleur que... » dans L te permet de répartir tous les éléments de L en tas. Combien de tas obtiens-tu ?

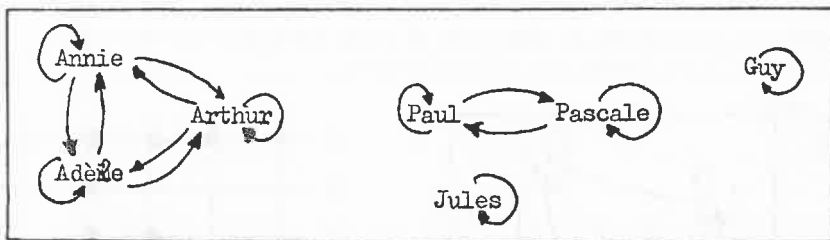
2. Voici un ensemble de prénoms :

$$P = \{\text{Annie, Paul, Guy, Adèle, Pascale, Jules, Arthur}\}.$$

Dessine le schéma sagittal de la relation « ... a même initiale que... » dans P .
Peux-tu répartir ces prénoms grâce à cette relation ?

3. Imagine des relations dans un ensemble qui te permettent de répartir les éléments de cet ensemble.

Nous reprenons dans cette fiche les relations $\mathcal{C}$ et $\mathcal{F}$ de la fiche 3, en utilisant cette fois l'ensemble L des Blocs Logiques. La relation $\mathcal{C}$ conduit à une partition de L en trois classes : les blocs rouges, jaunes et bleus ; de même, la relation $\mathcal{F}$ conduit à une autre partition de L en quatre classes : les blocs carrés, rectangles, triangles et ronds. La relation $\mathcal{W}$ est l'intersection des relations $\mathcal{C}$ et $\mathcal{F}$; elle conduit à une partition de L en douze classes ; c'est une sous-partition des partitions précédentes. Le schéma sagittal du deuxième exercice est le suivant :



On obtient une partition de P en quatre classes,
A ce stade, la réflexivité n'a plus posé de difficulté aux enfants.

Fiche 6. Partition.

1. La relation $\mathcal{C}$: « ... a même couleur que... » dans L t'a permis, dans la fiche précédente, de répartir les éléments de L en trois *classes* : R, J et B.

- Choisis deux quelconques de ces classes. Ont-elles des éléments communs?
- Prends un élément quelconque de L. Appartient-il à l'une de ces classes?

2. Mêmes questions avec la relation $\mathcal{F}$ dans L puis la relation $\mathcal{W}$ dans L.

3. Vocabulaire et définition.

Un ensemble de *parties* d'un ensemble E constitue une **PARTITION** de E si :

- a) aucune de ces parties *n'est vide* ;
 - b) tout élément de E est élément d'une de ces parties et d'une seule.
- Ces parties sont les **CLASSES** de la partition.

Quelle est la partition créée par la relation $\mathcal{C}$ dans L?

Quelles sont les classes de cette partition?

Mêmes questions pour les relations $\mathcal{F}$ et $\mathcal{W}$ dans L?

4. Exemples et contre-exemples.

Voici un ensemble : $U = \{a, d, b, f, e, c\}$.

Les parties

$$X = \{a, b\}, \quad Y = \{c\} \quad \text{et} \quad Z = \{e, d, f\}$$

constituent-elles une partition de U?

Même question pour les parties

$$M = \{a\}, \quad N = \{c, b, d\}, \quad P = \{e\} \quad \text{et} \quad Q = \{f\}.$$

Les parties

$$A = \{b, a, c\}, \quad B = \{b, f, d\} \quad \text{et} \quad C = \{e\}$$

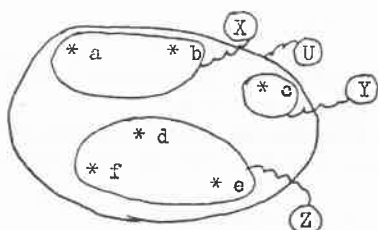
ne constituent pas une partition de U. Pourquoi?

