

Encore les fractions.

N.D.L.R. — Il nous a paru intéressant de faire suivre la note sur le « fractionnisme impénitent » par un plaidoyer pour les fractions et de rapprocher une note sur la « mesure complexe d'un vecteur ».

Une chose me préoccupe depuis longtemps : l'absence des fractions du programme de Sixième, alors qu'elles sont enseignées à l'école primaire (cours moyen 1 et 2) et, bien sûr, dans les plus grandes classes.

Je voyais là, d'abord, une incohérence comme on en trouve beaucoup dans nos programmes ; mais depuis l'amélioration de l'enseignement des mathématiques dans le premier cycle des lycées, due en grande partie aux efforts de l'A.P.M., je constate que cette situation subsiste ; bien plus, elle se trouvera renforcée, si les programmes établis par la commission Lichnérowicz (d'accord, je crois, avec l'A.P.M.) sont un jour appliqués, puisqu'alors les fractions ne figureront pas plus dans l'enseignement de Cinquième que dans celui de Sixième. Or, en même temps, l'A.P.M. publie un projet de programme pour les classes élémentaires (*Bulletin* n° 258) dans lequel les fractions tiennent une place assez importante, et sont d'ailleurs introduites d'une façon très pertinente.

Cette situation me paraît tout à fait contradictoire. En effet de deux choses l'une :

1) Doit-on se donner du mal pour enseigner aux enfants une notion importante, la leur laisser oublier pendant deux ans, et être obligé de tout recommencer ensuite ? Que de temps et d'efforts perdus, pour les maîtres comme pour les élèves !

2) Ou alors — puisque le projet de Sixième et Cinquième, même s'il a un caractère expérimental, semble refléter assez nettement les intentions pédagogiques stables de ses auteurs — les fractions ne sont-elles maintenues au Cours Moyen qu'à titre transitoire, dans la perspective d'une suppression totale ? Cela me paraît difficile à accepter... Dans l'avenir, les enfants n'entendront-ils parler de fractions qu'à partir de la Quatrième ? Je pense qu'il faut admettre qu'un élève de Cinquième sache, par exemple ce que signifie « prendre les $\frac{3}{4}$ de 12 »... mais comment l'aura-t-il appris ? Uniquement dans la « vie courante » ?

Suis-je seule à m'étonner de ces contradictions ? Dans les essais pédagogiques publiés récemment par l'A.P.M., on jongle avec les anneaux ; on introduit les nombres négatifs par une méthode qui bien que maintenant classique n'est pas des plus simples, au moyen de classes d'équivalence sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (article de E. Dehame, *Bulletin* n° 259) ; les problèmes linéaires traités, avec beaucoup de subtilité, par M^{me} Touyarot (*Bulletin* n° 261) concernent des modules à plusieurs dimensions sur $\mathbb{Z}$; bref tout le monde semble avoir pris son parti de l'absence des fractions.

Les nombres rationnels tiennent pourtant une place assez grande dans les mathématiques et leur enseignement pour que la chose, à mon avis, mérite d'être discutée. Je souhaiterais que les membres de l'A.P.M. qui ont participé à l'élaboration des programmes de la commission Lichnérowicz expliquent en détail les raisons de leur choix. De toutes façons, les projets ne sont-ils pas publiés dans le *Bulletin de l'A.P.M.* pour être discutés par tous les enseignants « de la Maternelle aux Facultés » ? Permettez-moi donc de présenter quelques arguments en faveur de l'enseignement des nombres rationnels en Sixième et en Cinquième.

1. M. Revuz pense que si, à la différence des nombres négatifs, les fractions ont été jusqu'à présent enseignées chez nous aux jeunes enfants, c'est par fidélité aux traditions, parce qu'elles étaient connues des anciens grecs. Ne serait-ce pas plutôt parce qu'elles sont d'un usage très courant ? Tous les enfants savent ce qu'est un partage. On peut donner des fractions des représentations très directes, très concrètes. Les nombres négatifs ont des applications plus restreintes et plus « savantes » dans le domaine des grandeurs « repérables » telles que les températures, les dates historiques,

et dans la pratique ne donnent lieu qu'à peu d'opérations (comparaison, ou addition ou soustraction d'un nombre positif).

2. Si l'introduction des nombres rationnels pose certains problèmes pédagogiques, leur ignorance prolongée en pose bien d'autres.

Ainsi tous les problèmes « linéaires » d'un type très classique cité par M^{me} Touyarot ont des solutions en nombres entiers ; et nous ne nous en étonnons pas ; *d'après la façon dont le problème est posé, on sait qu'il a une solution* (M^{me} Durand a acheté 10 m de ruban et 20 m de dentelle, etc... elle a payé tant ; le prix du mètre du ruban ou de dentelle ne peut être qu'un nombre entier de centimes, et la facture du mercier donne la preuve que nos calculs conduiront nécessairement à des nombres entiers ; et la preuve que l'élève ne s'est pas trompé est que son opération « tombe juste »).

