

« Il faut que les mathématiques domptent les écarts de notre raison; c'est le bâton des aveugles, on ne marche point sans elles... » Voltaire.

Groupes de nombres réels

Applications

Jean BASS

Faculté des Sciences, Paris.

On trouvera ici le texte de deux conférences faites au club mathématique du lycée Lakanal, devant des élèves de terminale C du lycée Lakanal, du lycée Marie-Curie et du lycée de Châtenay-Malabry.

En principe, il n'a pas été fait appel à des notions qui soient hors du programme de terminale C. Il a seulement fallu définir (ou rappeler) ce qu'on appelle borne inférieure d'un ensemble de nombres réels, et définir la notion d'ensemble dense sur un intervalle. L'objet des conférences était de tirer de ces deux notions, confrontées avec la notion, bien connue des élèves, de groupe, un ensemble important de conséquences.

Pendant quelques lignes, il a été cependant fait allusion aux points d'accumulation d'un ensemble de réels, au théorème de Bolzano-Weierstrass et aux ensembles compacts. Mais ces notions n'ont pas été utilisées dans la suite, et les lignes en question peuvent être sautées.

Certaines propriétés des groupes de nombres réels ont ensuite suggéré une étude plus précise de la répartition des suites de réels modulo 1. Dans cette étude, le concept de groupe s'efface. Mais d'autres outils deviennent nécessaires. Il a fallu écrire des intégrales définies, et l'on a admis que les élèves savaient intégrer non seulement les fonctions continues élémentaires, mais aussi les fonctions en escalier. Comme la définition précise de l'intégrale n'est pas au programme, on s'est volontairement abstenu de s'en servir, et cela a empêché de donner la démonstration des théorèmes de H. Weyl. Enfin, si l'on a été conduit à introduire le nombre complexe $z = \cos \theta + i \sin \theta$, on ne l'a pas représenté par la notation $e^{i\theta}$, qui n'est pas utilisée en terminale C.

Tout cela a parfois alourdi le langage. Mais il fallait choisir. Si l'on commence par introduire beaucoup de notions nouvelles (intégrale, exponentielle complexe, série trigonométrique), il ne reste pas de temps pour en développer les applica-

tions. Or ces notions sont classiques et font partie des programmes propédeutiques (mathématiques spéciales, premier cycle des facultés). Le but des clubs mathématiques n'étant pas de « prendre de l'avance », il a semblé préférable de montrer aux élèves comment, avec un matériel mathématique restreint, on peut aller relativement loin.

1. Introduction.

On suppose connues les notions de nombre entier, de nombre rationnel, réel, complexe, ainsi que celle de groupe. On va étudier quelques propriétés des groupes de nombres réels. Il s'agira de groupes *additifs*.

Un ensemble G de nombres réels est un groupe si les propriétés suivantes sont vérifiées :

G contient le nombre 0;

si G contient x , G contient $-x$;

si G contient x et y , G contient $x + y$.

L'associativité de l'addition dans G est, bien entendu, un cas particulier de l'associativité de l'addition des nombres réels en général.

On connaît des exemples de groupes G . Le plus simple est formé de l'unique élément 0. On le notera G_0 . Il n'est pas d'un grand intérêt.

Un groupe plus intéressant est le groupe G_a formé des multiples d'un réel a non nul. Les éléments de G_a sont de la forme $a \cdot n$, n entier positif, négatif ou nul. Il est clair que, pour obtenir tous les groupes G_a , il suffit de prendre tous les a positifs. Les éléments positifs de G_a sont donc :

$$a, 2a, \dots, na, \dots \quad (n \text{ entier} > 0)$$

On remarque que l'un d'eux, a , a la propriété d'être *le plus petit élément positif du groupe*.

Nous allons montrer que seul le groupe G_a a la propriété d'avoir un plus petit élément positif. Puis nous examinerons ce qui se passe pour un groupe G qui, en un certain sens, ne possède aucun élément positif inférieur à tous les autres.

Rappelons d'abord ce que l'on appelle *borne inférieure* d'un ensemble E de nombres réels. Supposons que E soit un ensemble borné (il suffit qu'il soit borné inférieurement). Il existe alors des nombres p tels que, quel que soit $x \in E$, on ait : $x \geq p$. Ces nombres sont appelés *minorants* de E .