Même question pour les parties

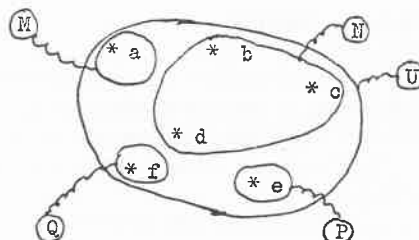
$$A' = \{b, a\} \quad \text{et} \quad B' = \{d, f, e\}.$$

5. Trouve des exemples et des contre-exemples de partitions d'un ensemble de ton choix.

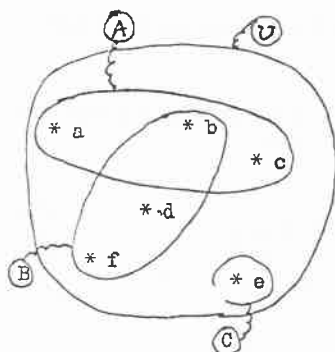
Nous introduisons dans cette fiche le mot partition. En reprenant la relation $\mathcal{C}$ dans l'ensemble L, les enfants constatent que les classes sont disjointes et que tout élément de L appartient à une classe. D'où la définition d'une partition sur un ensemble. Nous proposons alors des exemples et des contre-exemples de partitions.



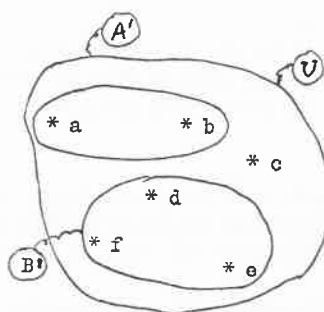
$\{X, Y, Z\}$ est une partition de U



$\{M, N, P, Q\}$ est une partition de U



$\{A, B, C\}$ n'est pas une partition de U , car les parties A et B ne sont pas disjointes



$\{A', B'\}$ n'est pas une partition de U , car l'élément e n'appartient à aucune classe.

Le concept de partition sera repris ultérieurement à l'occasion de l'étude des relations d'équivalence, des congruences et de la construction de l'ensemble $\mathbb{Z}$; le terrain est préparé suivant le bon principe de Revuz : « Tôt et progressivement ».

Fiche 7. Fonctions.

1. Voici deux ensembles :

$F = \{\text{Rhône, Loire, Seine, Rhin, Garonne}\}$

$V = \{\text{Marseille, Lyon, Tours, Strasbourg, Paris}\}$

et la relation $\mathcal{F}$ de F vers V : « ... passe par... ».

Dessine le schéma sagittal et le schéma cartésien de cette relation.

Si tu choisis un élément de F , combien a-t-il d'images, c'est-à-dire combien de flèches en partent? Un élément de la source F a-t-il plusieurs images?

Reprends la même étude mais en remplaçant l'ensemble V par l'ensemble :

$V' = \{\text{Marseille, Lyon, Tours, Strasbourg, Paris, Avignon}\}$

et la relation $\mathcal{F}'$ de F vers V' .

2. Tu viens d'étudier deux relations; pour la première, *tout* élément de la source a *au plus* une image.

Une telle relation est une **FONCTION**.

Une relation est une **FONCTION** si tout élément de la source a **AU PLUS** une image (il peut ne pas en avoir du tout).

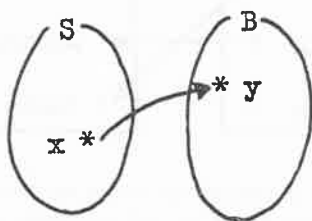
La seconde relation est-elle une fonction?

3. Notation.

Voici une fonction f de source S et de but B .

