

bulletin de l'association des
professeurs de mathématiques
de l'enseignement public

“ de la Maternelle aux Facultés ”

Groupes de réels • Fractions • Relations • Anneau des
entiers • Écussons • Miettes d'un festin •
Programmes de Seconde • Agrégation 68

Association des Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement Public.

29, rue d'Ulm - Paris (5^e)

Président d'Honneur :

M. A. HENNEQUIN.

Bureau national de l'A.P.M.E.P.

Présidente :

M^{me} TOUYAROT, 30, avenue du 6 Juin, 14-Caen.

Vice-Présidents :

Adresser aux vice-présidents les questions relatives à l'ordre d'enseignement dans lequel ils exercent.

Enseignement élémentaire : M. BROUSSEAU, 3, rue A.-Briand, 33-Cenon.

Second degré, premier cycle : M. DUMONT, 6, place Porcaro, 78-Saint-Germain-en-Laye (tél. 963-46-01).

Second degré, second cycle : M. COLOMB, 44, rue Paul-Hovelin, 69-Sainte-Foy-lès-Lyon.

Second degré technique : M. GENESTINE, 6, rue Marcellin-Berthelot, 92-Clichy.

Écoles Normales : M^{me} AUDIN, 3, avenue Pierre-Grenier, 92-Boulogne-Billancourt.
Classes préparatoires aux Grandes Écoles : M. RAMIS, 35, rue Pierre-Nicole, Paris, 5^e (tél. 633-09-48).

Enseignement supérieur : M. REVUZ, 16, rue de Rome, 78-Les Essarts-le-Roi (tél. 55).

Secrétaires généraux :

M. VISSIO, 15, rue Jean-Giraudoux, 92-Sceaux (tél. 350-18-98).

M. GILBERT, 33 bis, rue Champ-la-Garde, 78-Versailles (tél. 950-53-81).

Secrétaires :

Animation des Régionales : M. GAUTHIER, 11, bd des Brotteaux, 69-Lyon, 6^e (tél. 78-24-00-93).

Relations internationales : M. GLAYMANN, 14, rue de Chavril, 69-Sainte-Foy-lès-Lyon (tél. 78-51-93-76).

M. D. BERNARD, 1, rue de Turenne, 67-Strasbourg.

Relations avec les autres associations : M. BLANZIN, 150, avenue Félix-Faure, Paris, 15^e (tél. 250-16-41). M. VISSIO.

Trésorier :

M. CLOPEAU, 12, bd Desgranges, 92-Sceaux (tél. 702-60-27).

Trésorier administratif :

M. FERRACCI, 151, avenue Foch, 92-Saint-Cloud.

Secrétaire administratif (expédition des brochures, réclamations relatives au service du *Bulletin*, etc...) :

M. A. BLONDEL, 154, avenue Marcel-Cachin, 92-Chatillon-sous-Bagneux.

Commissions.

Commission « Recherche et Réforme » : secrétaire : M. ROUMANET, 58, rue de l'Amiral Mouchez, Paris, 14^e.

Formation des maîtres : M. DEHAME, 22, avenue de la Libération, 86-Poitiers.

Formation continue : M. DUVERT, 10, avenue du Point-du-Jour, 69-Lyon, 5^e.

Expérimentation : 1^{er} degré : M. JACQUEMIER, 9, rue Jean-Bocq, 38-Grenoble.

2^e degré : M. GOURET, 32, rue des Essarts, 69-Bron.

Commission du Dictionnaire : M. CHASTENET DE GÉRY, 4, rue des Capucins, 92-Meudon-Bellevue (tél. 027-48-48). M. CHEVALLIER, 37, avenue Anatole-France, 94-Saint-Maur (tél. 472-64-68).

Commission des moyens audio-visuels : M. POLY, 16, rue Germain-Pilon, Paris-18^e (tél. 255-31-30).

Comité de rédaction du Bulletin.

Président : M^{me} TOUYAROT.

Directeur du Bulletin : M. VISSIO.

Membres : MM. CHEVALLIER, DUMONT, GILBERT, GLAYMANN, ITARD, JACQUEMIER, ROUMANET, WALUSINSKI.

Sommaire

ACTUELLE.

- 421 Du côté de chez Swann...

LE BATON DES AVEUGLES.

- 425 Jean BASS : Groupes de nombres réels. Applications.

ÉCHANGES.

- 439 J. CHEVALLIER : Matériaux pour un dictionnaire.
M. GUILLEMOT : Encore les fractions.
E. EHRHART : Notation et représentation de la mesure complexe d'un vecteur.
GUERBER et HENNEQUIN : Enquête sur l'enseignement des probabilités.

Parmi nos lettres.

- M DUMONT : A propos de l'industrie « scolaire ».
L. DUVERT : Des « Cercles de Mathématique Moderne » pour les adultes.

Questions et réponses.

...DANS NOS CLASSES.

- 469 M. GLAYMANN : Les relations.
E. DEHAME : L'anneau des entiers en Cinquième.
J. COMMEAU : Économies.

LES LIVRES.

- 515 Jean ITARD : Les miettes du festin.
M. DUMONT : Pour la rénovation de l'enseignement élémentaire.
A. DONEDDU : Calcul infinitésimal.
A. CHEVALIER et J. CHACRON : Les nouvelles mathématiques en Sixième.
Textes à relire : Ostrogradsky, Lagrange, Palmade.
W. MOUNTEBANK : Carnet de lecture.

DOCUMENTATION.

- 529 Programmes de Seconde A, C, T.
En lisant le B.O.
Agrégation 1968.

LA VIE DE L'ASSOCIATION.

- 551 Réunion du Bureau, 21 septembre 1968.
Réunion du Comité, 13 octobre 1968.
Régionalisons : Clermont, Lyon, La Seyne-sur-Mer, Nantes.
Le bloc-notes de l'A.P.M.

Le Bulletin 265 contient de plus deux fiches de « *La mathématique parlée par ceux qui l'enseignent* » : diviseur, rapport.

Les annonces : Aristo (couv. 4), Belin (528), Bordas (467), Colin (437), Desvigne (575), Dunod (424, 438), Gauthier-Villars (550), Graphoplex (576), Magnard (573), Masson (513), Nathan (514), Vuibert (couv. 3), Wesmaël (468, 574).

Le coin du Trésorier

Adresse de l'A.P.M.E.P.
29, rue d'Ulm, Paris, 5^e
C.C.P. Paris 5708-21

Les cotisations et les abonnements sont valables pour l'année civile, du 1^{er} janvier au 31 décembre 1968. Tarifs :

Cotisation. — Elle comprend l'abonnement au *Bulletin* et le service des fascicules d'énoncés.

Cotisation normale 22 F

Cotisation réduite (stagiaire C.P.R., élèves des E.N.S. et des I.P.E.S., jeunes gens effectuant leur service militaire, retraités) 12 F

Abonnement. — Pour les personnes n'appartenant pas à l'Enseignement Public, pour les collectivités, les bibliothèques, ..., en France et à l'étranger 30 F

Prix de vente au numéro 5 F

Modes de paiement.

Les Collègues sont instamment priés de se conformer strictement à la procédure suivante :

1^o Pour les renouvellements sans changement d'adresse ou d'affectation, envoyer purement et simplement un virement postal en indiquant au dos le numéro d'inscription ; c'est le numéro qui est porté sur la carte de membre ainsi que sur la bande d'envoi du *Bulletin*.

2^o Signaler au siège de l'A.P.M.E.P. tout changement (adresse, état civil, affectation, etc...) de la manière suivante : porter sur une feuille l'ancienne adresse, l'ancien état civil, etc., rappeler le numéro d'inscription à l'A.P.M.E.P., puis donner les renseignements nouveaux : adresse, état civil, affectation.

3^o Pour les adhésions nouvelles, pour les abonnements nouveaux, adresser au siège de l'A.P.M.E.P., sous enveloppe timbrée à 0,30 F, une fiche rose d'inscription et le virement postal correspondant (les trois volets).

Recommandations à tous : pour simplifier le travail du secrétariat, veuillez effectuer un virement postal par cotisation. Veuillez n'employer que le virement postal sur le compte de l'A.P.M.E.P.

Publications de l'A.P.M.E.P.

Les brochures et publications spéciales de l'A.P.M.E.P. ne sont pas en vente en librairie. Voir p. 4 les conditions de vente et la liste des titres disponibles.

Recommandations aux correspondants d'établissement.

Dans les établissements ou dans les localités où un Collègue veut bien assumer la responsabilité de *Correspondant de l'A.P.M.*, celui-ci est invité :

1^o à s'assurer que tous les Collègues membres de l'A.P.M. se conforment bien aux recommandations générales rappelées ci-dessus pour le versement des cotisations ; en particulier s'il regroupe les virements, nous lui demandons de ne pas les regrouper en un seul virement, mais de vérifier qu'il y a un virement par cotisation ;

2^o à réclamer des fiches roses d'inscription pour les nouveaux adhérents en écrivant pour cela au siège de l'A.P.M.E.P. ;

3^o à dresser en double exemplaire une liste des adhérents de son établissement ou de sa localité et d'envoyer un exemplaire au secrétaire de la Régionale A.P.M. de son académie et un exemplaire au secrétaire de la section départementale.

Le Bureau et le secrétariat de l'A.P.M.E.P. remercient les correspondants de l'A.P.M. d'aider ainsi au bon fonctionnement de notre petite administratilon.

Les Régionales de l'A.P.M.E.P.

Dans chaque académie, il existe une section régionale de l'A.P.M.E.P. qui organise diverses activités pédagogiques et qui s'organise elle-même librement. En particulier, dans certains départements, des sections départementales se réunissent et sont rattachées à la Régionale de l'académie.

Pour chaque Régionale ou section, nous donnons le nom et l'adresse d'un responsable, président ou secrétaire, qui fournira des renseignements complémentaires sur les activités de l'association dans la région ou le département.

- Aix-Marseille : M^{lle} MABILLY, 136, bd National, 13-Marseille 3^e.
- Amiens : M. DUCHEUX, 44, rue Gustave-Charpentier, 80-Amiens.
- Besançon : M. ROBBE, Les Prés-Cottreaux, 39-Salins-les-Bains, (Tél. 167).
- Bordeaux : M. SIGNORET, lycée Montaigne, 33-Bordeaux.
- Caen : M. LETERRIER, 34, avenue du 6-Juin, 14-Caen.
- Clermont-Ferrand : M. ALMERAS, 74, bd de l'Eclache, 63-Royat.
- Dijon : M. VOGT, lycée Carnot, bd Thiers, 21-Dijon.
- Section de Mâcon : M^{me} CHAUSSIER, 32, rue de la Liberté, 71-Mâcon.
- Grenoble : M. KUNTZMANN, B.P. 7, 38-Saint-Martin-d'Hères.
- Section de Chambéry : M. COMPAIN, lycée technique, 1, rue du Coloubier, 73-Chambéry.
- Lille : M. LEGRAND, professeur, lycée Faidherbe, 59-Lille.
- Limoges : M. CRUZ, 11, rue Lamartine, 87-Bellac.
- Lyon : M. ANGUENOT, 103, rue Pasteur, 69-Caluire.
- Section de Saint-Etienne : M. VERSET, 2, rue Laurent-Charles, 42-Saint-Chamond.
- Montpellier : M. CALCINE, rue des Eglantiers, 34-Montpellier.
- Nantes : M. DES COGNETS, 11, rue Gl-de-Sonis, 44-Nantes.
- Nancy : M. B. MERCIER, 48, rue Jacques-Gruber, 54-Nancy.
- Nice :
- Orléans : M. HEUZÉ, dépt de mathématiques, faculté des sciences, 45-Orléans-la-Source.
- Section de Montargis : M. KISTER, C.E.G. Pontonnière, 45-Chalette-sur-Loing.
- Paris : M. HAMEAU, 38, avenue du Général-de-Gaulle, 94-Vincennes, (Tél. 808 43 79).
- Poitiers : M. DEHAME, 22, avenue de la Libération, 86-Poitiers.
- Reims : M. THIERUS, 57, rue David, 51-Reims.
- Rennes : M. LE DILY, lycée technique Joliot-Curie, 35-Rennes.
- Section de Brest : M. STEPHAN, collège naval, 29 N-Brest.
- Rouen : M^{me} METENIER, Faculté des sciences, 76-Rouen.
- Strasbourg : M. SORGUS, 39, rue Goethe, 67-Strasbourg.
- Section d'Allemagne Fédérale : Président, M. ALEXANDRE, proviseur, lycée de Fribourg; secrétaire, M. DEBU, lycée Charles-de-Gaulle, S.P. 69037.
- Section Mosellane : M. SCHNEIDER, 54 bis, rue de Theuleu, 57-Metz.
- Toulouse : M. FRAISSE, 8, rue des Glycines, 31-Toulouse.
- Côte d'Ivoire : M. MATHURIN, B.P. 20 694, Abidjan.
- Sénégal : M. SEYNI NIANG, lycée Van-Valenhoven, Dakar.

Le Comité national de l'A.P.M.E.P.

Sortants en 1969 : M. AMIOT (C.E.G., Paris); M^{me} AMAR (Paul-Valéry, Paris); MM. BARBUT (Ecole Pratique des Hautes Etudes); CHOQUET (Faculté des Sciences, Paris); CONDAMINE (Lakanal, Sceaux); M^{lle} FELIX (La Fontaine, Paris); MM. GÉNESTINE (Lycée Technique, Clichy); GILBERT (Lycée Technique, Versailles); M^{me} LAULANET (Ecole Normale d'Instituteurs, Paris).