Ainsi, le fait qu'un problème ait ou non une solution en nombres entiers dépend des données numériques initiales ; mais l'élève ne se préoccupe pas de savoir comment ni pourquoi, c'est l'affaire du maître ou du livre ! Ces problèmes « scolaires » diffèrent essentiellement des vrais « problèmes mathématiques » où il s'agit non seulement de trouver un résultat, mais d'expliquer comment il dépend des hypothèses initiales. Certes, si on adopte la méthode de M^{me} Touyarot et si on en pousse l'étude assez loin, on peut expliquer pourquoi tels problèmes linéaires ont une solution en nombres entiers et tels autres non ; mais beaucoup d'enseignants auront-ils la patience d'exposer jusqu'au bout ces raisonnements longs et délicats, et ne se contenteront-ils pas de donner des problèmes dont la solution « tombe juste » ?

3. Avec cette ignorance volontaire des nombres rationnels, les programmes de Sixième et de Cinquième paraissent pleins de lacunes (comme l'ensemble $\mathbb{Z}$ lui-même !) Ainsi pourquoi étudie-t-on le « partage d'un segment en n parties égales » alors qu'un nombre ne peut pas être partagé en n parties égales ? Et quelle sera la longueur des segments obtenus, si on connaît la longueur du segment initial ? Un tel segment n'aura-t-il qu'une « longueur à un millimètre près » par exemple, et non pas une « vraie longueur » ?

4. Craint-on la difficulté de l'étude des nombres rationnels, parce que l'introduction exige, d'une façon ou d'une autre, l'établissement d'une relation d'équivalence dans l'ensemble des couples de nombres entiers ? (Dans ce cas, on n'est pas d'accord avec M. Dehame qui introduit les nombres négatifs à l'aide d'une équivalence sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, alors qu'il pourrait utiliser d'autres méthodes.) Mais lorsqu'on demande d'étudier des exemples de « couples de fonctions numériques f et g proportionnelles » (programme de Sixième) que fait-on d'autre que d'établir une relation d'équivalence entre des couples de nombres ? De même quand on étudie « l'ensemble des x, y tels que $x = at, y = bt$ » (programme de Cinquième). Faisons correspondre à la droite portant ces points la fraction $\frac{a}{b}$, et tout sera plus clair.

Je mentionne pour mémoire les fameux problèmes utilisant la « règle de trois », dont « l'automatisme stérile » peut être brisé par l'usage des fractions, même si on ne dispose pas de tableaux de nombres ou de papier millimétré (programme du Cours Moyen).

5. Même en choisissant les problèmes « ad hoc », on s'aperçoit rapidement que les nombres entiers ne suffisent pas. On introduit donc les nombres décimaux. Remarquons d'abord que les nombres décimaux sont des fractions, et que la mesure du temps et celle des angles, étudiées en Sixième, utilisent des fractions non décimales. Une généralisation ne doit pas demander un grand effort.

Les problèmes linéaires envisagés ci-dessus n'ont en général pas plus de solution dans les nombres décimaux que dans les nombres entiers. Évidemment, ils ont des

« solutions décimales approchées, mais qui approchent... quoi ? Ce qu'on calcule par la division avec une approximation » aussi grande qu'on veut, qu'est-ce que c'est ? N'est-ce pas un nombre ? L'inconvénient de l'ignorance des fractions apparaît très nettement à la lecture du passage suivant, tiré d'un livre de Sixième dont, par ailleurs, j'apprécie les qualités pédagogiques (il s'agit d'un exemple de grandeurs proportionnelles) : Formons les quotients : $\frac{50}{15}$, $\frac{70}{21}$, $\frac{80}{24}$. En simplifiant le premier par 5, le second par 7, le troisième par 8 nous trouvons que ces quotients sont tous égaux au quotient de 10 par 3. Il y a bien proportionnalité. Mais si l'on effectuait les divisions de 50 par 15, de 70 par 21, de 80 par 24, on trouverait des quotients de la forme :

3, ou 3,3 ou 3,33, etc...

et la proportionnalité pourrait ne pas apparaître.

En fait, la proportionnalité ne s'exprimerait ici que par l'égalité des quotients avec une même approximation, quelle que soit cette approximation (souligné par l'auteur).

Voilà un langage bien abstrait, et des considérations qui seraient inutiles si on avait le droit d'utiliser des fractions !

6. Les programmes de Sixième et de Cinquième ont raison, à mon avis d'insister sur l'importance des approximations ; et je pense qu'il serait possible et utile de faire déjà une distinction entre les approximations limitées par les instruments de mesure et celles, « aussi grandes qu'on veut », que permet le calcul, avec l'exemple de l'approximation décimale d'une fraction.

La notion d'approximation n'est pas toujours exposée de façon claire aux enfants. Dans plusieurs livres de Sixième, on leur fait mesurer la longueur du cercle à l'aide de curvimètres ou de fil tendu. Après avoir calculé à 0,1 près, à cause de l'imprécision des instruments de mesure, le rapport entre cette longueur et celle du diamètre, on énonce « comme fait d'expérience que la longueur et le diamètre du cercle sont des grandeurs proportionnelles ». Puis on donne une « meilleure approximation » de π avec 7 décimales, sans autre explication. Les enfants s'imagineront peut-être que ces décimales ont été obtenues avec un fil mieux tendu, ou de meilleurs instruments ! Ne vaudrait-il pas mieux leur dire qu'on ne les a pas obtenues par une mesure, mais par un calcul qui n'est pas encore à leur portée ?