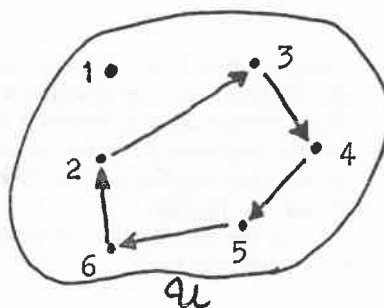
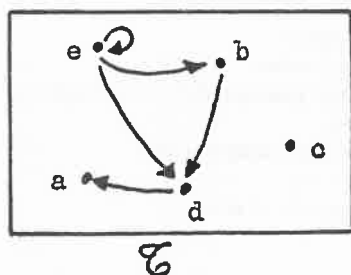
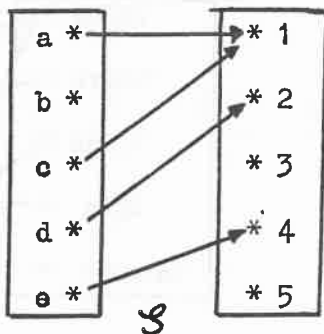
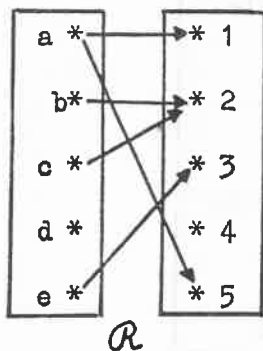
Si l'élément x de S a pour image l'élément y de B , on écrit :

$$f: x \mapsto y$$



ce qui se lit « x a pour image y par la fonction f ».

4. Voici les schémas sagittaux de quatre relations $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{U}$.

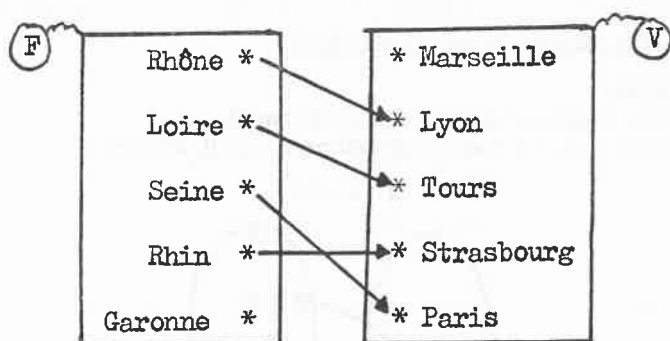


Lesquelles sont des fonctions?

Pour les autres, peux-tu supprimer des flèches pour que les nouvelles relations soient des fonctions?

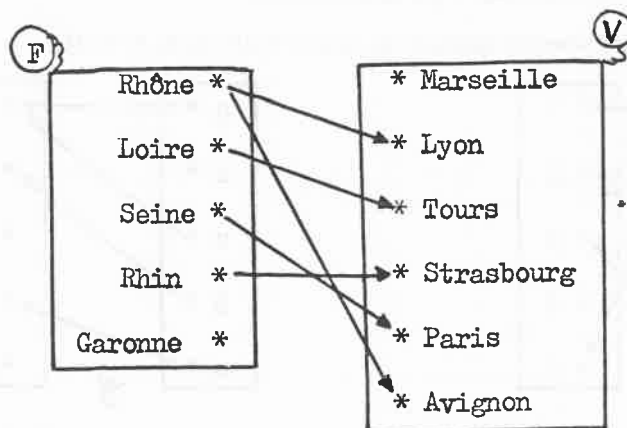
Nous introduisons dans cette fiche le concept de fonction. Nous proposons aux enfants l'étude de deux relations :

a) la relation $\mathcal{S}$ de F vers V qui conduit au schéma sagittal suivant :



Un élément de la source F possède une image au plus (zéro ou une).

b) la relation $\mathcal{S}'$ de F vers V' qui conduit au schéma sagittal suivant :



Dans ce cas le Rhône a deux images : Lyon et Avignon.

La relation $\mathcal{S}$ est une fonction, $\mathcal{S}'$ n'est pas une fonction.

Nous donnons alors la définition et la notation d'une fonction. Puis nous proposons les schémas sagittaux de quatre relations $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{U}$.

$\mathcal{R}$ n'est pas une fonction car l'élément a possède deux images 1 et 5.

$\mathcal{S}$ est une fonction.