On appelle *borne inférieure* de E le plus grand des nombres p , c'est-à-dire le plus grand minorant de E . C'est un nombre p_0 qui a la propriété suivante : quel que soit $\varepsilon > 0$ donné, il existe un élément x de E tel que $p_0 \leq x < p_0 + \varepsilon$. On démontre que tout ensemble borné de nombres réels admet une borne inférieure; la définition ci-dessus est donc consistante. La démonstration peut se faire de manières assez diverses suivant le mode de définition choisi pour les nombres réels. Elle ne sera donc pas donnée ici.

La borne inférieure p_0 peut, ou non, appartenir à E . Voici des exemples :

Exemple 1. — La borne inférieure de l'ensemble E des x tels que $1 \leq x \leq 2$ est $p_0 = 1$, qui appartient à E .

Exemple 2. — La borne inférieure de l'ensemble E des x tels que $1 < x < 2$ est $p_0 = 1$, qui n'appartient pas à E .

Exemple 3. — La borne inférieure des entiers positifs est 1, qui appartient à E .

Exemple 4. — La borne inférieure de l'ensemble E des nombres $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ est $p_0 = 0$, qui n'appartient pas à E .

Nous aurons besoin d'une autre notion : celle d'*ensemble dense*. Soit I un intervalle et E un sous-ensemble de I . On dit que E est *dense* dans I si tout intervalle appartenant à I contient un point de E . Il en résulte évidemment que tout intervalle contient une infinité de points de E .

On exprime que l'ensemble E de points x est dense sur I à l'aide de l'inégalité suivante : soient y un point arbitraire de I et ε un nombre positif arbitraire. Il existe un $x \in E$ tel que $|x - y| < \varepsilon$. Cela revient à dire que : tout intervalle $]y - \varepsilon, y + \varepsilon[$ contient un point x de E (cela même si l'intervalle déborde de I).

De même, un ensemble E de points d'une circonférence Γ est *dense sur* Γ , si tout arc de Γ contient un point de E .

Exemples : l'ensemble des rationnels est dense sur $\mathbb{R}$, car entre deux réels, il y a toujours un rationnel. L'ensemble des rationnels positifs et inférieurs à 1 est dense sur le segment $[0, 1]$.

2. Théorème fondamental.

Théorème.

Si l'ensemble des éléments positifs d'un groupe G de nombres réels admet une borne inférieure positive, G est constitué par les multiples n.a d'un réel a .

Si l'ensemble des éléments positifs de G admet pour borne inférieure le nombre 0, alors G est dense sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. — Supposons que les éléments positifs de G admettent une borne inférieure positive a . Montrons d'abord que a appartient à G .

Donnons un nombre $\varepsilon > 0$, inférieur à a . Dans l'intervalle fermé $[a, a + \varepsilon]$, il y a, par définition de a , un élément x de G . Supposons que x ne coïncide pas avec a . Alors entre a et x , il y a, pour la même raison, un élément $x' \neq x$ de G . Comme G est un groupe $(x - x')$ est un élément de

G et l'on a $0 < x - x' < \varepsilon$ ($< a$). Il y aurait donc un élément positif de G inférieur à a , contrairement à la définition de a . Donc x coïncide avec a et a appartient à G . Dans l'intervalle fermé $[a, a + \varepsilon]$, il n'y a pas d'autre élément de G que a . G a donc un *plus petit élément positif*.

Soit maintenant x un élément quelconque de G . Si n est la partie entière du réel $\frac{x}{a}$, on a $\frac{x}{a} = n + r'$, avec r' réel tel que $0 \leq r' < 1$. Si l'on pose $r = ar'$, alors $x = an + r$ avec $0 \leq r < a$. Or $an \in G$. Comme $x \in G$, $x - an = r \in G$. Mais alors r , élément de G , est non négatif et inférieur à a , ce qui n'est possible que si $r = 0$. Donc tous les éléments de G sont de la forme $a.n$. La première partie du théorème est ainsi démontrée.