Sortants en 1970 : MM. D. BERNARD (Faculté des Sciences, Strasbourg), BLANZIN (C.E.G., Paris); CHEVALLIER (Marcellin-Berthelot, St-Maur); CLOPEAU (Lakanal, Sceaux); M^{lle} DEROO (Racine, Paris); MM. DUCHEUX (Lycée mixte, Amiens); GAUTHIER (Ampère, Lyon); JACQUEMIER (Inspecteur départemental, Grenoble); M^{me} TOUYAROT (Ecole Normale, Caen).

Sortants en 1971 : M^{lle} BIARD (E.N.S., Fontenay), MM. BROUSSEAU (Instituteur, Bordeaux); CROZES (Henri-IV, Paris); DUMONT (Lycée international, Saint-Germain-en-Laye); DUVERT (La Martinière, Lyon); P.-L. HENNEQUIN (Faculté des Sciences, Clermont); M^{lle} LICHOU (Instituteur, Calvados); M. RAMIS, (Spéciales, Louis-le-Grand, Paris); M. VISSIO (Lakanal, Sceaux).

Sortants en 1972 : M^{me} AUDIN (Ecole Normale d'Instituteurs, Paris); M. J. COLOMB (Lycée A.-Charial, Lyon); M. CRÉPIN (I.D.E.N., Limoges); M. DEHAME (Math. Sup. Lycée, Poitiers); M. FAUQUETTE (C.E.G., Lens); M. GOURBT (Math. Sup. Lycée La Martinière, Lyon); M. KLEIN (Faculté des Sciences, Grenoble); M. ROUMANET (Lycée Rodin et I.P.N., Paris); M. REVUZ (Faculté des Sciences, Paris).

Membres de droit : M^{lle} BRÉNÉOL (Claude-Monet, Paris); MM. CAMY-PEYRET (Lycée Technique, Creil); REICHEN (Lavoisier, Paris).

LES PUBLICATIONS DE L'A.P.M.E.P.

En plus de son *Bulletin* servi à tous les adhérents de l'A.P.M.E.P. et à ses abonnés, l'A.P.M.E.P. a décidé, en 1960, de publier des livres ou des brochures écrits par un ou plusieurs de ses membres et pouvant servir au progrès de l'enseignement des mathématiques.

Les tirages des premiers titres de sa collection « les brochures de l'A.P.M. » ayant été limités ont été rapidement épuisés. Restent disponibles, parmi les derniers ouvrages parus :

7. *Lecture commentée d'une méta-démonstration de Gödel*, par J. Balibar, Maître-Assistant à la Faculté des Sciences de Poitiers (mai 1962) 32 p., prix 3 F.
8. *Le Cours de l'A.P.M.* — 2. *Espaces vectoriels*, par A. et G. Revuz, 1963, 200 p., prix 25 F.
10. *Le Cours de l'A.P.M.* — 3. *Éléments de topologie*, par A. et G. Revuz, 1966, 250 p., prix 27 F.

Bibliothèque d'Enseignement Mathématique, nouvelle collection d'ouvrages pour la formation permanente des maîtres :

1. *Pour apprendre à conjecturer : initiation à la statistique* par MM. L. Guerber et P.-L. Hennequin (Université de Clermont), 1967, 240 p., prix 25 F (cartonné 30 F).
2. *Pour apprendre à conjecturer : initiation au Calcul des Probabilités*, par MM. Guerber et Hennequin, 1968, 232 p., prix 25 F (cartonné 30 F).

Bibliothèque d'Information sur l'enseignement mathématique, brochures qui ne sont ni des manuels, ni encore moins des traités et qui devraient avoir le caractère incisif des libelles...

1. *Charte de Chambéry*, 1969, 1971, 1973, 1976, 1980, ... étapes et perspectives d'une réforme de l'enseignement des mathématiques, octobre 1968, 32 p., prix 2 F.
2. *Matériaux pour l'histoire des nombres complexes*, par Jean Itard, janvier 1969, 32 p. illustrées, prix 3 F.

Conditions de vente et d'expédition.

Les ouvrages précédents ne sont pas en vente en librairie. Pour se les procurer, opérer de la façon suivante :

- 1° Rédiger une formule de virement postal au compte de l'A.P.M.E.P. : Paris 5708-21, du montant des livres demandés (les prix sont compris franco de port).
- 2° Bien préciser au dos du virement les titres des ouvrages commandés.
- 3° Envoyer les trois volets du virement, sous enveloppe timbrée à 0,30 F, au Secrétaire administratif de l'A.P.M.E.P., M. Blondel, 154, avenue Marcel-Cachin, 92-Châtillon-sous-Bagneux.

Vous recevrez les ouvrages commandés en paquet-poste dans le plus court délai.

Les ouvrages cités ci-dessus sont édités au prix coûtant. Aucune remise ne peut donc être consentie à quelque titre que ce soit.

* * *

Le secrétariat de l'A.P.M.E.P. participe également à la diffusion des œuvres complètes d'Evariste Dupont dont le seul ouvrage paru est : *Apprentissage mathématique. I.*, un volume de 248 p., (Sudel éditeur) (Prix : 15 F franco pour les membres de l'A.P.M.E.P.).

Du côté de chez Swann...

Il ne s'agit pas d'ajouter une page sans génie à un ouvrage fameux. Le P^r Swann est le principal auteur d'un rapport sur l'emploi des scientifiques, des ingénieurs et des techniciens dans la société britannique. Le journal Economist, du 28 septembre a commenté et analysé ce document.

En premier lieu, il y a un enchaînement de causes :

1^o si le taux de croissance de l'industrie anglaise est insuffisant, cela est dû, au moins en partie, à l'échec des branches technologiquement avancées à prendre le relais des productions en déclin ;

2^o cet échec résulte de la méconnaissance chez les dirigeants industriels des possibilités offertes par les techniques nouvelles ;

3^o cette méconnaissance est une conséquence de la pénurie en personnel scientifique dont souffre l'industrie ;

4^o si cette pénurie est à déplorer, c'est que les scientifiques les mieux qualifiés répugnent à entrer dans l'industrie ;

5^o cette répugnance a son origine dans les programmes des facultés adaptés à la seule préparation des étudiants pour la recherche universitaire.

Comme beaucoup de schémas séduisants pour l'esprit, il y a dans cet enchaînement une part de vérité, mais une part seulement. Une des observations présentées par Economist me paraît très importante. Elle se fonde, en partie, sur la statistique suivante établie par l'Organisation pour la Coopération et le Développement Économique (O.C.D.E.) :

	Nombre de diplômés d'université pour 1 000 travail- leurs	Nombre de chercheurs scientifiques pour 1000 travail- leurs
U.S.A.	76	24
Japon	47	8
Marché Commun	31	27
Grande-Bretagne	28	28

Il saute aux yeux que les pays d'Europe Occidentale ont la plus forte proportion de chercheurs scientifiques au sein de la population active et la plus faible proportion de diplômés universitaires. Or, quels sont, dans cette liste, les pays les plus technologiquement avancés? Certainement pas les deux derniers. Pourquoi?

Economist remarque qu'en Grande-Bretagne, les diplômés « ès arts » sont beaucoup plus savants sur Beowulf que sur les sciences de notre temps. Beaucoup de cadres industriels ont donc une culture mathématique réduite, une culture scientifique qui l'est encore plus alors que parmi les 76 diplômés pour mille qui fournissent les cadres de la production aux États-Unis, rares, exceptionnels, sont ceux qui, au cours de leur formation universitaire n'ont pas étudié quelques sujets scientifiques. Alors que les diplômés « ès sciences » ont tous étudié quelques sujets non scientifiques. Est-ce le secret de la réussite technologique de l'industrie américaine?

La question mériterait d'être étudiée à fond. Sans aller jusque-là, ne pouvons-nous tirer de ces observations quelques réflexions utiles?

Rappelez-vous les discussions sur les réformes Fouchet concernant le deuxième cycle secondaire et l'enseignement supérieur. Une critique très générale visait la trop étroite et trop stricte spécialisation à laquelle aboutissait ce système. Faut-il, pour remédier à cet abus, aller à l'extrême et repousser indéfiniment la spécialisation? N'est-ce pas ce vers quoi pourrait tendre l'unification des sections envisagée par certains réformateurs pour le deuxième cycle secondaire? Pour dire les choses de façon schématique mais finalement véridique, après les sections Fouchet que l'on voulait étrangères les unes aux autres, aurons-nous des sections Edgar Faure si peu différenciées qu'elles n'auront plus de raison de subsister?

Pour répondre à cette question, il me semble utile de remarquer :

1° Si des sections sont maintenues (ce qui me paraît probable pour la raison très forte qu'on en a l'habitude depuis des décennies), nul ne pourra empêcher qu'elles se différencieront, ne serait-ce que par leur nom; et alors, il y a fort à parier que l'usage créera une hiérarchie des sections.

2° Si le dilemme de la spécialisation (qui exclurait une formation culturelle étendue) et de la formation culturelle étendue (qui exclurait une spécialisation sérieuse) doit être « dépassé », ce ne peut être dans le cadre de tel ou tel système de sections. On en viendra, avec le temps qu'il faut pour mûrir les grands changements, à réaliser une des propositions souvent formulées en mai : quelque système d'« unités » représentant pour l'élève des quantités de travail à peu près équivalentes et dont le choix très souple permettrait par exemple à l'élève de faire beaucoup de mathématiques pendant les deux premières années du deuxième cycle justement parce qu'il voudrait ne plus en faire en année terminale.

L'organisation des emplois du temps présenterait alors de sérieuses difficultés. Heurte également nos habitudes la perspective d'accueillir dans une même salle pour telle discipline des élèves de première, deuxième ou troisième année. Voilà qui bouleverserait sérieusement notre conception des programmes généralement conçus pour un élève idéal qui, du début du cycle à sa fin, en suivrait effectivement le déroulement logique.

Je ne nie pas les difficultés d'organisation et même de conception pour ces « unités » dans toutes les disciplines. Mais j'aperçois, dans cette voie, une possibilité d'échapper au dilemme de la spécialisation nécessaire et de la culture

indispensable. Elle permet, par un dosage qui ressortira d'une saine diététique intellectuelle, une étude approfondie de quelques domaines importants (car sans un tel approfondissement, il n'y a pas de culture du tout) sans empêcher que des ouvertures sur d'autres domaines restent offertes à toute étape de la formation de l'individu. Concrètement, j'imagine le cas d'un élève axant sa formation sur les mathématiques et une langue vivante (disons, trois unités par an de chacune de ces disciplines), le menu complété par deux unités de français (seule matière obligatoire), deux unités de physique, deux de sciences naturelles et une de géographie.

Je n'ai parlé que du deuxième cycle secondaire. Aux niveaux supérieurs, serait-il scandaleux d'imaginer qu'on ne puisse plus obtenir une maîtrise de mathématiques sans avoir consacré réellement du temps et de l'attention à une langue vivante ou à l'économie politique ou à autre chose?

Divagations que tout cela? Peut-être. J'ai bien peur pourtant qu'à perpétuer le système des sections on ne poursuive la conciliation des inconciliables. Poursuite très vaine car, à chaque fois, on croit réformer alors qu'on a seulement changé la manière de mal faire.

Gilbert WALUSINSKI.

« Le véritable moyen d'arrêter l'influence délétère dont l'avenir intellectuel semble menacé, par suite d'une trop grande spécialisation des recherches individuelles, ne saurait être, évidemment, de revenir à cette antique confusion de travaux... Il consiste au contraire dans le perfectionnement de la division du travail elle-même. Il suffit, en effet, de faire de l'étude des généralités scientifiques une grande spécialité de plus. »

Auguste COMTE,
Cours de philosophie positive

DUNOD

É D I T E U R

92, rue Bonaparte - Paris-6^e

TECHNIQUES - SCIENCES

a sélectionné parmi ses nouveautés

Mathématiques

Enseignements supérieurs économiques et commerciaux

par L. CHAMBADAL

- Tome I. — **Éléments d'algèbre.** Broché 23 F
Tome II. — **Éléments d'analyse.** Broché 18 F
Tome III. — **Éléments de calcul des probabilités.** Broché 14 F
Tome IV. — **Compléments et exercices.** Broché 15 F

Mathématiques supérieures et spéciales

par A. DONEDDU

- Tome I. — **Algèbre et géométrie. Supérieures et MP1.** Broché 54 F
Tome II. — **Cours de mathématiques supérieures : Analyse et géométrie différentielle.** Broché 59 F
Tome III. — **Compléments de géométrie algébrique. Spéciales et MP2.** Broché 38 F
Tome IV. — **Compléments d'analyse. Spéciales et MP2.** Broché 34 F

Principes de combinatoire

par C. BERGE

- Broché 34 F

Monographies Universitaires de Mathématiques

Introduction aux structures algébriques

par J. LÉVY-BRUHL

- Relié toile sous jaquette 76 F

Introduction à la géométrie des variétés différentiables

par PHAM MAU QUAN

- Relié toile sous jaquette 68 F

Géométrie différentielle et systèmes extérieurs

par M^{me} Y. CHOQUET-BRUHAT

- Relié toile sous jaquette 56 F

Extrait du catalogue « Mathématiques » envoyé franco sur demande

« Il faut que les mathématiques domptent les écarts de notre raison; c'est le bâton des aveugles, on ne marche point sans elles... » Voltaire.

Groupes de nombres réels

Applications

Jean BASS

Faculté des Sciences, Paris.