$\mathcal{C}$ n'est pas une fonction car e possède trois images : b, d et e.

$\mathcal{U}$ est une fonction.

En supprimant du graphe de la relation $\mathcal{R}$ le couple $(a, 1)$ ou le couple $(a, 5)$ on obtient une fonction. De même, en supprimant du graphe de la relation $\mathcal{G}$ le couple (e, e) et le couple (e, b) on obtient une fonction.

Fiche 8. Exercices sur les fonctions.

1. Voici un ensemble d'enfants :

$$X = \{\text{Jeanne, André, Paul, Véronique, Rose}\}$$

et un ensemble de fleurs :

$$Y = \{\text{rose, œillet, tulipe, marguerite, mimosa}\}.$$

- André aime les roses et les tulipes, mais préfère les roses.
- Paul n'aime que les marguerites.
- Véronique préfère les tulipes, mais elle aime aussi les roses et le mimosa.
- Jeanne aime toutes les fleurs et n'en préfère aucune.
- Rose n'aime pas les fleurs.

- a) Dessine les deux schémas de la relation $\mathcal{A}$ « ... aime... » de X vers Y .
- b) Dessine les deux schémas de la relation $\mathcal{P}$ « ... préfère... » de X vers Y .
- c) Laquelle de ces deux relations est une fonction? Pourquoi?

2. Voici un ensemble :

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

Dans l'ensemble E , la relation « ... est le double de... » est-elle une fonction?

Dans l'ensemble E , la relation « ... est multiple de... » est-elle une fonction?

3. La relation « ... est multiple de... » de source $S = \{5, 8, 21, 18, 13\}$ et de but $B = \{5, 9, 4, 7, 11\}$ est-elle une fonction?

Si oui, comment peux-tu transformer la source S pour que la nouvelle relation ne soit pas une fonction?

Même question en modifiant le but.

4. Imagine d'autres exemples de fonctions d'un ensemble vers un autre ensemble et des exemples de fonctions dans un ensemble.

Voici le schéma sagittal de la relation $\mathcal{A}$ et celui de la relation $\mathcal{P}$.



Le graphe de la relation $\mathcal{F}$ est inclus dans celui de la relation $\mathcal{A}$. La relation $\mathcal{F}$ est une fonction, car une personne ne peut préférer qu'un seul type de fleur (ou pas du tout).

La relation $\mathcal{A}$ n'est pas une fonction : une personne peut aimer plusieurs types de fleurs.

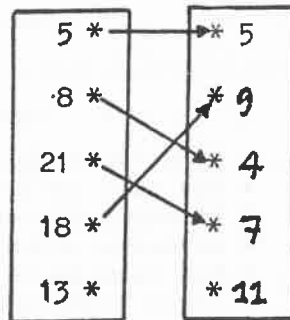
La relation « ... est le double de ... » dans E est une fonction : un naturel est le double d'au plus un naturel ; ainsi, par exemple, 10 est le double de 5 et 7 n'est le double d'aucun naturel.

La relation « ... est multiple de ... » dans E n'est pas une fonction, en effet, un naturel peut être multiple de plus d'un naturel ; par exemple, 10 est multiple de 1, 2, 5 et 10.

Par contre, la relation « ... est multiple de ... » de S vers B est une fonction.

Cet exemple montre une fois encore que la nature d'une relation dépend essentiellement de la source et du but.

En prenant 20 dans la source, cet élément a alors deux images 4 et 5 ; ce n'est plus une fonction. De même, en prenant 6 dans le but, l'élément 18 a alors deux images 6 et 9 ; ce n'est plus une fonction.



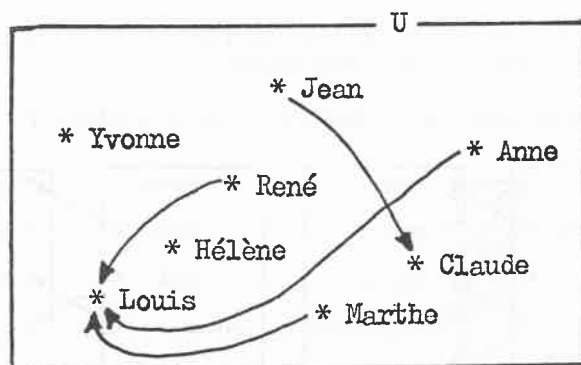
Fiche 9. Composition de relations.