Passons à la seconde partie. Par hypothèse, on peut trouver $x \in G$ tel que $0 < x < \varepsilon$, où ε est un nombre positif arbitrairement petit. Les nombres nx sont, pour tout entier n , des éléments de G . Mais tout intervalle fermé $[a, b]$, de longueur ε , contient un point de la suite des nx . Comme on peut choisir ε arbitrairement, on voit que tout intervalle de $\mathbb{R}$ contient un point de G . G est donc dense sur $\mathbb{R}$ et la seconde partie du théorème est démontrée.

Remarque : on déduit du théorème précédent l'énoncé suivant, qui en est une variante : les éléments d'un groupe G de réels sont denses sur $\mathbb{R}$ si et seulement si les éléments positifs de G admettent zéro pour borne inférieure.

3. Exemples.

Soit α et β deux nombres réels non nuls. Si n et p sont deux entiers, on voit immédiatement que l'ensemble des nombres $x = \alpha n + \beta p$ est un groupe G de réels.

Distinguons alors deux cas :

Premier cas : $\frac{\alpha}{\beta}$ est un nombre rationnel. Il existe deux entiers α_1 et β_1 non nuls tels que $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha_1}{\beta_1}$ ou $\frac{\alpha}{\alpha_1} = \frac{\beta}{\beta_1} = r$, r réel. Donc $x = r(\alpha_1 n + \beta_1 p)$. Or l'ensemble des nombres $\alpha_1 n + \beta_1 p$ est un groupe dont les éléments sont des entiers. Il a donc un plus petit élément positif, égal ou supérieur à 1. Il existe donc γ_1 tel que $\alpha_1 n + \beta_1 p = \gamma_1 q$, q entier, et $x = (r\gamma_1)q$.

Le groupe G coïncide alors avec le groupe $G_{(r\gamma_1)}$ des multiples de $r\gamma_1$. On notera que, pour q donné, il y a plusieurs valeurs possibles de n et p . Par exemple l'élément neutre de G ($q = 0$) est obtenu pour tous les couples n, p tels que $\frac{n}{\beta} = -\frac{p}{\alpha_1}$.

Deuxième cas: $\frac{\alpha}{\beta}$ est irrationnel. Montrons qu'il n'existe pas de nombre a tel que $\alpha n + \beta p = aq$, q entier. Si n et p ne sont pas nuls, q ne peut être nul. Car la condition $q = 0$ entraînerait $\alpha n + \beta p = 0$, ou $\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{p}{n}$, et $\frac{\alpha}{\beta}$ serait rationnel. Soient alors n' , p' deux entiers tels que $n'p - np' \neq 0$. À n' , p' correspond un nombre q' non nul. En éliminant a entre les relations

$$\alpha n + \beta p = aq, \quad \alpha n' + \beta p' = aq',$$

on obtient

$$\frac{\alpha n + \beta p}{\alpha n' + \beta p'} = \frac{q}{q'}, \quad \text{ou} \quad \alpha (nq' - n'q) = \beta (p'q - pq').$$

Les nombres $nq' - n'q$ et $p'q - pq'$ ne sont pas nuls en même temps, car on aurait alors

$$\frac{n}{n'} = \frac{q}{q'} = \frac{p}{p'}$$

ce qui contredit la condition $n'p - np' \neq 0$. Dans ces conditions,

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{p'q - pq'}{nq' - n'q}$$

est rationnel, contrairement à l'hypothèse.

Or l'ensemble des nombres $\alpha n + \beta p$ est un groupe G de réels. S'il ne coïncide pas avec les multiples d'un nombre a , on peut affirmer qu'il est dense sur $\mathbb{R}$. Donc :

Théorème: Si $\frac{\alpha}{\beta}$ est irrationnel, l'ensemble des nombres $\alpha n + \beta p$, pour tous les couples d'entiers n, p , est dense sur $\mathbb{R}$.

Expression du résultat. Soit y un réel quelconque. Dans l'intervalle $]y - \varepsilon, y + \varepsilon[$, où ε est donné, il y a un point $\alpha n + \beta p$. Autrement dit : y et ε étant donnés, il existe deux entiers n et p tels que $|\alpha n + \beta p - y| < \varepsilon$.