On trouvera ici le texte de deux conférences faites au club mathématique du lycée Lakanal, devant des élèves de terminale C du lycée Lakanal, du lycée Marie-Curie et du lycée de Châtenay-Malabry.

En principe, il n'a pas été fait appel à des notions qui soient hors du programme de terminale C. Il a seulement fallu définir (ou rappeler) ce qu'on appelle borne inférieure d'un ensemble de nombres réels, et définir la notion d'ensemble dense sur un intervalle. L'objet des conférences était de tirer de ces deux notions, confrontées avec la notion, bien connue des élèves, de groupe, un ensemble important de conséquences.

Pendant quelques lignes, il a été cependant fait allusion aux points d'accumulation d'un ensemble de réels, au théorème de Bolzano-Weierstrass et aux ensembles compacts. Mais ces notions n'ont pas été utilisées dans la suite, et les lignes en question peuvent être sautées.

Certaines propriétés des groupes de nombres réels ont ensuite suggéré une étude plus précise de la répartition des suites de réels modulo 1. Dans cette étude, le concept de groupe s'efface. Mais d'autres outils deviennent nécessaires. Il a fallu écrire des intégrales définies, et l'on a admis que les élèves savaient intégrer non seulement les fonctions continues élémentaires, mais aussi les fonctions en escalier. Comme la définition précise de l'intégrale n'est pas au programme, on s'est volontairement abstenu de s'en servir, et cela a empêché de donner la démonstration des théorèmes de H. Weyl. Enfin, si l'on a été conduit à introduire le nombre complexe $z = \cos \theta + i \sin \theta$, on ne l'a pas représenté par la notation $e^{i\theta}$, qui n'est pas utilisée en terminale C.

Tout cela a parfois alourdi le langage. Mais il fallait choisir. Si l'on commence par introduire beaucoup de notions nouvelles (intégrale, exponentielle complexe, série trigonométrique), il ne reste pas de temps pour en développer les applica-

tions. Or ces notions sont classiques et font partie des programmes propédeutiques (mathématiques spéciales, premier cycle des facultés). Le but des clubs mathématiques n'étant pas de « prendre de l'avance », il a semblé préférable de montrer aux élèves comment, avec un matériel mathématique restreint, on peut aller relativement loin.

1. Introduction.

On suppose connues les notions de nombre entier, de nombre rationnel, réel, complexe, ainsi que celle de groupe. On va étudier quelques propriétés des groupes de nombres réels. Il s'agira de groupes *additifs*.

Un ensemble G de nombres réels est un groupe si les propriétés suivantes sont vérifiées :

G contient le nombre 0;

si G contient x , G contient $-x$;

si G contient x et y , G contient $x + y$.

L'associativité de l'addition dans G est, bien entendu, un cas particulier de l'associativité de l'addition des nombres réels en général.

On connaît des exemples de groupes G . Le plus simple est formé de l'unique élément 0. On le notera G_0 . Il n'est pas d'un grand intérêt.

Un groupe plus intéressant est le groupe G_a formé des multiples d'un réel a non nul. Les éléments de G_a sont de la forme $a \cdot n$, n entier positif, négatif ou nul. Il est clair que, pour obtenir tous les groupes G_a , il suffit de prendre tous les a positifs. Les éléments positifs de G_a sont donc :

$$a, 2a, \dots, na, \dots \quad (n \text{ entier} > 0)$$

On remarque que l'un d'eux, a , a la propriété d'être *le plus petit élément positif du groupe*.

Nous allons montrer que seul le groupe G_a a la propriété d'avoir un plus petit élément positif. Puis nous examinerons ce qui se passe pour un groupe G qui, en un certain sens, ne possède aucun élément positif inférieur à tous les autres.

Rappelons d'abord ce que l'on appelle *borne inférieure* d'un ensemble E de nombres réels. Supposons que E soit un ensemble borné (il suffit qu'il soit borné inférieurement). Il existe alors des nombres p tels que, quel que soit $x \in E$, on ait : $x \geq p$. Ces nombres sont appelés *minorants* de E .

On appelle *borne inférieure* de E le plus grand des nombres p , c'est-à-dire le plus grand minorant de E . C'est un nombre p_0 qui a la propriété suivante : quel que soit $\varepsilon > 0$ donné, il existe un élément x de E tel que $p_0 \leq x < p_0 + \varepsilon$. On démontre que tout ensemble borné de nombres réels admet une borne inférieure; la définition ci-dessus est donc consistante. La démonstration peut se faire de manières assez diverses suivant le mode de définition choisi pour les nombres réels. Elle ne sera donc pas donnée ici.

La borne inférieure p_0 peut, ou non, appartenir à E . Voici des exemples :

Exemple 1. — La borne inférieure de l'ensemble E des x tels que $1 \leq x \leq 2$ est $p_0 = 1$, qui appartient à E .

Exemple 2. — La borne inférieure de l'ensemble E des x tels que $1 < x < 2$ est $p_0 = 1$, qui n'appartient pas à E .

Exemple 3. — La borne inférieure des entiers positifs est 1, qui appartient à E .

Exemple 4. — La borne inférieure de l'ensemble E des nombres $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ est $p_0 = 0$, qui n'appartient pas à E .

Nous aurons besoin d'une autre notion : celle d'*ensemble dense*. Soit I un intervalle et E un sous-ensemble de I . On dit que E est *dense* dans I si tout intervalle appartenant à I contient un point de E . Il en résulte évidemment que tout intervalle contient une infinité de points de E .

On exprime que l'ensemble E de points x est dense sur I à l'aide de l'inégalité suivante : soient y un point arbitraire de I et ε un nombre positif arbitraire. Il existe un $x \in E$ tel que $|x - y| < \varepsilon$. Cela revient à dire que : tout intervalle $]y - \varepsilon, y + \varepsilon[$ contient un point x de E (cela même si l'intervalle déborde de I).

De même, un ensemble E de points d'une circonférence Γ est *dense sur* Γ , si tout arc de Γ contient un point de E .

Exemples : l'ensemble des rationnels est dense sur $\mathbb{R}$, car entre deux réels, il y a toujours un rationnel. L'ensemble des rationnels positifs et inférieurs à 1 est dense sur le segment $[0, 1]$.

2. Théorème fondamental.

Théorème.

Si l'ensemble des éléments positifs d'un groupe G de nombres réels admet une borne inférieure positive, G est constitué par les multiples n.a d'un réel a .

Si l'ensemble des éléments positifs de G admet pour borne inférieure le nombre 0, alors G est dense sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. — Supposons que les éléments positifs de G admettent une borne inférieure positive a . Montrons d'abord que a appartient à G .

Donnons un nombre $\varepsilon > 0$, inférieur à a . Dans l'intervalle fermé $[a, a + \varepsilon]$, il y a, par définition de a , un élément x de G . Supposons que x ne coïncide pas avec a . Alors entre a et x , il y a, pour la même raison, un élément $x' \neq x$ de G . Comme G est un groupe $(x - x')$ est un élément de

G et l'on a $0 < x - x' < \varepsilon$ ($< a$). Il y aurait donc un élément positif de G inférieur à a , contrairement à la définition de a . Donc x coïncide avec a et a appartient à G . Dans l'intervalle fermé $[a, a + \varepsilon]$, il n'y a pas d'autre élément de G que a . G a donc un *plus petit élément positif*.

Soit maintenant x un élément quelconque de G . Si n est la partie entière du réel $\frac{x}{a}$, on a $\frac{x}{a} = n + r'$, avec r' réel tel que $0 \leq r' < 1$. Si l'on pose $r = ar'$, alors $x = an + r$ avec $0 \leq r < a$. Or $an \in G$. Comme $x \in G$, $x - an = r \in G$. Mais alors r , élément de G , est non négatif et inférieur à a , ce qui n'est possible que si $r = 0$. Donc tous les éléments de G sont de la forme $a.n$. La première partie du théorème est ainsi démontrée.

Passons à la seconde partie. Par hypothèse, on peut trouver $x \in G$ tel que $0 < x < \varepsilon$, où ε est un nombre positif arbitrairement petit. Les nombres nx sont, pour tout entier n , des éléments de G . Mais tout intervalle fermé $[a, b]$, de longueur ε , contient un point de la suite des nx . Comme on peut choisir ε arbitrairement, on voit que tout intervalle de $\mathbb{R}$ contient un point de G . G est donc dense sur $\mathbb{R}$ et la seconde partie du théorème est démontrée.

Remarque : on déduit du théorème précédent l'énoncé suivant, qui en est une variante : les éléments d'un groupe G de réels sont denses sur $\mathbb{R}$ si et seulement si les éléments positifs de G admettent zéro pour borne inférieure.

3. Exemples.

Soit α et β deux nombres réels non nuls. Si n et p sont deux entiers, on voit immédiatement que l'ensemble des nombres $x = \alpha n + \beta p$ est un groupe G de réels.

Distinguons alors deux cas :

Premier cas : $\frac{\alpha}{\beta}$ est un nombre rationnel. Il existe deux entiers α_1 et β_1 non nuls tels que $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha_1}{\beta_1}$ ou $\frac{\alpha}{\alpha_1} = \frac{\beta}{\beta_1} = r$, r réel. Donc $x = r(\alpha_1 n + \beta_1 p)$. Or l'ensemble des nombres $\alpha_1 n + \beta_1 p$ est un groupe dont les éléments sont des entiers. Il a donc un plus petit élément positif, égal ou supérieur à 1. Il existe donc γ_1 tel que $\alpha_1 n + \beta_1 p = \gamma_1 q$, q entier, et $x = (r\gamma_1)q$.

Le groupe G coïncide alors avec le groupe $G_{(r\gamma_1)}$ des multiples de $r\gamma_1$. On notera que, pour q donné, il y a plusieurs valeurs possibles de n et p . Par exemple l'élément neutre de G ($q = 0$) est obtenu pour tous les couples n, p tels que $\frac{n}{\beta} = -\frac{p}{\alpha_1}$.

Deuxième cas: $\frac{\alpha}{\beta}$ est irrationnel. Montrons qu'il n'existe pas de nombre a tel que $\alpha n + \beta p = aq$, q entier. Si n et p ne sont pas nuls, q ne peut être nul. Car la condition $q = 0$ entraînerait $\alpha n + \beta p = 0$, ou $\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{p}{n}$, et $\frac{\alpha}{\beta}$ serait rationnel. Soient alors n' , p' deux entiers tels que $n'p - np' \neq 0$. À n' , p' correspond un nombre q' non nul. En éliminant a entre les relations

$$\alpha n + \beta p = aq, \quad \alpha n' + \beta p' = aq',$$

on obtient

$$\frac{\alpha n + \beta p}{\alpha n' + \beta p'} = \frac{q}{q'}, \quad \text{ou} \quad \alpha (nq' - n'q) = \beta (p'q - pq').$$

Les nombres $nq' - n'q$ et $p'q - pq'$ ne sont pas nuls en même temps, car on aurait alors

$$\frac{n}{n'} = \frac{q}{q'} = \frac{p}{p'}$$

ce qui contredit la condition $n'p - np' \neq 0$. Dans ces conditions,

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{p'q - pq'}{nq' - n'q}$$

est rationnel, contrairement à l'hypothèse.

Or l'ensemble des nombres $\alpha n + \beta p$ est un groupe G de réels. S'il ne coïncide pas avec les multiples d'un nombre a , on peut affirmer qu'il est dense sur $\mathbb{R}$. Donc :

Théorème: Si $\frac{\alpha}{\beta}$ est irrationnel, l'ensemble des nombres $\alpha n + \beta p$, pour tous les couples d'entiers n, p , est dense sur $\mathbb{R}$.

Expression du résultat. Soit y un réel quelconque. Dans l'intervalle $]y - \varepsilon, y + \varepsilon[$, où ε est donné, il y a un point $\alpha n + \beta p$. Autrement dit : y et ε étant donnés, il existe deux entiers n et p tels que $|\alpha n + \beta p - y| < \varepsilon$.

4. Première application.

On recouvre un plan par un quadrillage régulier, formé de carrés, de côté a , parallèles aux axes Ox et Oy . Soit M le sommet d'un de ces carrés, c'est-à-dire le point de coordonnées $(a.n, a.p)$, n et p entiers. On projette M en M' sur l'axe Ox , « parallèlement à une direction $D \rangle$ de coefficient directeur λ irrationnel.

Théorème: l'ensemble des points M' est dense sur Ox .

En effet, la droite $M'M$ a pour équation $y - ap = \lambda(x - a.n)$.

L'abscisse de M' est donc $x = a.n - \frac{a}{\lambda}p$.

L'ensemble des x est un groupe G de nombres réels du type étudié ci-dessus. Comme le rapport $\frac{a}{\lambda} = \lambda$ est irrationnel, ce groupe est dense sur $\mathbb{R}$.

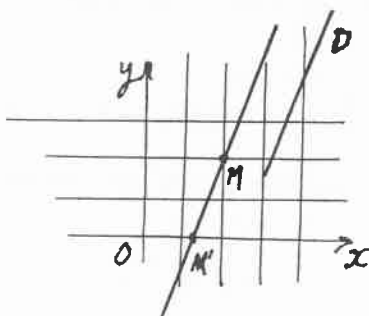


FIG. 1.

On en déduit par exemple qu'on peut trouver deux points M et M_1 , dont les projections sont aussi rapprochées qu'on le désire. Réciproquement, soit M' un point de Ox . Menons par M' une droite D' parallèle à D . Il existe un sommet M du quadrillage dont la distance à D' est aussi petite qu'on le désire. Mais, en général, la droite D' ne passe par aucun des points M (sauf si « $M' \in G$ »).