A propos du nombre π , une remarque anecdotique : feuilletant un livre de Sixième pour voir si les fractions, absentes du cours, sont néanmoins utilisées pour une « révision » dans les problèmes, la première fraction que je trouve est... $\frac{22}{7}$,

dans un conseil pour un calcul : prendre $\pi = \frac{22}{7}$ (je crois qu'il faut bannir absolument cette assimilation de π à un nombre rationnel).

Tous les problèmes d'indices, de taux, de pourcentages utilisent des fractions. Certes, ce sont des fractions décimales et il est normal de privilégier le système décimal. Mais dans les classes de Cinquième et parfois même plus tôt, les enfants étudient souvent les systèmes de numération non décimaux, ce qui est pour eux un exercice plein d'attrait et d'une grande valeur pédagogique (voir p. ex. l'article de M^{me} N. Picard dans *le Monde* du 12.9.1967). Alors, pourquoi ne pas étendre cette étude aux « sous-multiples de l'unité » où elle apporterait quelque chose de vraiment nouveau ?

7. Dans les projets de programme de Sixième et de Cinquième, je ne vois pas figurer l'étude sur des exemples de la divisibilité des entiers, qu'on enseigne pourtant actuellement en Cinquième. Cette étude serait nécessaire à celle des fractions ; elle s'inscrirait aussi tout naturellement dans l'étude « d'exemples de couples de fonctions

numériques f et g proportionnelles ». De plus, elle aurait l'avantage d'exercer les enfants aux opérations de multiplication et de division qui ne sont prévues dans les projets de programme que comme « exercices de contrôle », et permettrait en plus de faire un pas vers la *compréhension* de ces opérations (et pas seulement vers « l'acquisition de mécanismes »).

Enfin, l'étude de la divisibilité des entiers permet de nombreux exercices utilisant le vocabulaire des ensembles, et qu'au niveau de la Sixième et de la Cinquième, on trouve difficilement ailleurs en Mathématiques. Même des enfants aussi jeunes peuvent comprendre que le langage ensembliste, s'il peut être appliqué à n'importe quel objet, a été créé pour être appliqué aux Mathématiques... et non pas aux poires et aux pommes !

8. Les problèmes utilisant la division doivent être de deux sortes ; ceux pour lesquels la solution est nécessairement un nombre entier (mais ne « tombe » pas forcément « juste ») et pour lesquels on utilise la vraie « division euclidienne » avec quotient et reste, ou le quotient par excès : (ex. : un autocar peut contenir 37 personnes ; combien faut-il d'autocars pour transporter tant de personnes ?) ; d'autre part, les problèmes dont la solution doit être donnée sous forme de fraction, qu'on peut ensuite approcher par un nombre décimal.

En lisant les projets de programme de Sixième et de Cinquième, et en particulier en les comparant à l'enseignement actuel de Cinquième, on a l'impression que tout ce qui concerne la division, divisibilité etc... a été relégué vers les classes ultérieures. Tout se passe comme si on était pressé d'obtenir une structure d'anneau avec toutes ses propriétés ; pour les corps, on verra plus tard. Il y a là un esprit de système, certes dans le goût du jour, mais dont je ne vois pas l'intérêt pédagogique.

Ce que je propose ? De continuer en Sixième et en Cinquième l'étude des fractions commencée au Cours Moyen dans l'esprit du projet de l'A.P.M. ; ce qui n'empêchera pas d'introduire les entiers relatifs. Si l'on craint une surcharge des programmes, on sera peut-être obligé de renoncer à une étude approfondie de l'anneau $\mathbb{Z}$, et il ne sera pas question non plus de connaître toutes les propriétés du corps $\mathbb{Q}$. Mais quelle importance ? Il est, je crois, plus efficace d'habituer peu à peu les enfants à manipuler des objets mathématiques nouveaux que de leur présenter d'emblée une belle (et unique) structure.

Je souhaiterais vivement connaître le point de vue de nos collègues sur ces questions.

M^{me} Marianne Guillemot.
(Faculté des Sciences, Paris).

Notation et présentation de la mesure complexe d'un vecteur

La mesure complexe d'un vecteur dans le plan complexe généralise la mesure algébrique d'un vecteur sur un axe. On peut donc commencer par rappeler la définition et les propriétés de cette dernière, pour les étendre ensuite, presque mot à mot, à la première.

Nous désignons par $\overrightarrow{AB}$ le *vecteur*, classe d'équivalence dont le bipoint (A, B) est un représentant (1). La mesure algébrique de $\overrightarrow{AB}$ sur un axe est le réel, dont la

(1) Inutile de préciser que ce vecteur est *libre*, car « cela n'ajoute rien, que de la confusion », comme le dit justement J. Chevallier dans le *Bulletin* 263-264 (p. 318).