4. Première application.

On recouvre un plan par un quadrillage régulier, formé de carrés, de côté a , parallèles aux axes Ox et Oy . Soit M le sommet d'un de ces carrés, c'est-à-dire le point de coordonnées $(a.n, a.p)$, n et p entiers. On projette M en M' sur l'axe Ox , « parallèlement à une direction D » de coefficient directeur λ irrationnel.

Théorème: l'ensemble des points M' est dense sur Ox .

En effet, la droite $M'M$ a pour équation $y - ap = \lambda(x - a.n)$.

L'abscisse de M' est donc $x = a.n - \frac{a}{\lambda}p$.

L'ensemble des x est un groupe G de nombres réels du type étudié ci-dessus. Comme le rapport $\frac{a}{\lambda} = \lambda$ est irrationnel, ce groupe est dense sur $\mathbb{R}$.

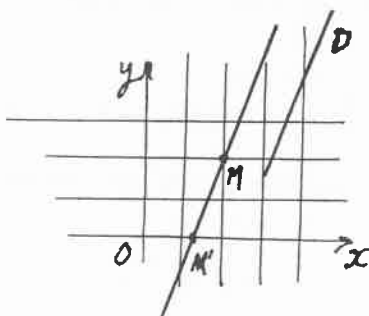


FIG. 1.

On en déduit par exemple qu'on peut trouver deux points M et M_1 , dont les projections sont aussi rapprochées qu'on le désire. Réciproquement, soit M' un point de Ox . Menons par M' une droite D' parallèle à D . Il existe un sommet M du quadrillage dont la distance à D' est aussi petite qu'on le désire. Mais, en général, la droite D' ne passe par aucun des points M (sauf si « $M' \in G$ »).

5. Deuxième application.

On dispose de couples de roues dentées fournissant les démultiplications 2 et 3 et aussi, par conséquent, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$. On va montrer que, avec un nombre fini de tels couples, on peut approcher d'autant près qu'on le veut une démultiplication ω donnée (rationnelle ou non).

n démultiplications 2 donnent un rapport de vitesses angulaires (ou d'angles de rotation) 2^n ; n est un entier positif, négatif ou nul. De même p démultiplications 3 donnent 3^p .

On veut trouver n et p de manière à résoudre aussi exactement que possible l'équation $2^n 3^p = \omega$.

Cette équation s'écrit aussi : $n \log 2 + p \log 3 = \log \omega$ où les logarithmes sont par exemple de base 10.

Or $\frac{\log 3}{\log 2}$ est un nombre irrationnel. Si en effet il existait deux nombres entiers a et b tels que $\frac{\log 3}{\log 2} = \frac{b}{a}$, on aurait $a \log 3 = b \log 2$, ou $3^a = 2^b$.

Or c'est impossible, puisque 3^a n'est pas un nombre pair. Comme l'ensemble des nombres $n \log 2 + p \log 3$ est dense sur $\mathbb{R}$, on peut trouver n et p de façon que $n \log 2 + p \log 3$ diffère aussi peu qu'on le désire de $\log \omega$.

Pour trouver effectivement n et p , le plus simple est de procéder graphiquement. On trace sur papier quadrillé la droite qui a pour équation $x \log 2 + y \log 3 = \log \omega$ et on cherche à vue les points (n, p) qui sont voisins de cette droite. On calcule ensuite, avec les valeurs ainsi choisies pour (n, p) la valeur exacte de $n \log 2 + p \log 3$ et on la compare numériquement à $\log \omega$.

Exemple: $\omega = 365$, ... Ce problème se pose pour construire avec des engrenages un planétaire représentant correctement le mouvement de la Terre autour du Soleil.