5. Deuxième application.

On dispose de couples de roues dentées fournissant les démultiplications 2 et 3 et aussi, par conséquent, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$. On va montrer que, avec un nombre fini de tels couples, on peut approcher d'autant près qu'on le veut une démultiplication ω donnée (rationnelle ou non).

n démultiplications 2 donnent un rapport de vitesses angulaires (ou d'angles de rotation) 2^n ; n est un entier positif, négatif ou nul. De même p démultiplications 3 donnent 3^p .

On veut trouver n et p de manière à résoudre aussi exactement que possible l'équation $2^n 3^p = \omega$.

Cette équation s'écrit aussi : $n \log 2 + p \log 3 = \log \omega$ où les logarithmes sont par exemple de base 10.

Or $\frac{\log 3}{\log 2}$ est un nombre irrationnel. Si en effet il existait deux nombres entiers a et b tels que $\frac{\log 3}{\log 2} = \frac{b}{a}$, on aurait $a \log 3 = b \log 2$, ou $3^a = 2^b$.

Or c'est impossible, puisque 3^a n'est pas un nombre pair. Comme l'ensemble des nombres $n \log 2 + p \log 3$ est dense sur $\mathbb{R}$, on peut trouver n et p de façon que $n \log 2 + p \log 3$ diffère aussi peu qu'on le désire de $\log \omega$.

Pour trouver effectivement n et p , le plus simple est de procéder graphiquement. On trace sur papier quadrillé la droite qui a pour équation $x \log 2 + y \log 3 = \log \omega$ et on cherche à vue les points (n, p) qui sont voisins de cette droite. On calcule ensuite, avec les valeurs ainsi choisies pour (n, p) la valeur exacte de $n \log 2 + p \log 3$ et on la compare numériquement à $\log \omega$.

Exemple: $\omega = 365$, ... Ce problème se pose pour construire avec des engrenages un planétaire représentant correctement le mouvement de la Terre autour du Soleil.

On a $\log 2 = 0,30103...$; $\log 3 = 0,47712...$; $\log 365 = 2,5623...$

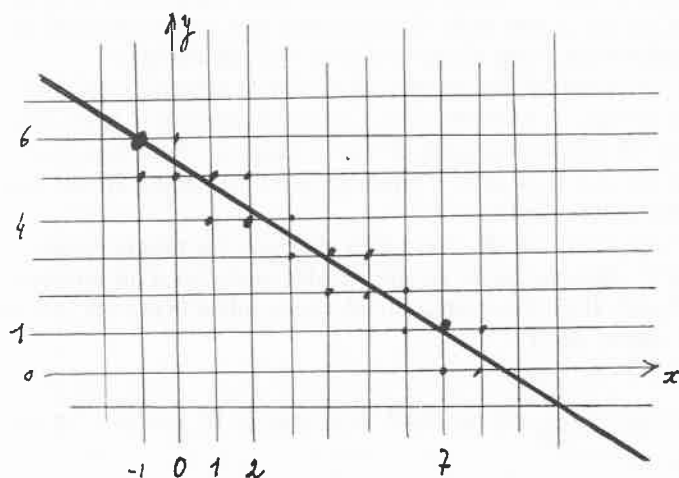
On construit donc facilement la droite d'équation $x \log 2 + y \log 3 = \log \omega$.

Cette droite passe très près des points $(x = 7, y = 1)$ et $(x = 2, y = 4)$.

On a $2^7 \times 3 = 128 \times 3 = 384$; $2^2 \times 3^4 = 4 \times 81 = 324$.

Ce sont des approximations médiocres. Une solution plus précise est donnée par $x = -1, y = 6$, car $\frac{3^6}{2} = \frac{729}{2} = 364,5$.

La figure a été faite sans précision. Cela importe peu. Elle sert seulement à deviner les couples (n, p) qui fournissent une approximation raisonnable. Prévoir, par le calcul, un ordre de grandeur de l'erreur commise serait un problème beaucoup plus difficile.



6. Troisième application.

Entre les *nombre*s réels et les *points* d'une droite, il y a une correspondance biunivoque. Or, lorsqu'on parle de groupe de réels, la notion géométrique correspondante n'est pas celle de points, mais plutôt celle de *vecteurs*, ou encore de *déplacements*. On choisit sur la droite une origine O . A tout nombre x correspond un point M , qui définit un vecteur $\overrightarrow{OM}$.

L'opération du groupe additif des réels est une addition de vecteurs, ou une composition de déplacements. Un groupe de réels s'interprète aussi comme un groupe de déplacements.

Cherchons maintenant à établir une correspondance entre les nombres réels et les points d'un *cercle*. Ce sera, pour fixer les idées, le cercle Γ de centre O et de rayon 1, orienté dans le sens usuel.

A tout nombre réel θ , on fait correspondre une *rotation* d'angle θ ; θ peut aussi être interprété comme l'*argument* d'un nombre complexe de module 1, affixe d'un point de Γ . Mais un point de Γ est l'image d'une infinité de nombres réels. Si θ est l'un d'eux, tous les autres sont de la forme, $\theta + 2k\pi$, k entier. Ne pas distinguer ces nombres, c'est considérer les réels *modulo* 2π . L'ensemble des nombres réels équivalents (ou congrus) à un nombre θ , modulo 2π , constitue une classe d'équivalence. Il y a correspondance biunivoque entre les points du cercle et les classes de nombres réels modulo 2π .

En langage géométrique, on ne retient de chaque rotation que son effet en tant que transformation géométrique.

On peut interpréter d'une autre façon la différence entre la droite $\mathbb{R}$ et le cercle Γ . Sur $\mathbb{R}$, il existe des ensembles infinis de *points* qui n'ont pas de point d'accumulation : on ne peut en extraire aucune suite convergente. Autrement dit le théorème de Bolzano-Weierstrass n'est pas vérifié sur $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ n'est pas *compact* (exemple d'un tel ensemble : le groupe $\{na\}$ des multiples d'un nombre réel a non nul). Au contraire, tout ensemble infini de *points* du cercle Γ admet un point d'accumulation : Γ est compact.

Cela va entraîner des conséquences sur la structure des groupes sur Γ . Soit G un groupe de nombres réels. Considérés modulo 2π , les éléments de G constituent un nouveau groupe G' sur le cercle Γ . Pour construire les points images de G' sur Γ , il suffit d'enrouler sur Γ la droite $\mathbb{R}$, sur laquelle on a marqué les points de G .

Si G est dense sur $\mathbb{R}$, il est bien clair que les points images de G' sont denses sur Γ . Mais le cas du groupe G_a des multiples d'un nombre a doit être examiné à part. Il n'est pas dense sur $\mathbb{R}$, et cependant le groupe $\{n\theta\}$ modulo 2π peut être dense sur Γ .

Théorème : Si $\frac{\theta}{2\pi}$ est rationnel, le groupe $\{n\theta\}$ modulo 2π est fini.

Si $\frac{\theta}{2\pi}$ est irrationnel, le groupe $\{n\theta\}$ modulo 2π est dense sur Γ .

Cela veut dire que l'ensemble des *points* A_n ayant pour angles polaires les multiples $n\theta$ de θ est fini dans le premier cas, infini et dense sur Γ dans le second cas.

Démonstration : Si $\frac{\theta}{2\pi}$ est de la forme $\frac{p}{q}$, p et q entiers premiers entre eux, on a $q\theta = 2p\pi$.

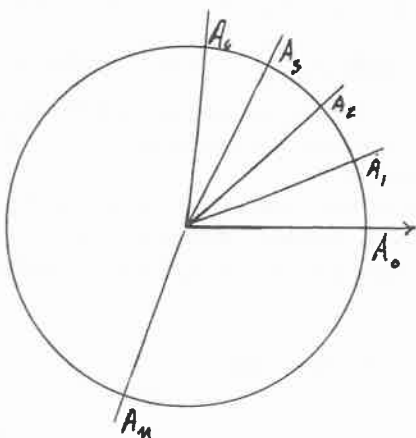


FIG. 3.

Donc le q^{e} point A_q coïncide avec le point initial A_0 sur Γ . Il y a donc q points distincts $A_0, A_1, \dots, A_{q-1}$. Le groupe de réels $n\theta$ est infini, mais le groupe $\{n\theta\}$ modulo 2π est fini.

Si maintenant $\frac{\theta}{2\pi}$ est irrationnel, on veut montrer que, quels que soient φ_0 et $\varepsilon > 0$, il existe un *point*, d'angle polaire $n\theta$, tombant dans l'arc de Γ défini par $\varphi_0 - \varepsilon < \varphi < \varphi_0 + \varepsilon$.

Or la position de ce point n'est définie qu'à $2p\pi$ près. On cherche donc deux entiers n et p tels que

$$\varphi_0 - \varepsilon < n\theta + 2p\pi < \varphi_0 + \varepsilon.$$

Comme $\frac{\theta}{2\pi}$ est irrationnel, on est ramené au groupe du paragraphe 3, avec $\alpha = \theta$, $\beta = 2\pi$. On sait que ce groupe est dense sur $\mathbb{R}$ et l'existence de nombres n et p est ainsi prouvée.

7. Quelques résultats plus précis. Distributions uniformes.

Nous avons vu que, si $\frac{\theta}{2\pi}$ est irrationnel, la suite $0, \theta, 2\theta, \dots, n\theta, \dots$ définit sur le cercle unité une suite dense de points.

On peut trouver un entier p tel que $0 \leq n\theta - 2p\pi < 2\pi$ ou

$$0 \leq \frac{\theta}{2\pi} n - p < 1.$$

$\frac{\theta}{2\pi} n - p$ apparaît comme la *partie décimale*, ou partie fractionnaire, du réel $\frac{\theta}{2\pi} n$. Remplacer $\frac{\theta}{2\pi} n$ par $\frac{\theta}{2\pi} n - p$, c'est définir $\frac{\theta}{2\pi} n$ modulo 1.

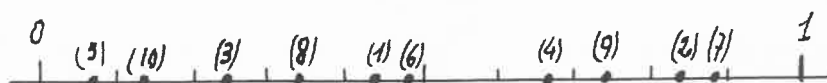
Posons pour simplifier, $\frac{\theta}{2\pi} = A$ et considérons la suite de nombres $x_n = n \cdot A \pmod{1}$, ordonnée suivant les valeurs croissantes de n .

Les résultats précédents expriment que, *si A est irrationnel, la suite x_n est dense sur le segment $[0,1]$.*

Donnons-nous un intervalle $]a, b[$ intérieur à $[0,1]$.

Considérons les N premiers points $x_1, x_2, \dots, x_N$. Un certain nombre d'entre eux, N' , se trouvent dans $]a, b[$. Leur « fréquence relative » est la fraction $\frac{N'}{N}$.

Exemple: $A = \sqrt{2}$, $N = 10$.



n	$n \cdot A$	$x_n = nA \pmod{1}$
1	1,4142	0,4142
2	2,8284	0,8284
3	4,2426	0,2426
4	5,6569	0,6569
5	7,0711	0,0711

n	nA	$x_n = nA \pmod{1}$
6	8,4853	0,4853
7	9,8995	0,8995
8	11,3137	0,3137
9	12,7279	0,7279
10	14,1421	0,1421

Dans le segment $[0,3 < x < 0,8]$, il y a $N' = 5$ des $N = 10$ points. $\frac{N'}{N} = \frac{5}{10} = 0,5$. $\frac{N'}{N}$ s'appelle la fréquence de ceux des N' premiers points qui se trouvent dans l'intervalle $]a, b[$.

La fréquence $\frac{N'}{N}$ tend-elle vers une limite lorsque $N \rightarrow \infty$? On démontre le théorème suivant :

Théorème: lorsque $N \rightarrow \infty$, $\frac{N'}{N}$ a une limite égale à la longueur de l'intervalle $]a, b[$.

Ce théorème est un cas particulier d'un théorème beaucoup plus général. Pour énoncer celui-ci, donnons d'abord une définition.

Définition. — Soit x_n une suite de réels compris entre 0 et 1. Soit $]a, b[$ un intervalle intérieur à $]0, 1[$. Supposons que parmi les N premiers nombres de la suite, il y en ait N' dans $]a, b[$.

Si, quel que soit l'intervalle $]a, b[$, le rapport $\frac{N'}{N}$ tend, lorsque $N \rightarrow \infty$, vers une limite égale à $]b - a[$, on dit que la suite est *équirépartie* sur l'intervalle $]0, 1[$.

Un théorème dû à H. Weyl (1916) permet de reconnaître si une suite est équirépartie sur $[0, 1]$ ou, ce qui revient au même, si une suite x_n de nombres réels est équirépartie modulo 1.

Théorème : *soit x_n une suite de nombres compris entre 0 et 1. Soit f une fonction continue, à valeurs réelles ou complexes, de la variable réelle x , définie pour $0 \leq x \leq 1$.*

Si, quelle que soit f , on a l'égalité :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_N)}{N} = \int_0^1 f(x) dx,$$

alors la suite x_n est équirépartie sur $[0, 1]$. Réciproquement, si la suite x_n est équirépartie sur $[0, 1]$, alors l'égalité ci-dessus est vérifiée pour toute fonction f continue.

Remarque. — On peut remplacer « f continue » par « f intégrable ». Par exemple, on peut prendre pour f une fonction en escalier.

La démonstration de la première partie de ce théorème est facile. Il suffit de prendre pour f l'indicateur de l'intervalle $]a, b[$, c'est-à-dire la fonction égale à 1 sur $]a, b[$ et à 0 en dehors.