1. Voici un ensemble de personnes :

$U = \{\text{Jean, Yvonne, Anne, René, Hélène, Claude, Louis, Marthe}\}$.

- Louis a trois enfants : Anne, Marthe et René.
- Jean est le fils de Claude et de Marthe.
- Yvonne est la mère de Louis.
- Hélène est la mère de Claude.

Le dessin ci-après est le schéma sagittal de la relation $\mathcal{F}$ « ... a pour père ... » dans U .

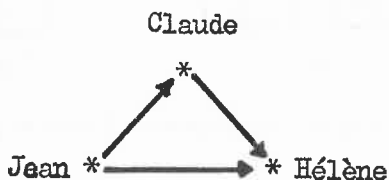


a) Ce schéma est-il correct?

b) Dessine sur le même diagramme, le schéma sagittal de la relation $\mathcal{M}$ « ... a pour mère... » dans U .

2. Hélène est la mère de Claude, Claude est le père de Jean, Hélène est donc la grand-mère paternelle de Jean.

Tu as ainsi une nouvelle relation dans U : « ... a pour grand-mère paternelle... ».

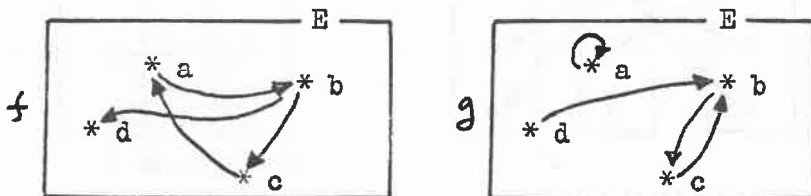


Représente sur un autre dessin le schéma sagittal de cette nouvelle relation. Cette nouvelle relation s'appelle la relation composée de la relation $\mathcal{F}$ « ... a pour père... » suivie de la relation $\mathcal{M}$ « ... a pour mère ... ».

3. Sur un troisième dessin, représente le schéma sagittal de la relation composée de $\mathcal{M}$ suivie de $\mathcal{F}$.
Comment s'énonce-t-elle?

4. Exercice.

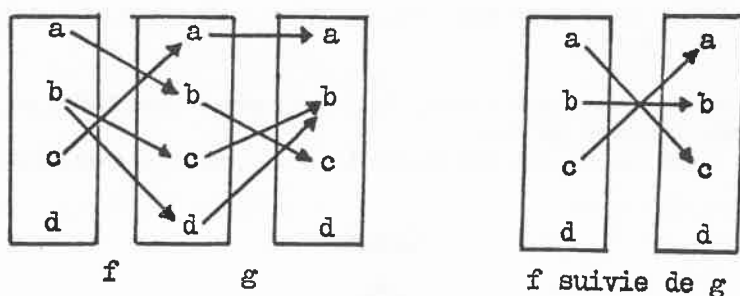
Voici deux relations f et g dans l'ensemble $E = \{a, b, c, d\}$ données par leurs schémas sagittaux :



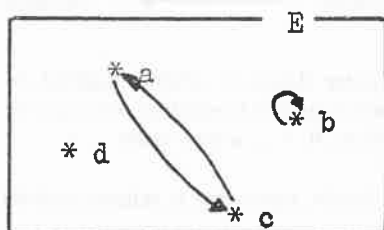
Donne le schéma sagittal de la relation composée de la relation f suivie de la relation g .

Même question pour la relation composée de la relation g suivie de la relation f .