On a $\log 2 = 0,30103...$; $\log 3 = 0,47712...$; $\log 365 = 2,5623...$

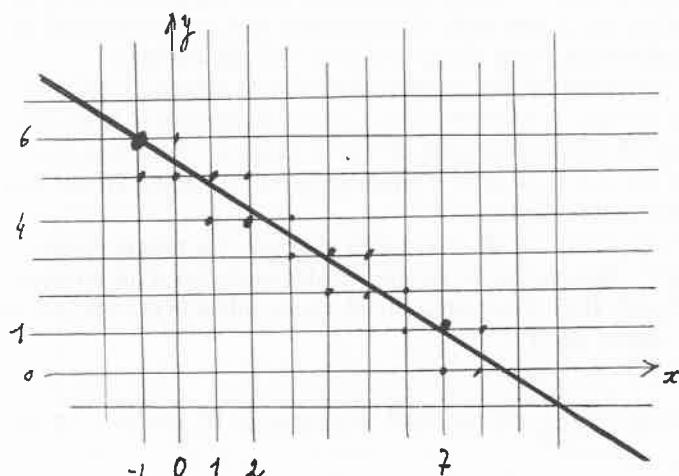
On construit donc facilement la droite d'équation $x \log 2 + y \log 3 = \log \omega$.

Cette droite passe très près des points $(x = 7, y = 1)$ et $(x = 2, y = 4)$.

On a $2^7 \times 3 = 128 \times 3 = 384$; $2^2 \times 3^4 = 4 \times 81 = 324$.

Ce sont des approximations médiocres. Une solution plus précise est donnée par $x = -1, y = 6$, car $\frac{3^6}{2} = \frac{729}{2} = 364,5$.

La figure a été faite sans précision. Cela importe peu. Elle sert seulement à deviner les couples (n, p) qui fournissent une approximation raisonnable. Prévoir, par le calcul, un ordre de grandeur de l'erreur commise serait un problème beaucoup plus difficile.



6. Troisième application.

Entre les *nombre*s réels et les *points* d'une droite, il y a une correspondance biunivoque. Or, lorsqu'on parle de groupe de réels, la notion géométrique correspondante n'est pas celle de points, mais plutôt celle de *vecteurs*, ou encore de *déplacements*. On choisit sur la droite une origine O . A tout nombre x correspond un point M , qui définit un vecteur $\overrightarrow{OM}$.

L'opération du groupe additif des réels est une addition de vecteurs, ou une composition de déplacements. Un groupe de réels s'interprète aussi comme un groupe de déplacements.

Cherchons maintenant à établir une correspondance entre les nombres réels et les points d'un *cercle*. Ce sera, pour fixer les idées, le cercle Γ de centre O et de rayon 1, orienté dans le sens usuel.

A tout nombre réel θ , on fait correspondre une *rotation* d'angle θ ; θ peut aussi être interprété comme l'*argument* d'un nombre complexe de module 1, affixe d'un point de Γ . Mais un point de Γ est l'image d'une infinité de nombres réels. Si θ est l'un d'eux, tous les autres sont de la forme, $\theta + 2k\pi$, k entier. Ne pas distinguer ces nombres, c'est considérer les réels *modulo* 2π . L'ensemble des nombres réels équivalents (ou congrus) à un nombre θ , modulo 2π , constitue une classe d'équivalence. Il y a correspondance biunivoque entre les points du cercle et les classes de nombres réels modulo 2π .

En langage géométrique, on ne retient de chaque rotation que son effet en tant que transformation géométrique.

On peut interpréter d'une autre façon la différence entre la droite $\mathbb{R}$ et le cercle Γ . Sur $\mathbb{R}$, il existe des ensembles infinis de *points* qui n'ont pas de point d'accumulation : on ne peut en extraire aucune suite convergente. Autrement dit le théorème de Bolzano-Weierstrass n'est pas vérifié sur $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ n'est pas *compact* (exemple d'un tel ensemble : le groupe $\{na\}$ des multiples d'un nombre réel a non nul). Au contraire, tout ensemble infini de *points* du cercle Γ admet un point d'accumulation : Γ est compact.

Cela va entraîner des conséquences sur la structure des groupes sur Γ . Soit G un groupe de nombres réels. Considérés modulo 2π , les éléments de G constituent un nouveau groupe G' sur le cercle Γ . Pour construire les points images de G' sur Γ , il suffit d'enrouler sur Γ la droite $\mathbb{R}$, sur laquelle on a marqué les points de G .

Si G est dense sur $\mathbb{R}$, il est bien clair que les points images de G' sont denses sur Γ . Mais le cas du groupe G_a des multiples d'un nombre a doit être examiné à part. Il n'est pas dense sur $\mathbb{R}$, et cependant le groupe $\{n\theta\}$ modulo 2π peut être dense sur Γ .