La démonstration de la seconde partie exige de connaître des propriétés élémentaires des fonctions intégrables.

L'interprétation de l'énoncé est simple. Il y a égalité entre deux moyennes : la valeur moyenne de f sur $[0, 1]$, et la limite de la moyenne arithmétique des nombres $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_N)$.

Ce théorème est parfois difficile à utiliser. Mais il possède une variante plus commode, dont voici l'énoncé :

Théorème : *si, quel que soit l'entier k non nul, les deux moyennes*

$$\frac{\cos 2\pi k x_1 + \dots + \cos 2\pi k x_N}{N} \quad \text{et} \quad \frac{\sin 2\pi k x_1 + \dots + \sin 2\pi k x_N}{N}$$

tendent vers zéro lorsque $N \rightarrow \infty$, la suite x_n est équirépartie sur $[0, 1]$. Réci-

proquement, si la suite x_N est équirépartie sur $[0,1]$, les deux moyennes ci-dessus tendent vers 0 avec $\frac{1}{N}$.

La seconde partie de ce théorème résulte facilement du premier théorème. Il suffit de choisir $f(x) = \cos 2\pi kx$ ou $f(x) = \sin 2\pi kx$ et de remarquer que

$$\int_0^1 \cos 2\pi kx \, dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 \sin 2\pi kx \, dx = 0.$$

La première partie est moins élémentaire.

Remarque : dans ce second théorème, on peut dire indifféremment : suite x_n de nombres compris entre 0 et 1 ou suite x_n modulo 1. En effet, ajouter un entier à x_n ne modifie pas les cosinus et sinus.

8. Application à la suite nA .

Vérifions que la suite nA est équirépartie modulo 1. Il faut calculer les sommes

$$S = \cos 2\pi kA + \dots + \cos 2\pi kAN \quad \text{et} \quad T = \sin 2\pi kA + \dots + \sin 2\pi kAN$$

Or si $z = \cos 2\pi kA + i \sin 2\pi kA$, on a

$$S + iT = z + z^2 + \dots + z^N = z \frac{z^N - 1}{z - 1}.$$

Il est plus commode d'introduire, au lieu de z , le nombre complexe $u = \cos \pi kA + i \sin \pi kA$.

En effet, $z = u^2$ et $S + iT = \frac{u^2(u^{2N} - 1)}{u^2 - 1}$. Comme $\frac{1}{u} = \bar{u}$ (conjugué de u) :

$$\begin{aligned} S + iT &= \frac{u^{N+1}(u^N - \bar{u}^N)}{u - \bar{u}} = u^{N+1} \frac{\sin N\pi kA}{\sin \pi kA} \\ &= [\cos (N+1)\pi kA + i \sin (N+1)\pi kA] \cdot \frac{\sin N\pi kA}{\sin \pi kA} \end{aligned}$$

Donc :

$$S = \frac{\sin N\pi kA \cdot \cos (N+1)\pi kA}{\sin \pi kA}, \quad T = \frac{\sin N\pi kA \cdot \sin (N+1)\pi kA}{\sin \pi kA}$$

Si A est irrationnel, et si k est un entier non nul, $\sin \pi kA$ n'est pas nul.

$$\text{Par suite} \quad \left| \frac{S}{N} \right| \leq \frac{1}{|\sin \pi kA|} \cdot \frac{1}{N} \quad \text{et} \quad \left| \frac{T}{N} \right| \leq \frac{1}{|\sin \pi kA|} \cdot \frac{1}{N}$$

$\frac{S}{N}$ et $\frac{T}{N}$ tendent vers 0 lorsque $N \rightarrow \infty$. Il en résulte que la suite nA est équirépartie modulo 1.

Remarque. — Ce résultat entraîne que la suite nA est dense modulo 1. Il fournit donc une nouvelle démonstration de la propriété de densité, qui avait été prouvée d'abord à l'aide des propriétés des groupes de nombres réels.

9. Autre exemple de suite équirépartie.

Les théorèmes de Weyl permettent de construire des suites équiréparties plus générales que la suite $nA \pmod{1}$. Voici, sans démonstration, un résultat intéressant :

Si A est irrationnel, la suite A_n^p est équirépartie (mod. 1) pour tout entier $p > 0$.

Plus généralement, soit $\varphi(x) = Ax^p + A_1x^{p-1} + \dots + A_{p-2}x^2 + A_{p-1}x + A_p$ un polynôme de degré $p \geq 1$. Si l'un au moins des coefficients (à l'exception de A_p) est irrationnel, alors la suite $\varphi(n)$ est équirépartie modulo 1. La démonstration de ce théorème se fait par une méthode de récurrence qui dépasse le niveau de cet exposé. Par contre, il est assez simple de montrer directement le résultat suivant : la suite $\sqrt[n]{n}$ est équirépartie modulo 1.

COLLECTION **U**

vient de paraître :

MÉCANIQUE

M.P. et P.C., Spéciales A A' B B'

Pierre BROUSSE

professeur à la Faculté des Sciences de Paris

Une présentation moderne des fondements de la mécanique combinant l'analyse détaillée des situations concrètes, les méthodes de la logique et le langage des mathématiques. Nombreux exemples et applications.

Un volume de la série « Mathématiques » dirigée par André Revuz, professeur à la Faculté des Sciences de Paris, 464 pages, cartonné : 44,30 F

ARMAND COLIN

vous recommande sa collection

Dunod Université

Premier cycle

- Cours pratique de langage Algol.** 1^{er} cycle MP, PC, par J. LABORDE.
 Broché 32 F
- Exercices d'algèbre et analyse,** par G. LEFORT.
 Tome I. — 1^{er} cycle MP, 1^{re} année. Broché 36 F
 Relié 44 F
- Mécanique.** 1^{er} cycle MP, PC, par H. CABANNES. Broché 37 F

Deuxième cycle - Maîtrise

- Notions fondamentales de la théorie des probabilités.** Maîtrise de mathématiques, par M. MÉTIVIER. Relié 36 F
- Algèbre linéaire et algèbre tensorielle,** par L. CHAMBADAL et J.-L. OVAERT. Relié 58 F
- Cours de mécanique rationnelle,** par P. JANSSENS.
 Tome I. — Bases mathématiques. Cinématique. Statique. Relié 46 F
 Tome II. — Dynamique du point et des systèmes. Relié 59 F

Maîtrise E.E.A.

- Modèles mathématiques de la physique.** Maîtrise E.E.A. C1 — Ondes et matière, par M. DECUYPER. Broché 16 F
- Compléments de mathématiques.** Maîtrise E.E.A. C2 — Signaux et systèmes, par M. DECUYPER. Broché 19 F
- Introduction à l'étude des phénomènes aléatoires.** Maîtrise E.E.A. C2 — Signaux et systèmes, par B. PICINBONO. Broché 9 F

Maîtrise d'informatique

- Les systèmes de conduite des ordinateurs,** par J. ARSAC. Broché .. 38 F

Matériaux pour un dictionnaire

J. CHEVALLIER

Secrétaire de la Commission du Dictionnaire.

Fractionnisme impénitent.

Contrairement à ce qui advient trop souvent, j'ai reçu au sujet des fractions un courrier relativement abondant; comme de surcroît cela a coïncidé dans le temps avec l'étude des mots DIVISION, RAPPORT, QUOTIENT par l'équipe lyonnaise, puis par l'équipe parisienne du Dictionnaire, un échange de vues assez substantiel s'est établi autour de ces notions. Je ne regrette donc pas d'avoir étalé ici mes scrupules personnels avec quelque complaisance : cela a révélé d'abord qu'ils étaient partagés par bien d'autres, ensuite qu'il était souvent possible de rapprocher des opinions au départ éloignées.

On a pu voir dans la notice DIVISION (Section 1 : Terminologie) quelle distinction nous introduisons entre *quotient* et *rapport*. Cette délimitation des sens, à elle seule, a donné lieu à d'amicales empoignades entre Lyonnais et Parisiens, débouchant sur un accord assez général.

Un point sur lequel l'unanimité des collègues est loin d'exister est celui-ci : a-t-on le droit d'écrire des choses comme $\frac{\overrightarrow{AB}}{3}$ et $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}$ et de les appeler « quotient

de $\overrightarrow{AB}$ par 3 » et « rapport de $\overrightarrow{AB}$ à $\overrightarrow{CD}$ »? J'ai eu des protestations très fermes de

correspondants qui n'acceptent rien d'autre que $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}$. Leurs raisons, à vrai

dire, plutôt que d'ordre mathématique, sont surtout pédagogiques; or sur ce plan-là il est clair que suivant le maître et les élèves de très larges fluctuations sont (heureusement) permises. Si pour des raisons dont il est juge un collègue estime ces notations dangereuses, personne ne l'oblige à les employer; mais — la tolérance jouant par nature dans les deux sens — nous ne saurions suivre ceux qui souhaiteraient les proscrire absolument; la commission les a donc déclarées « légitimes », allant assez loin

dans ce sens puisqu'elle admet l'écriture $\frac{12 \text{ cm}}{4 \text{ cm}}$ ou même $\frac{12 \text{ cm}}{40 \text{ mm}}$, ce qui fera peut-être grincer quelques dents.

En cette affaire je pense que nous nous sommes défiés d'un certain purisme : car, à vouloir proscrire $\frac{\overrightarrow{AB}}{3}$ pour ne tolérer que $\frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$, on est amené par la logique des choses — toute opération interne étant *d'abord* une opération externe, et tout corps étant espace vectoriel sur lui-même — à proscrire $\frac{2}{3}$ pour ne tolérer que $3^{-1,2}$; je ne dis pas qu'on n'y arrivera pas, mais ce n'est sûrement pas l'usage actuel. Quant à exiger $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}$ au lieu de $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}$, d'abord les deux notations ne sont pas synonymes, et surtout nous ne voyons aucune raison de négliger ou de rejeter un aspect « physique » des mathématiques. On critique (à bon droit) les mathématiques « anciennes » pour leur culte presque exclusif du nombre, alors que les ensembles « modernes » admettent libéralement à peu près n'importe quoi comme éléments : et lorsque s'offre la possibilité d'opérer intrinsèquement sur des éléments géométriques, physiques, etc., on court se réfugier dans $\mathbb{R}$! J'aurai l'occasion de revenir sur ce tabou.

Notons encore au passage que de la locution correcte « le rapport de a à b » on passe avec une déplorable facilité à des locutions fortement elliptiques comme « le rapport $\frac{a}{b}$ » ou bien « $\frac{a}{b}$ est un rapport » qui appartiennent, elles, au pire des charabias, le charabia creux (de même bien sûr que « la somme $a + b$ », « le produit ab », etc.) : car *n'importe quel nombre* est un rapport (une somme, un produit... et aussi une racine cubique, et un arg sh, etc.). *A fortiori* la définition (trop) connue : « Une proportion est l'égalité de deux rapports » est de l'hypercharabia.

J'arrive aux fractions : là tous les goûts sont dans la nature. Je ne saurais mieux faire que reprendre l'excellente analyse de notre collègue Dumont ; nous nous trouvons, dit-il, devant *cinq* choses différentes :

- (1) des couples (a, b) ;
- (2) pour une certaine opération $\perp$, des couples composables ;
- (3) les composés de a et b par l'opération précédente, notés $\perp(a, b)$;
- (4) le symbole $\frac{a}{b}$;
- (5) le mot *fraction*.

Or, même si l'on écarte (1) pour se limiter aux couples effectivement composables, des habitudes anciennes et aussi les circonstances, le « contexte » nous amènent à introduire des synonymies assez vagues. Ce peut être une commodité (dangereuse) dans l'usage courant, ce n'en est sûrement pas une quand on essaie d'y voir clair.

Le cas du symbole $\frac{a}{b}$ est encore relativement simple. Car admettre la synonymie de cette écriture avec (2) serait jeter l'interdit ou du moins l'équivoque sur des « égalités » aussi usuelles que $\frac{4}{6} = \frac{6}{9}$, pour ne rien dire de $\frac{6}{3} = 2$, ou $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{1,5}$; pas une seule œuvre mathématique vieille ou récente, pas un seul manuel n'y résisteraient. Malgré la conviction et le talent de certaines plaidoiries, cette assimilation paraît donc inacceptable ; lorsqu'on a *vraiment* besoin des couples — ce qui dans la pratique n'arrive pas si souvent —, qu'on les note (a, b) , à la rigueur (a/b) , $\left(\frac{a}{b}\right)$..., mais

surtout pas $\frac{a}{b}$, sinon devant un public averti. En revanche la synonymie de (3) et (4) ne pose aucun problème : les écritures rappelées ci-dessus ne sont alors ni plus ni moins banales que $5 + 7 = 3 + 9 = 12$.

C'est le mot *fraction* qui est un casse-tête. Est-ce que $\frac{2}{5}$ est une « fraction » ?

Dans ce cas comment les trois rationnels *indiscernables* $\frac{2}{5}, \frac{4}{10}, \frac{8}{20}$ pourraient-ils être qualifiés l'un de « fraction irréductible », le second de « fraction décimale », alors que le troisième ne mérite aucune de ces qualifications ? La « fraction » est-elle donc le couple d'entiers (2, 5) ? A cette opinion assez traditionnelle — et défendable si tout le monde l'adopte — une seule objection, mais de taille : cette « fraction », il faut éviter de l'écrire $\frac{2}{5}$. Arrivés à ce point, mes correspondants cherchent en général à biaiser : la fraction est bien un couple, mais un couple appartenant à un ensemble sur lequel a été définie une équivalence R. Autrement dit, ils veulent rester à mi-chemin entre l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ des couples composables et l'ensemble-quotient $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/R$, c'est-à-dire l'ensemble des rationnels.