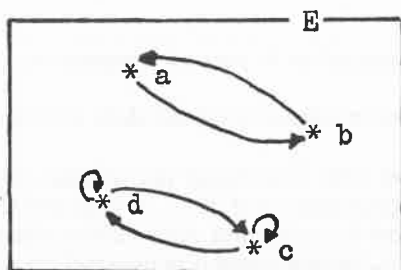
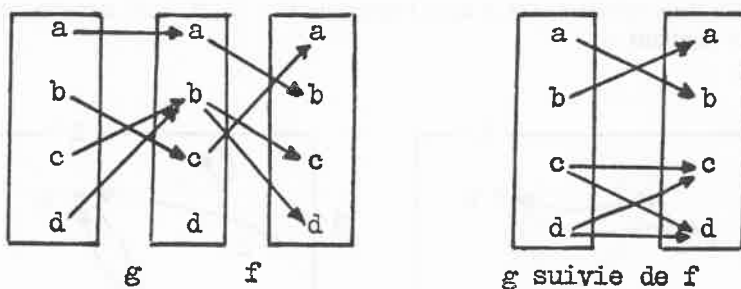
Nous abordons dans cette fiche l'étude des relations composées. En partant des deux relations $\mathcal{F}$ « ... a pour père... » et $\mathcal{M}$ « ... a pour mère ... » dans un ensemble de personnes, nous conduisons les enfants aux deux relations composées « ... a pour grand-mère paternelle ... » et « ... a pour grand-père maternel... » dans le même ensemble U . L'exercice suivant est plus difficile. Deux relations f et g sont données par leurs schémas sagittaux. Pour trouver les relations composées, la plupart des enfants ont procédé de la manière suivante :



d'où le schéma sagittal de la relation composée « f suivie de g ».



De même pour la relation « g suivie de f ».



On constate sur cet exemple que les relations composées « f suivie de g » et « g suivie de f » ne sont pas égales.

Fiche 10. Exercices.

1. En suédois, les mots « fader » et « moder » signifient « père » et « mère ». Ils sont remplacés par « far » et « mor » dans les noms composés.

En français, il n'y a que deux mots pour désigner des grands-parents : « grand-père » ou « grand-mère ».

En suédois, il en existe quatre : « farmor », « farfar », « morfar » et « mormor ». « farmor » signifie « la mère du père ». Que signifient les trois autres ?

« Bror » signifie « frère » et il existe deux mots pour « oncle ». L'un d'eux est « farbror ». Quel est l'autre ?

Le mot « fils » se traduit en suédois par « son ». Peux-tu donner un des mots pour traduire « neveu » ?

« Dotter » signifie « fille ». Trouve les quatre mots pour traduire « petit-fils » et « petite-fille ».

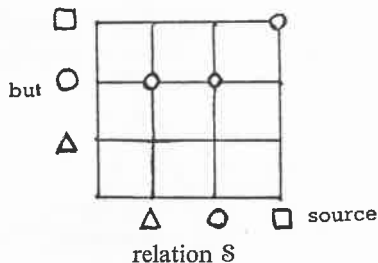
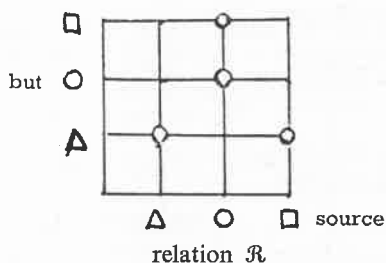
Complète les phrases suivantes :

« Si Ubrika est *farmor* de Nils, alors Nils est ... de Ubrika ».

« Si Karl est *brorson* de Olaf, alors Olaf est ... de Karl ».

(Nils et Olaf sont des prénoms masculins.)