Théorème : Si $\frac{\theta}{2\pi}$ est rationnel, le groupe $\{n\theta\}$ modulo 2π est fini.

Si $\frac{\theta}{2\pi}$ est irrationnel, le groupe $\{n\theta\}$ modulo 2π est dense sur Γ .

Cela veut dire que l'ensemble des *points* A_n ayant pour angles polaires les multiples $n\theta$ de θ est fini dans le premier cas, infini et dense sur Γ dans le second cas.

Démonstration: Si $\frac{\theta}{2\pi}$ est de la forme $\frac{p}{q}$, p et q entiers premiers entre eux, on a $q\theta = 2p\pi$.

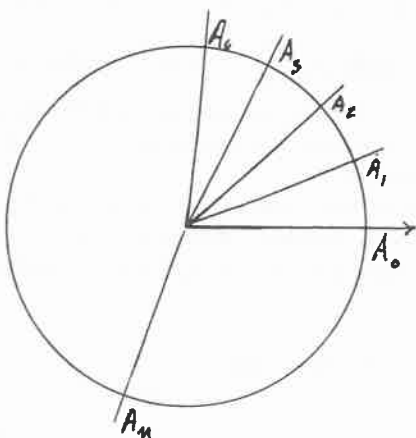


FIG. 3.

Donc le q^{e} point A_q coïncide avec le point initial A_0 sur Γ . Il y a donc q points distincts $A_0, A_1, \dots, A_{q-1}$. Le groupe de réels $n\theta$ est infini, mais le groupe $\{n\theta\}$ modulo 2π est fini.

Si maintenant $\frac{\theta}{2\pi}$ est irrationnel, on veut montrer que, quels que soient φ_0 et $\varepsilon > 0$, il existe un *point*, d'angle polaire $n\theta$, tombant dans l'arc de Γ défini par $\varphi_0 - \varepsilon < \varphi < \varphi_0 + \varepsilon$.

Or la position de ce point n'est définie qu'à $2p\pi$ près. On cherche donc deux entiers n et p tels que

$$\varphi_0 - \varepsilon < n\theta + 2p\pi < \varphi_0 + \varepsilon.$$

Comme $\frac{\theta}{2\pi}$ est irrationnel, on est ramené au groupe du paragraphe 3, avec $\alpha = \theta$, $\beta = 2\pi$. On sait que ce groupe est dense sur $\mathbb{R}$ et l'existence de nombres n et p est ainsi prouvée.

7. Quelques résultats plus précis. Distributions uniformes.

Nous avons vu que, si $\frac{\theta}{2\pi}$ est irrationnel, la suite $0, \theta, 2\theta, \dots, n\theta, \dots$ définit sur le cercle unité une suite dense de points.

On peut trouver un entier p tel que $0 \leq n\theta - 2p\pi < 2\pi$ ou

$$0 \leq \frac{\theta}{2\pi} n - p < 1.$$

$\frac{\theta}{2\pi} n - p$ apparaît comme la *partie décimale*, ou partie fractionnaire, du réel $\frac{\theta}{2\pi} n$. Remplacer $\frac{\theta}{2\pi} n$ par $\frac{\theta}{2\pi} n - p$, c'est définir $\frac{\theta}{2\pi} n$ modulo 1.

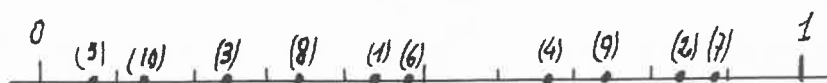
Posons pour simplifier, $\frac{\theta}{2\pi} = A$ et considérons la suite de nombres $x_n = n \cdot A \pmod{1}$, ordonnée suivant les valeurs croissantes de n .

Les résultats précédents expriment que, *si A est irrationnel, la suite x_n est dense sur le segment $[0,1]$.*

Donnons-nous un intervalle $]a, b[$ intérieur à $[0,1]$.

Considérons les N premiers points $x_1, x_2, \dots, x_N$. Un certain nombre d'entre eux, N' , se trouvent dans $]a, b[$. Leur « fréquence relative » est la fraction $\frac{N'}{N}$.