Ce malaise révèle assez que, dans l'état actuel du langage et des idées, « fraction » ne désigne pas un être mathématique (sinon on saurait dans quel ensemble le ranger), mais bien une *notation*, c'est-à-dire un être périmathématique. En toute rigueur *une fraction est la notation d'un rationnel au moyen d'un couple d'entiers*, de même par exemple qu'un « nombre décimal » n'est que la *représentation* décimale d'un rationnel décimal. Finalement beaucoup de collègues, même réticents au départ, sont tombés d'accord sur ce point.

Si nous étions conséquents avec nous-mêmes, nous devrions donc écrire la fraction par exemple « $\frac{2}{5}$ » et parler non de fractions « équivalentes » (adjectif convenant aux couples) ou « égales » (adjectif convenant aux rationnels), mais de fractions *synonymes*. Je ne prétends pas que cette règle de conduite soit aisée à observer en toutes circonstances ; la tendance à confondre le signifiant et le signifié nous incite à dire *fractions égales* pour *rationnels égaux*. On peut considérer que cela est *tolérable*, d'autant plus qu'on ne voit pas comment l'éviter dans le cas des « fractions rationnelles », puisque nous manquons d'un mot simple pour désigner le quotient de deux polynômes. On peut toujours proposer un néologisme, bien sûr, par exemple *méronome* ? mais en attendant le jour hypothétique où il sera adopté (lui ou un autre), il faudra bien se résigner à l'abus de langage qui confond le couple et le composé : au moins faut-il en avoir conscience.

J. C.

P.S. Parlant de *polynômes*, j'ai plaisir à constater que les récents ouvrages de Clopeau, Cluzel et Vissio ont enfin tordu le cou à l'affreux accent circonflexe dont l'Académie a cru devoir « orner » le mot au désespoir de tous les linguistes ! (Qu'attendent les Quarante pour fonder « l'Autonôme des Gastronomes éconômes » ?). Nos collègues ont été plus timides pour *monôme* qu'ils ont hésité à dépouiller de son chapeau ; il est vrai que la question est plus controversée, et d'ailleurs insoluble, le mot étant tout simplement mal formé.

Encore les fractions.

N.D.L.R. — Il nous a paru intéressant de faire suivre la note sur le « fractionnisme impénitent » par un plaidoyer pour les fractions et de rapprocher une note sur la « mesure complexe d'un vecteur ».

Une chose me préoccupe depuis longtemps : l'absence des fractions du programme de Sixième, alors qu'elles sont enseignées à l'école primaire (cours moyen 1 et 2) et, bien sûr, dans les plus grandes classes.

Je voyais là, d'abord, une incohérence comme on en trouve beaucoup dans nos programmes ; mais depuis l'amélioration de l'enseignement des mathématiques dans le premier cycle des lycées, due en grande partie aux efforts de l'A.P.M., je constate que cette situation subsiste ; bien plus, elle se trouvera renforcée, si les programmes établis par la commission Lichnérowicz (d'accord, je crois, avec l'A.P.M.) sont un jour appliqués, puisqu'alors les fractions ne figureront pas plus dans l'enseignement de Cinquième que dans celui de Sixième. Or, en même temps, l'A.P.M. publie un projet de programme pour les classes élémentaires (*Bulletin* n° 258) dans lequel les fractions tiennent une place assez importante, et sont d'ailleurs introduites d'une façon très pertinente.

Cette situation me paraît tout à fait contradictoire. En effet de deux choses l'une :

1) Doit-on se donner du mal pour enseigner aux enfants une notion importante, la leur laisser oublier pendant deux ans, et être obligé de tout recommencer ensuite ? Que de temps et d'efforts perdus, pour les maîtres comme pour les élèves !

2) Ou alors — puisque le projet de Sixième et Cinquième, même s'il a un caractère expérimental, semble refléter assez nettement les intentions pédagogiques stables de ses auteurs — les fractions ne sont-elles maintenues au Cours Moyen qu'à titre transitoire, dans la perspective d'une suppression totale ? Cela me paraît difficile à accepter... Dans l'avenir, les enfants n'entendront-ils parler de fractions qu'à partir de la Quatrième ? Je pense qu'il faut admettre qu'un élève de Cinquième sache, par exemple ce que signifie « prendre les $\frac{3}{4}$ de 12 »... mais comment l'aura-t-il appris ? Uniquement dans la « vie courante » ?

Suis-je seule à m'étonner de ces contradictions ? Dans les essais pédagogiques publiés récemment par l'A.P.M., on jongle avec les anneaux ; on introduit les nombres négatifs par une méthode qui bien que maintenant classique n'est pas des plus simples, au moyen de classes d'équivalence sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (article de E. Dehame, *Bulletin* n° 259) ; les problèmes linéaires traités, avec beaucoup de subtilité, par M^{me} Touyarot (*Bulletin* n° 261) concernent des modules à plusieurs dimensions sur $\mathbb{Z}$; bref tout le monde semble avoir pris son parti de l'absence des fractions.

Les nombres rationnels tiennent pourtant une place assez grande dans les mathématiques et leur enseignement pour que la chose, à mon avis, mérite d'être discutée. Je souhaiterais que les membres de l'A.P.M. qui ont participé à l'élaboration des programmes de la commission Lichnérowicz expliquent en détail les raisons de leur choix. De toutes façons, les projets ne sont-ils pas publiés dans le *Bulletin de l'A.P.M.* pour être discutés par tous les enseignants « de la Maternelle aux Facultés » ? Permettez-moi donc de présenter quelques arguments en faveur de l'enseignement des nombres rationnels en Sixième et en Cinquième.

1. M. Revuz pense que si, à la différence des nombres négatifs, les fractions ont été jusqu'à présent enseignées chez nous aux jeunes enfants, c'est par fidélité aux traditions, parce qu'elles étaient connues des anciens grecs. Ne serait-ce pas plutôt parce qu'elles sont d'un usage très courant ? Tous les enfants savent ce qu'est un partage. On peut donner des fractions des représentations très directes, très concrètes. Les nombres négatifs ont des applications plus restreintes et plus « savantes » dans le domaine des grandeurs « repérables » telles que les températures, les dates historiques,

et dans la pratique ne donnent lieu qu'à peu d'opérations (comparaison, ou addition ou soustraction d'un nombre positif).

2. Si l'introduction des nombres rationnels pose certains problèmes pédagogiques, leur ignorance prolongée en pose bien d'autres.

Ainsi tous les problèmes « linéaires » d'un type très classique cité par M^{me} Touyarot ont des solutions en nombres entiers ; et nous ne nous en étonnons pas ; *d'après la façon dont le problème est posé, on sait qu'il a une solution* (M^{me} Durand a acheté 10 m de ruban et 20 m de dentelle, etc... elle a payé tant ; le prix du mètre du ruban ou de dentelle ne peut être qu'un nombre entier de centimes, et la facture du mercier donne la preuve que nos calculs conduiront nécessairement à des nombres entiers ; et la preuve que l'élève ne s'est pas trompé est que son opération « tombe juste »).

Ainsi, le fait qu'un problème ait ou non une solution en nombres entiers dépend des données numériques initiales ; mais l'élève ne se préoccupe pas de savoir comment ni pourquoi, c'est l'affaire du maître ou du livre ! Ces problèmes « scolaires » diffèrent essentiellement des vrais « problèmes mathématiques » où il s'agit non seulement de trouver un résultat, mais d'expliquer comment il dépend des hypothèses initiales. Certes, si on adopte la méthode de M^{me} Touyarot et si on en pousse l'étude assez loin, on peut expliquer pourquoi tels problèmes linéaires ont une solution en nombres entiers et tels autres non ; mais beaucoup d'enseignants auront-ils la patience d'exposer jusqu'au bout ces raisonnements longs et délicats, et ne se contenteront-ils pas de donner des problèmes dont la solution « tombe juste » ?

3. Avec cette ignorance volontaire des nombres rationnels, les programmes de Sixième et de Cinquième paraissent pleins de lacunes (comme l'ensemble $\mathbb{Z}$ lui-même !) Ainsi pourquoi étudie-t-on le « partage d'un segment en n parties égales » alors qu'un nombre ne peut pas être partagé en n parties égales ? Et quelle sera la longueur des segments obtenus, si on connaît la longueur du segment initial ? Un tel segment n'aura-t-il qu'une « longueur à un millimètre près » par exemple, et non pas une « vraie longueur » ?

4. Craint-on la difficulté de l'étude des nombres rationnels, parce que l'introduction exige, d'une façon ou d'une autre, l'établissement d'une relation d'équivalence dans l'ensemble des couples de nombres entiers ? (Dans ce cas, on n'est pas d'accord avec M. Dehame qui introduit les nombres négatifs à l'aide d'une équivalence sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, alors qu'il pourrait utiliser d'autres méthodes.) Mais lorsqu'on demande d'étudier des exemples de « couples de fonctions numériques f et g proportionnelles » (programme de Sixième) que fait-on d'autre que d'établir une relation d'équivalence entre des couples de nombres ? De même quand on étudie « l'ensemble des x, y tels que $x = at, y = bt$ » (programme de Cinquième). Faisons correspondre à la droite portant ces points la fraction $\frac{a}{b}$, et tout sera plus clair.

Je mentionne pour mémoire les fameux problèmes utilisant la « règle de trois », dont « l'automatisme stérile » peut être brisé par l'usage des fractions, même si on ne dispose pas de tableaux de nombres ou de papier millimétré (programme du Cours Moyen).

5. Même en choisissant les problèmes « ad hoc », on s'aperçoit rapidement que les nombres entiers ne suffisent pas. On introduit donc les nombres décimaux. Remarquons d'abord que les nombres décimaux sont des fractions, et que la mesure du temps et celle des angles, étudiées en Sixième, utilisent des fractions non décimales. Une généralisation ne doit pas demander un grand effort.

Les problèmes linéaires envisagés ci-dessus n'ont en général pas plus de solution dans les nombres décimaux que dans les nombres entiers. Évidemment, ils ont des

« solutions décimales approchées, mais qui approchent... quoi ? Ce qu'on calcule par la division avec une approximation » aussi grande qu'on veut, qu'est-ce que c'est ? N'est-ce pas un nombre ? L'inconvénient de l'ignorance des fractions apparaît très nettement à la lecture du passage suivant, tiré d'un livre de Sixième dont, par ailleurs, j'apprécie les qualités pédagogiques (il s'agit d'un exemple de grandeurs proportionnelles) : Formons les quotients : $\frac{50}{15}$, $\frac{70}{21}$, $\frac{80}{24}$. En simplifiant le premier par 5, le second par 7, le troisième par 8 nous trouvons que ces quotients sont tous égaux au quotient de 10 par 3. Il y a bien proportionnalité. Mais si l'on effectuait les divisions de 50 par 15, de 70 par 21, de 80 par 24, on trouverait des quotients de la forme :

3, ou 3,3 ou 3,33, etc...

et la proportionnalité pourrait ne pas apparaître.

En fait, la proportionnalité ne s'exprimerait ici que par l'égalité des quotients avec une même approximation, quelle que soit cette approximation (souligné par l'auteur).

Voilà un langage bien abstrait, et des considérations qui seraient inutiles si on avait le droit d'utiliser des fractions !

6. Les programmes de Sixième et de Cinquième ont raison, à mon avis d'insister sur l'importance des approximations ; et je pense qu'il serait possible et utile de faire déjà une distinction entre les approximations limitées par les instruments de mesure et celles, « aussi grandes qu'on veut », que permet le calcul, avec l'exemple de l'approximation décimale d'une fraction.

La notion d'approximation n'est pas toujours exposée de façon claire aux enfants. Dans plusieurs livres de Sixième, on leur fait mesurer la longueur du cercle à l'aide de curvimètres ou de fil tendu. Après avoir calculé à 0,1 près, à cause de l'imprécision des instruments de mesure, le rapport entre cette longueur et celle du diamètre, on énonce « comme fait d'expérience que la longueur et le diamètre du cercle sont des grandeurs proportionnelles ». Puis on donne une « meilleure approximation » de π avec 7 décimales, sans autre explication. Les enfants s'imagineront peut-être que ces décimales ont été obtenues avec un fil mieux tendu, ou de meilleurs instruments ! Ne vaudrait-il pas mieux leur dire qu'on ne les a pas obtenues par une mesure, mais par un calcul qui n'est pas encore à leur portée ?

A propos du nombre π , une remarque anecdotique : feuilletant un livre de Sixième pour voir si les fractions, absentes du cours, sont néanmoins utilisées pour une « révision » dans les problèmes, la première fraction que je trouve est... $\frac{22}{7}$,

dans un conseil pour un calcul : prendre $\pi = \frac{22}{7}$ (je crois qu'il faut bannir absolument cette assimilation de π à un nombre rationnel).

Tous les problèmes d'indices, de taux, de pourcentages utilisent des fractions. Certes, ce sont des fractions décimales et il est normal de privilégier le système décimal. Mais dans les classes de Cinquième et parfois même plus tôt, les enfants étudient souvent les systèmes de numération non décimaux, ce qui est pour eux un exercice plein d'attrait et d'une grande valeur pédagogique (voir p. ex. l'article de M^{me} N. Picard dans *le Monde* du 12.9.1967). Alors, pourquoi ne pas étendre cette étude aux « sous-multiples de l'unité » où elle apporterait quelque chose de vraiment nouveau ?