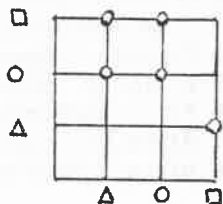
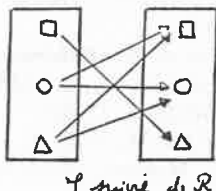
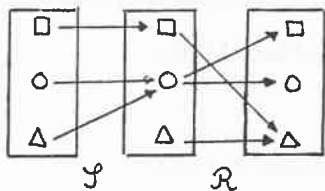
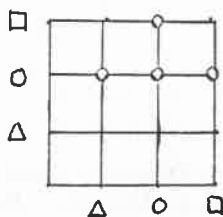
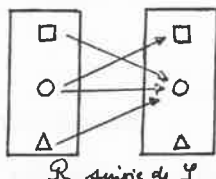
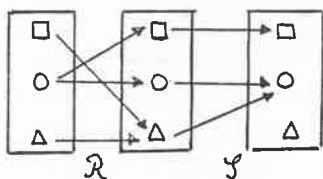
2. Voici deux relations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ dans l'ensemble $X = \{\Delta, O, \square\}$, données par leurs schémas cartésiens :



Dessine le schéma cartésien de la relation « $\mathcal{R}$ suivie de $\mathcal{S}$ ».

Dessine de même le schéma cartésien de la relation « $\mathcal{S}$ suivie de $\mathcal{R}$ ».

Le premier exercice de cette fiche est dû à Fletcher. Il a beaucoup intéressé les enfants qui étaient tout heureux de faire du suédois. Pour résoudre le second, ils sont passés pour la plupart par les schémas sagittaux :



Ici encore on constate que les relations « R suivie de S » et « S suivie de R » ne sont pas égales.

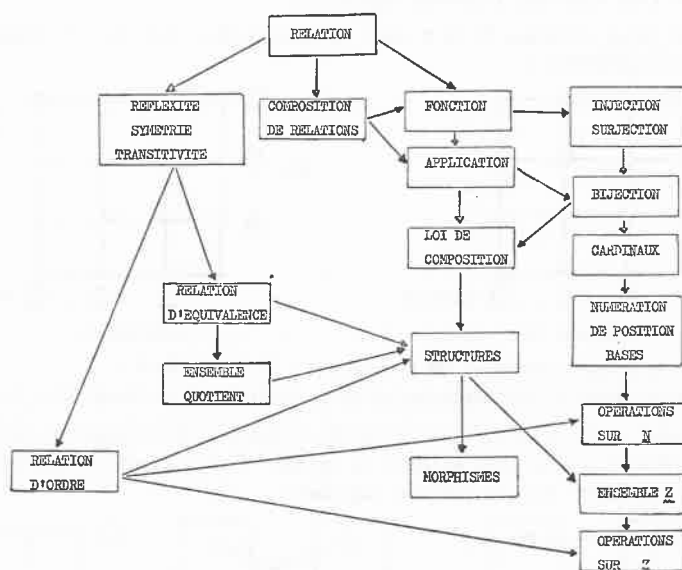
Remarques :

1. Dans la nouvelle rédaction des fiches (Mathématique en 6^e, E. Galion), nous avons abandonné le concept de fonction et nous avons introduit celui d'application.

2. Nous avons d'autre part proposé de plus nombreux exercices sur les relations numériques.

3. Sans passer par les notions d'injection et de surjection, nous avons présenté le concept de bijection ainsi que la composition de bijections, ce qui conduit à des concrétisations intéressantes de groupes.

4. La notion de relation ne fait pas l'objet d'un « chapitre », cette notion a été utilisée chaque fois que l'occasion s'est présentée. Nous disposons d'un outil et nous l'avons exploité au maximum.



BIBLIOGRAPHIE

1. DUMONT : *Étude intuitive des Ensembles*, Dunod.
2. E. DUPONT : *Apprentissage Mathématique*, Sudel.
3. DUVERT, GAUTHIER et GLAYMANN : *Travaux Pratiques de Mathématique*, série II : *les Relations*, O.C.D.L.
4. FLETCHER : *Apprentissage de la Mathématique aujourd'hui*, O.C.D.L.
5. E. GALION : *Mathématique en 6^e*, O.C.D.L.
6. PAPY : *Mathématique Moderne*, Didier.
7. REVUZ : *Le Cours de l'A.P.M.*, tome 1.
8. REVUZ : *Mathématique Moderne, Mathématique Vivante*, O.C.D.L.