Exemple: $A = \sqrt{2}$, $N = 10$.



n	$n \cdot A$	$x_n = nA \pmod{1}$
1	1,4142	0,4142
2	2,8284	0,8284
3	4,2426	0,2426
4	5,6569	0,6569
5	7,0711	0,0711

n	nA	$x_n = nA \pmod{1}$
6	8,4853	0,4853
7	9,8995	0,8995
8	11,3137	0,3137
9	12,7279	0,7279
10	14,1421	0,1421

Dans le segment $[0,3 < x < 0,8]$, il y a $N' = 5$ des $N = 10$ points. $\frac{N'}{N} = \frac{5}{10} = 0,5$. $\frac{N'}{N}$ s'appelle la fréquence de ceux des N' premiers points qui se trouvent dans l'intervalle $]a, b[$.

La fréquence $\frac{N'}{N}$ tend-elle vers une limite lorsque $N \rightarrow \infty$? On démontre le théorème suivant :

Théorème: lorsque $N \rightarrow \infty$, $\frac{N'}{N}$ a une limite égale à la longueur de l'intervalle $]a, b[$.

Ce théorème est un cas particulier d'un théorème beaucoup plus général. Pour énoncer celui-ci, donnons d'abord une définition.

Définition. — Soit x_n une suite de réels compris entre 0 et 1. Soit $]a, b[$ un intervalle intérieur à $]0, 1[$. Supposons que parmi les N premiers nombres de la suite, il y en ait N' dans $]a, b[$.

Si, quel que soit l'intervalle $]a, b[$, le rapport $\frac{N'}{N}$ tend, lorsque $N \rightarrow \infty$, vers une limite égale à $b - a$, on dit que la suite est *équirépartie* sur l'intervalle $]0, 1[$.

Un théorème dû à H. Weyl (1916) permet de reconnaître si une suite est équirépartie sur $[0, 1]$ ou, ce qui revient au même, si une suite x_n de nombres réels est équirépartie modulo 1.

Théorème : *soit x_n une suite de nombres compris entre 0 et 1. Soit f une fonction continue, à valeurs réelles ou complexes, de la variable réelle x , définie pour $0 \leq x \leq 1$.*

Si, quelle que soit f , on a l'égalité :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_N)}{N} = \int_0^1 f(x) dx,$$

alors la suite x_n est équirépartie sur $[0, 1]$. Réciproquement, si la suite x_n est équirépartie sur $[0, 1]$, alors l'égalité ci-dessus est vérifiée pour toute fonction f continue.

Remarque. — On peut remplacer « f continue » par « f intégrable ». Par exemple, on peut prendre pour f une fonction en escalier.

La démonstration de la première partie de ce théorème est facile. Il suffit de prendre pour f l'indicateur de l'intervalle $]a, b[$, c'est-à-dire la fonction égale à 1 sur $]a, b[$ et à 0 en dehors.

La démonstration de la seconde partie exige de connaître des propriétés élémentaires des fonctions intégrables.

L'interprétation de l'énoncé est simple. Il y a égalité entre deux moyennes : la valeur moyenne de f sur $[0, 1]$, et la limite de la moyenne arithmétique des nombres $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_N)$.

Ce théorème est parfois difficile à utiliser. Mais il possède une variante plus commode, dont voici l'énoncé :

Théorème : *si, quel que soit l'entier k non nul, les deux moyennes*

$$\frac{\cos 2\pi k x_1 + \dots + \cos 2\pi k x_N}{N} \quad \text{et} \quad \frac{\sin 2\pi k x_1 + \dots + \sin 2\pi k x_N}{N}$$

tendent vers zéro lorsque $N \rightarrow \infty$, la suite x_n est équirépartie sur $[0, 1]$. Réci-

proquement, si la suite x_N est équirépartie sur $[0,1]$, les deux moyennes ci-dessus tendent vers 0 avec $\frac{1}{N}$.

La seconde partie de ce théorème résulte facilement du premier théorème. Il suffit de choisir $f(x) = \cos 2\pi kx$ ou $f(x) = \sin 2\pi kx$ et de remarquer que

$$\int_0^1 \cos 2\pi kx \, dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 \sin 2\pi kx \, dx = 0.$$

La première partie est moins élémentaire.