7. Dans les projets de programme de Sixième et de Cinquième, je ne vois pas figurer l'étude sur des exemples de la divisibilité des entiers, qu'on enseigne pourtant actuellement en Cinquième. Cette étude serait nécessaire à celle des fractions ; elle s'inscrirait aussi tout naturellement dans l'étude « d'exemples de couples de fonctions

numériques f et g proportionnelles ». De plus, elle aurait l'avantage d'exercer les enfants aux opérations de multiplication et de division qui ne sont prévues dans les projets de programme que comme « exercices de contrôle », et permettrait en plus de faire un pas vers la *compréhension* de ces opérations (et pas seulement vers « l'acquisition de mécanismes »).

Enfin, l'étude de la divisibilité des entiers permet de nombreux exercices utilisant le vocabulaire des ensembles, et qu'au niveau de la Sixième et de la Cinquième, on trouve difficilement ailleurs en Mathématiques. Même des enfants aussi jeunes peuvent comprendre que le langage ensembliste, s'il peut être appliqué à n'importe quel objet, a été créé pour être appliqué aux Mathématiques... et non pas aux poires et aux pommes !

8. Les problèmes utilisant la division doivent être de deux sortes ; ceux pour lesquels la solution est nécessairement un nombre entier (mais ne « tombe » pas forcément « juste ») et pour lesquels on utilise la vraie « division euclidienne » avec quotient et reste, ou le quotient par excès : (ex. : un autocar peut contenir 37 personnes ; combien faut-il d'autocars pour transporter tant de personnes ?) ; d'autre part, les problèmes dont la solution doit être donnée sous forme de fraction, qu'on peut ensuite approcher par un nombre décimal.

En lisant les projets de programme de Sixième et de Cinquième, et en particulier en les comparant à l'enseignement actuel de Cinquième, on a l'impression que tout ce qui concerne la division, divisibilité etc... a été relégué vers les classes ultérieures. Tout se passe comme si on était pressé d'obtenir une structure d'anneau avec toutes ses propriétés ; pour les corps, on verra plus tard. Il y a là un esprit de système, certes dans le goût du jour, mais dont je ne vois pas l'intérêt pédagogique.

Ce que je propose ? De continuer en Sixième et en Cinquième l'étude des fractions commencée au Cours Moyen dans l'esprit du projet de l'A.P.M. ; ce qui n'empêchera pas d'introduire les entiers relatifs. Si l'on craint une surcharge des programmes, on sera peut-être obligé de renoncer à une étude approfondie de l'anneau $\mathbb{Z}$, et il ne sera pas question non plus de connaître toutes les propriétés du corps $\mathbb{Q}$. Mais quelle importance ? Il est, je crois, plus efficace d'habituer peu à peu les enfants à manipuler des objets mathématiques nouveaux que de leur présenter d'emblée une belle (et unique) structure.

Je souhaiterais vivement connaître le point de vue de nos collègues sur ces questions.

M^{me} Marianne Guillemot.
(Faculté des Sciences, Paris).

Notation et présentation de la mesure complexe d'un vecteur

La mesure complexe d'un vecteur dans le plan complexe généralise la mesure algébrique d'un vecteur sur un axe. On peut donc commencer par rappeler la définition et les propriétés de cette dernière, pour les étendre ensuite, presque mot à mot, à la première.

Nous désignons par $\overrightarrow{AB}$ le *vecteur*, classe d'équivalence dont le bipoint (A, B) est un représentant (1). La mesure algébrique de $\overrightarrow{AB}$ sur un axe est le réel, dont la

(1) Inutile de préciser que ce vecteur est *libre*, car « cela n'ajoute rien, que de la confusion », comme le dit justement J. Chevallier dans le *Bulletin* 263-264 (p. 318).

valeur absolue mesure la longueur de $\overrightarrow{AB}$, et dont le signe (+) ou (—) indique si (A, B) et l'axe-support sont de même sens ou non. On la note $\overline{AB}$, qui se lit aussi AB barre. Le rapport $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}$ de deux vecteurs est par définition le nombre réel $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$.

Si l'axe est pointé (c'est-à-dire doté d'un point origine O), $\overline{OA} = a$ est l'abscisse de A. L'isomorphisme des groupes $(\mathcal{U}_1, +)$ et $(\mathbb{R}, +)$, défini par $\overrightarrow{AB} \mapsto \overline{AB}$, conduit alors au théorème de Chasles et à ses corollaires :

sur un axe OX	dans un plan XOY
$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$	$\widetilde{AC} = \widetilde{AB} + \widetilde{BC}$
$\overline{AB} = b - a$	$\widetilde{AB} = b - a$
$m = \frac{a+b}{2}$	$m = \frac{a+b}{2}$
$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{b-a}{d-c}$	$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = \frac{\widetilde{AB}}{\widetilde{CD}} = \frac{b-a}{d-c}$

(m est respectivement l'abscisse ou l'affixe du milieu de $\overrightarrow{AB}$).

Considérons maintenant le plan complexe de repère orthonormé XOY. La mesure complexe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le nombre complexe, dont le module mesure la longueur de $\overrightarrow{AB}$, et dont l'argument $(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{AB})$ indique la direction et le sens de (A, B). On la note $\widetilde{AB}$, qui se lit aussi *AB tilde*.* Le rapport $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}$ de deux vecteurs

est par définition le nombre complexe $\frac{\widetilde{AB}}{\widetilde{CD}}$. Le complexe $\widetilde{OA} = a$ s'appelle l'affixe

de A. L'isomorphisme des groupes $(\mathcal{U}_2, +)$ et $(\mathbb{C}, +)$, défini par $\overrightarrow{AB} \mapsto \widetilde{AB}$, conduit alors au théorème de Chasles et à ses corollaires. Si $\widetilde{AB} = z$, on dira que $\overrightarrow{AB}$ est l'image vectorielle de z . Remarquons que si $\overrightarrow{AB}$ a la direction de $\overrightarrow{OX}$, $\widetilde{AB} = \overline{AB}$ grâce à la convention $(\alpha, 0) = \alpha$ pour tout complexe à partie imaginaire nulle.

La notation polaire $\widetilde{AB} = [AB, (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{AB})]$ donne :

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = \frac{\widetilde{AB}}{\widetilde{CD}} = \left[\frac{AB}{CD}, (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB}) \right] = z \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = z \overrightarrow{CD}.$$

En application l'élève établira facilement les résultats classiques suivants :

— Trois points A, B, C sont alignés si et seulement si $\frac{b-a}{c-a}$ est réel.

— D est sur la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ si et seulement si :

$$\text{Arg}(d-a)^2 = \text{Arg}(b-a)(c-a)$$

— En désignant par $(.)$ la multiplication d'un vecteur par un complexe, $(\mathcal{U}_2, +, .)$ est un espace vectoriel de dimension 1 sur le corps $\mathbb{C}$.

E. Ehrhart.
(Lycée Kléber, Strasbourg).

(*) Le *tilde* est, comme on sait, utilisé en phonétique. Le dictionnaire donne aussi *tildé*, « surmonté d'un tilde ».

Enquête sur l'enseignement de statistique et de calcul des probabilités dans les classes de Première et Terminale

Le Calcul des Probabilités et la Statistique ont été inscrits en 1966 au programme de certaines classes de première et terminale ; ils sont maintenant enseignés depuis deux ans, de nombreux ouvrages leur ont été consacrés, des stages ont été organisés dans la plupart des académies pour les enseignants. Il semble utile de faire le point, aussi proposons-nous à tous les lecteurs du *Bulletin* qui se sentent concernés, d'envoyer leur opinion sur cet enseignement, les difficultés qu'ils ont éprouvées en l'exposant à leurs élèves, les points sur lesquels ils souhaiteraient le voir réformer.

Nous leur suggérons ici quelques thèmes de réflexion que nous ne considérons pas comme limitatifs.

En adressant leurs observations avant le 15 janvier 1969, ils permettraient la publication d'une synthèse de leurs remarques dans le *Bulletin* de Mai 1969.

L. Guerber et P.-L. Hennequin,
34, avenue Carnot, 63-Clermont-Ferrand.

1. Les programmes actuels.

1° Le découpage qui attribue la statistique descriptive à la classe de Première et ne fait commencer le calcul des probabilités qu'en classe terminale est-il heureux ?

2° Est-il normal qu'un élève de Terminale C ou E n'ait aucune notion de calcul des probabilités ?

3° Est-il raisonnable de charger davantage le programme de B que celui de D ; en particulier le chapitre sur les « indices de la vie économique » ne serait-il pas mieux à sa place dans le cours d'économie ?

4° La rédaction du programme est-elle partout suffisamment explicite ? Sur quels points vous semble-t-il nécessaire de préciser les limites du programme ?

5° Le vocabulaire est-il bien défini ? N'y aurait-il pas lieu de le moderniser et d'en éliminer certains termes ambigus (p. ex. : loi) ? Les notations sont-elles uniformes ?

6° Dans la mesure où le programme des classes de Terminale B et D prévoit explicitement l'étude des « lois » de Laplace et de Poisson, il semble que l'espérance mathématique doive être définie pour une variable continue ou discrète dénombrable. Est-il raisonnable d'introduire à ce propos dans ces classes les notions d'intégrale impropre et de somme d'une série qu'utilise explicitement cette définition ?

7° « L'énoncé commenté » du théorème de Borel (programme de Terminale B) suppose donnée la définition de la convergence presque sûre. Ne s'agit-il pas là d'une notion trop difficile ?

8° L'étude des « principes de la méthode statistique » peut se comprendre comme l'étude, sur l'exemple simple de la composition d'un ensemble ayant deux sortes d'éléments, du vocabulaire de la théorie des tests et de l'estimation, mais la rédaction du programme semble souhaiter qu'on aille jusqu'à l'utilisation de tables dont la validité repose sur des hypothèses délicates de normalité pour les variables étudiées.

2. L'enseignement.

1° Quels problèmes pose l'introduction de la notion de probabilité à des élèves de formation littéraire ? économique ? expérimentale ?

2° Comment cet enseignement peut-il s'insérer dans l'ensemble de l'enseignement des mathématiques ?

3° Comment cet enseignement peut-il se coordonner avec celui d'utilisateurs éventuels de la statistique (géographes, biologistes, linguistes...) ?

4° Vous semble-t-il préférable de le concentrer au maximum ou de le répartir sur toute l'année ?

3. Exercices et Travaux Pratiques.

1° Le lot d'exercices dont vous disposez vous semble-t-il suffisant. Y aurait-il lieu de le développer ? (Joignez, p. ex., un texte original à votre réponse.)

2° Les exercices de statistique nécessitent souvent des calculs longs et fastidieux. Quels moyens préconisez-vous pour réduire cette partie mécanique du travail des élèves ?

3° Avez-vous accès facilement à des sources d'information statistique (publications de l'I.N.S.E.E.) ; vous semblent-elles directement utilisables ? Pensez-vous que la visite des services statistiques d'une usine, d'une administration, de l'I.N.S.E.E. pourrait vous aider dans votre tâche ?

4° Ne souhaiteriez-vous pas voir demander des « commentaires » de statistique imposant à l'élève un effort de réflexion sur les origines et la validité des statistiques publiées ?

5° Avez-vous essayé de bâtir tout votre enseignement, sans manuel, sans exposé, en partant de données numériques éventuellement collectées par la classe ?

Les élèves vous posent-ils des questions sur des sujets d'actualité où les méthodes de la statistique sont utilisées (recensement, enquête d'opinion ou autre) ?

4. La formation et la documentation des enseignants.

1° Vous semble-t-il nécessaire d'organiser encore des stages, sessions ou exposés à l'intention des enseignants, consacrés exclusivement au calcul des probabilités et à la Statistique ?

2° Les références bibliographiques que vous possédez vous semblent-elles suffisantes ? Souhaitez-vous d'autres références et sur quels chapitres ? Avez-vous éprouvé des difficultés pour vous procurer certains ouvrages ? Lesquels vous ont le plus aidés dans votre enseignement ?

Pour apprendre à conjecturer...

Les deux ouvrages de nos Collègues Guerber et Hennequin :

1. *Initiation à la statistique*, 1967, 25 F ;
 2. *Initiation au Calcul des probabilités*, 1968, 25 F ; relié, 30 F.
- sont disponibles.

Les souscripteurs ont été servis (avec un délai supplémentaire pour les volumes reliés).

Si vous n'avez pas souscrit, commandez-les en suivant les instructions rappelées p. 420.

Parmi nos lettres

■ De J. BOUTELOUP, Lycée Corneille (Spéciales A'), Rouen.

Désaccord profond.

le 17-9-68

Cette lettre a pour but essentiel de vous faire connaître mon désaccord profond avec l'action des dirigeants de l'A.P.M. depuis un an, et notamment au moment des événements de mai...

Je suis de ceux qui estiment que la modernisation de l'enseignement des mathématiques doit être faite avec la plus grande prudence, et ce d'autant plus que les élèves sont plus jeunes. Je trouve parfaitement normal que des collègues aient à ce sujet des opinions différentes des miennes. Mais j'estime essentiel que toutes les tendances puissent se manifester librement, tant dans le *Bulletin* que dans toutes réunions organisées par l'A.P.M., et que l'action de notre société doit se manifester par l'avis de la majorité, tous les adhérents, lorsqu'ils sont parfaitement au courant des diverses options, étant démocratiquement consultés. Or je déplore, depuis un an, une absence regrettable de cette indispensable démocratie, une « minorité agissante » voulant en quelque sorte mettre la majorité des adhérents devant le fait accompli.