Remarque : dans ce second théorème, on peut dire indifféremment : suite x_n de nombres compris entre 0 et 1 ou suite x_n modulo 1. En effet, ajouter un entier à x_n ne modifie pas les cosinus et sinus.

8. Application à la suite nA .

Vérifions que la suite nA est équirépartie modulo 1. Il faut calculer les sommes

$$S = \cos 2\pi kA + \dots + \cos 2\pi kAN \quad \text{et} \quad T = \sin 2\pi kA + \dots + \sin 2\pi kAN$$

Or si $z = \cos 2\pi kA + i \sin 2\pi kA$, on a

$$S + iT = z + z^2 + \dots + z^N = z \frac{z^N - 1}{z - 1}.$$

Il est plus commode d'introduire, au lieu de z , le nombre complexe $u = \cos \pi kA + i \sin \pi kA$.

En effet, $z = u^2$ et $S + iT = \frac{u^2(u^{2N} - 1)}{u^2 - 1}$. Comme $\frac{1}{u} = \bar{u}$ (conjugué de u) :

$$\begin{aligned} S + iT &= \frac{u^{N+1}(u^N - \bar{u}^N)}{u - \bar{u}} = u^{N+1} \frac{\sin N\pi kA}{\sin \pi kA} \\ &= [\cos (N+1)\pi kA + i \sin (N+1)\pi kA] \cdot \frac{\sin N\pi kA}{\sin \pi kA} \end{aligned}$$

Donc :

$$S = \frac{\sin N\pi kA \cdot \cos (N+1)\pi kA}{\sin \pi kA}, \quad T = \frac{\sin N\pi kA \cdot \sin (N+1)\pi kA}{\sin \pi kA}$$

Si A est irrationnel, et si k est un entier non nul, $\sin \pi kA$ n'est pas nul.

$$\text{Par suite } \left| \frac{S}{N} \right| \leq \frac{1}{|\sin \pi kA|} \cdot \frac{1}{N} \quad \text{et} \quad \left| \frac{T}{N} \right| \leq \frac{1}{|\sin \pi kA|} \cdot \frac{1}{N}$$

$\frac{S}{N}$ et $\frac{T}{N}$ tendent vers 0 lorsque $N \rightarrow \infty$. Il en résulte que la suite nA est équirépartie modulo 1.

Remarque. — Ce résultat entraîne que la suite nA est dense modulo 1. Il fournit donc une nouvelle démonstration de la propriété de densité, qui avait été prouvée d'abord à l'aide des propriétés des groupes de nombres réels.

9. Autre exemple de suite équirépartie.

Les théorèmes de Weyl permettent de construire des suites équiréparties plus générales que la suite $nA \pmod{1}$. Voici, sans démonstration, un résultat intéressant :

Si A est irrationnel, la suite A_n^p est équirépartie (mod. 1) pour tout entier $p > 0$.

Plus généralement, soit $\varphi(x) = Ax^p + A_1x^{p-1} + \dots + A_{p-2}x^2 + A_{p-1}x + A_p$ un polynôme de degré $p \geq 1$. Si l'un au moins des coefficients (à l'exception de A_p) est irrationnel, alors la suite $\varphi(n)$ est équirépartie modulo 1. La démonstration de ce théorème se fait par une méthode de récurrence qui dépasse le niveau de cet exposé. Par contre, il est assez simple de montrer directement le résultat suivant : la suite $\sqrt[n]{n}$ est équirépartie modulo 1.

COLLECTION **U**

vient de paraître :

MÉCANIQUE

M.P. et P.C., Spéciales A A' B B'

Pierre BROUSSE

professeur à la Faculté des Sciences de Paris

Une présentation moderne des fondements de la mécanique combinant l'analyse détaillée des situations concrètes, les méthodes de la logique et le langage des mathématiques. Nombreux exemples et applications.

Un volume de la série « Mathématiques » dirigée par André Revuz, professeur à la Faculté des Sciences de Paris, 464 pages, cartonné : 44,30 F

ARMAND COLIN