J'ai vainement cherché dans les *Bulletins* 258 (mai-septembre 67) et 259 (décembre 67) la moindre allusion à la réunion de Chambéry. Pas un des nombreux collègues que j'ai pu contacter depuis n'était au courant. Comment ont été désignés les participants ? Mystère total. Mais certainement pas démocratiquement, ni avec le souci de représenter les diverses tendances. Aucune allusion n'est faite à cette réunion dans le *Bulletin* 260 (janvier-février 68). Ce n'est qu'à 2 semaines de l'assemblée générale, dans le *Bulletin* 261 (mars-avril 68), que nous apprenons à la fois l'existence et les décisions de cette réunion... La discussion de cette « Charte de Chambéry » n'est prévue qu'à la réunion de l'Assemblée générale, à laquelle de nombreux collègues, dont j'étais, ne peuvent évidemment assister, à une seule séance, commençant à 20 h 30, et à laquelle sont prévues également le rapport d'activité du président, le compte rendu financier et le rapport sur les régionales. C'est absolument se moquer du monde !

Quant au fond de cette charte, il est pour moi, au moins aussi criticable que la forme sous laquelle on veut nous l'administrer. Et je n'ai pas peur de pronostiquer que cette opinion défavorable sur le fond serait celle de la majorité des adhérents de l'association, s'ils pouvaient lire et méditer, à côté des louanges, des critiques approfondies, telles que celles que je pourrais personnellement développer dans un article du *Bulletin*, cette lettre ne me permettant évidemment que de les esquisser. Me bornant donc ici à quelques thèmes de paragraphes d'un tel article, je m'élèverai avec force contre l'approbation enthousiaste de tout ce que disent les membres de l'enseignement supérieur au sujet de l'enseignement mathématique secondaire (et même primaire !)... Toute mon expérience pédagogique me fait m'élever avec force contre l'opinion de Revuz qu'il est « bien préférable d'introduire chaque notion tôt et progressivement ». L'affirmation gratuite que les difficultés n'existeront plus pour les élèves qui commenceront leur apprentissage des mathématiques modernes dès la maternelle m'apparaît à proprement parler « délirante ». Je dénie d'ailleurs qu'on puisse vraiment faire un tel apprentissage à l'école primaire ; on peut « faire jouer les élèves avec les groupes » comme on pourrait d'ailleurs (et ce serait à mon avis plus attrayant et plus à leur portée) les faire jouer avec des ellipses ; l'utilité m'apparaît nulle. Et comme cela demande du temps, ce sera, bien qu'on affirme gratuitement le contraire, au détriment de l'acquisition des techniques indispensables ; l'enfant vous dira gravement « qu'il y a une bijection entre deux ensembles quand on a tracé

des flèches vertes qui vont d'une pomme de terre à une autre », mais sera incapable de faire une multiplication (surtout si on a tout mélangé dans sa tête en lui parlant d'autres systèmes de numération !) ; bien entendu, à 12 ans, il parlera d'« injections », mais ne saura pas ce que signifie l'intérêt porté sur le livret de Caisse d'Épargne qu'il a gagné, puisqu'on ne lui enseignera plus les « connaissances indispensables dans la vie courante ». En un mot, nous aurons fabriqué un *monstre*.

Je m'élève également avec force contre le masochisme qui fait parler du « désastre général et permanent de l'enseignement traditionnel ». Notre école mathématique (l'une des premières du monde), nos ingénieurs (qui valent largement ceux de l'étranger) ont été formés par cet enseignement. Et je ne peux que constater que la désaffection des élèves pour les classes scientifiques du 2^e cycle, et les mauvais résultats de nombre d'entre eux dans ces classes, qui se manifestent depuis quelques années, sont apparus avec la « modernisation » des programmes de ces classes. Bien entendu, il y a des causes variées à ce phénomène, qu'il conviendrait d'étudier en détail. Mais j'estime néanmoins qu'il y a là une sérieuse mise en garde contre toute action hâtive dans ce domaine. Il faut donc expérimenter longuement. Mais ces expériences ne seront d'aucune utilité si l'on proclame le succès avant l'expérience, ou si l'on tait l'échec. Cette objectivité doit se manifester également quant à l'« utilité » des mathématiques modernes, et l'opinion à ce sujet des utilisateurs. S'il est des physiciens favorables aux mathématiques modernes, il en est de farouchement opposés, tels que Rocard. Et il ne faut pas perdre de vue également que certaines branches des mathématiques très utilisées actuellement, par exemple le calcul matriciel ou le calcul des probabilités, et qu'il est normal d'introduire à un certain stade de l'enseignement, pour le « moderniser », ne font pas partie de ce qu'il est convenu d'appeler, au sens de la charte de Chambéry, les « mathématiques modernes », et peuvent d'ailleurs s'exposer, du point de vue pratique de l'utilisateur, sans utiliser (ou très peu) de « mathématiques modernes ». Tout cela ne représente évidemment qu'un faible aperçu de tout ce que je voudrais dire sur ce sujet si vaste. Je conclurai en disant que si la rénovation de l'ensemble des études secondaires en mathématiques, que préconise la charte de Chambéry, est « très proche » de celle préconisée par Papy, alors elle est très éloignée de celle que je préconiserais ; car je serai d'accord avec notre collègue Chauvin pour qualifier les programmes de Papy de « démentiels ».

Les événements de mai étaient évidemment l'occasion rêvée pour la « minorité agissante » ci-dessus évoquée. En fait, son action « écrite » dans cette période ne s'est manifestée à moi que par une sorte de tract, intitulé : « texte adopté par le comité national du 9 juin 1968 ». La plupart des collègues n'en ont d'ailleurs pas eu connaissance. J'en ai eu un exemplaire entre les mains « par hasard », m'étant rendu à une réunion de la Faculté des sciences de Rouen où j'ai vu M^{me} Méténier, la présidente de la régionale de Rouen, qui en avait un paquet. Sans doute sera-t-il publié dans le prochain *Bulletin*? J'ai su depuis que la réunion qui a présidé à l'élaboration de ce tract, ne groupait qu'un certain nombre de membres du comité, acquis à ces idées. Voilà pour la forme ! Quant au fond, je n'entreprendrai même pas de critique ; le caractère ridiculement utopique ou franchement farfelu de plusieurs de ses affirmations se passent de commentaires auprès de tout collègue sensé...

Il importe donc absolument qu'un prochain *Bulletin* apporte tous apaisements à de nombreux membres de l'association sur ces divers sujets, et particulièrement sur le souci d'opérer dorénavant démocratiquement dans l'association. S'il n'en est rien, deux attitudes sont possibles : une action positive consiste à alerter le plus possible de collègues et à former une liste oppositionnelle pour la prochaine élection au comité ; certains collègues en ont l'intention ; le manque de temps m'empêche de participer à une telle action. Je choisirai donc l'attitude négative qui consiste, tout en restant membre de l'association pour manifester éventuellement mon désaccord par un vote, à cesser toute activité en faveur de celle-ci. J'ai accepté de collaborer à la création de la Régionale de Rouen, j'en ai été nommé vice-président, j'ai fait déjà

deux conférences et j'avais l'intention d'en faire de nombreuses cette année. J'ai décidé, si je n'ai pas à cette époque reçu les apaisements souhaitables, de lire cette lettre à la réunion de la régionale de Rouen qui aura lieu courant octobre, puis de démissionner de toutes les activités que j'y avais acceptées.

D'un point de vue plus général, je voudrais d'ailleurs vous signaler, pour finir, le tort que peut causer à l'association la publication d'écrits analogues au tract ci-dessus évoqué. Elle fait considérer ses membres (ou tout au moins ses dirigeants) comme des gens peu sérieux, avec lesquels il est inutile de discuter ou de collaborer. On m'a cité cette parole (dont je ne peux vous révéler l'auteur, sinon qu'il occupe un poste important) : « quant à ce que peuvent dire ou écrire les dirigeants de l'association des professeurs de mathématiques, cela n'a guère d'importance ». Une telle attitude est à mon avis inévitable envers des gens qui veulent notamment « récuser tous les modes actuels d'inspection ». Il s'agit finalement de savoir où se situe le véritable intérêt des collègues sérieux...

N.D.L.R. — Nous avons pratiqué quelques coupures, signalées par des points de suspension, dans la lettre de notre Collègue à qui d'ailleurs nous les avons signalées. Ces phrases mettaient en cause des personnes et nous désirons éviter les polémiques personnelles.

Précisons que les invitations au stage de Chambéry furent distribuées par l'intermédiaire des Régionales et qu'aucune limitation en nombre n'était imposée; aucune demande d'inscription n'a été refusée. Durant les journées de Marly la discussion sur le texte élaboré à Chambéry s'étendit, hors de l'assemblée générale proprement dite, au travail d'un groupe de discussion qui siégea le vendredi après-midi et le samedi matin. Certaines des critiques présentées par notre Collègue Bouteloup ont été présentées à cette occasion et le texte définitif que tous les membres de l'A.P.M.E.P. auront reçu (en supplément au *Bulletin* 264) en tient compte. Tel était d'ailleurs le but de l'examen du texte par l'Assemblée générale qui l'adopta par 589 voix contre 16 et 48 abstentions.

Il est parfaitement possible à des Collègues qui n'approuvent pas l'action de l'A.P.M.E.P. d'y faire opposition en présentant une liste de candidats pour le prochain renouvellement partiel du Comité.

■ De Daniel LACOMBE, Pr de logique mathématique à la Faculté des Sciences de Paris, cette lettre, publiée déjà par *le Monde* du 12 octobre 1968, dans un ensemble d'avis pour ou contre l'enseignement du latin :

La géométrie « euclidienne » ou le latin des scientifiques.

Il serait regrettable que la vieille querelle du latin dégénère une fois de plus en une opposition factice entre « littéraires » et « scientifiques ».

En fait, les scientifiques ont aussi leur équivalent du latin : c'est la géométrie « euclidienne » scolaire (depuis les « cas d'égalité des triangles » jusqu'aux « arcs généralisés » en passant par les « angles alternes-internes »), monument d'illogisme prétentieux et antipédagogique sans aucun rapport avec quelque mathématique — ancienne ou moderne — que ce soit. De même que cette pseudo-géométrie sert essentiellement à ne pas faire de véritable mathématique, de même le latin scolaire a pour conséquence (et probablement pour but, conscient ou non) d'empêcher toute étude sérieuse de la langue maternelle. Ou du langage en général. Et Euclide (pour autant qu'il ait existé) serait aussi stupéfait de voir ce que sont devenus ses éléments, que Cicéron de constater l'usage qui est fait de ses plaidoiries.

Quant à l'argument d'après lequel le latin développerait l'esprit logique, la meilleure réfutation en est fournie par un récent appel pour la défense des études

classiques (*le Monde*, 25 septembre, p. 8), dont les auteurs — qui ont certainement fait du latin — énoncent comme allant de soi l'implication suivante : « Les plus grands scientifiques étaient doués pour les langues anciennes, donc l'étude précoce des langues anciennes est nécessaire à la formation des scientifiques. »

■ De Bernard SAGE, P^r au C.E.S. de Isle-sur-Sorgue (Vaucluse).

«... Les Collègues voient dans le *Bulletin* un outil de formation permanente et surtout un guide. Personnellement, je souhaite que ce caractère se développe et qu'il soit, en plus, un réel trait d'union entre les professeurs de mathématiques des C.E.S. et ceux des lycées. Depuis que j'ai quitté un lycée pour enseigner dans un C.E.S., je constate qu'il existe une véritable coupure dans l'enseignement, tant dans les méthodes que dans le contenu. En mathématiques, elle pourra vite devenir très grave, même si l'enseignement de cette discipline n'est dispensé que par des certifiés, ce qui n'est absolument pas le cas dans les C.E.S. »

■ De M. J. GARDIEN, P^r au C.E.G. de Morlaàs (B.-P.).

« Il faut faire le maximum pour informer et essayer de remettre dans le coup les très nombreux professeurs de C.E.G., les sous-instruits de mon genre, pour qui il est très difficile de ne pas être totalement démodés, hors d'usage à 35 ans alors qu'il leur reste encore 20 ans au moins à enseigner de la Sixième à la Troisième! ».

N.D.L.R. — Notre Collègue est sévère pour lui-même. Cependant, nous comprenons son inquiétude et l'une des préoccupations permanentes de la rédaction est bien de réaliser ces contacts entre professeurs opérant à tous les niveaux, d'informer chacun, de faire progresser dans son ensemble la communauté heureusement très diversifiée des professeurs de mathématiques.

■ De M. M. SANNAY, P^r au C.E.G. de Vacqueyras (Vaucluse).

« Expliquez-moi donc un peu comment vous répartissez les articles dans le Bulletin! Dans la rubrique des *échanges*, je lis un article comme celui de G. Kréweras sur la somme cartésienne, et dans *nos classes* réunit un article sur la mesure des aires au Cours Moyen et une étude plus savante sur la programmation linéaire. Votre classification n'est-elle pas superflue? Trop subtile en tout cas. »

N.D.L.R. — Essayons de nous justifier. Notre Collègue a raison de critiquer la subdivision en rubriques, s'il veut y voir une rigoureuse partition de l'ensemble des articles. Mais toute mise en pages suppose un ordre, une certaine classification des articles qui compose un numéro du *Bulletin*. Les études qui visent très généralement à notre culture personnelle vont, de préférence à la rubrique *Le bâton des aveugles*, alors que les articles plus préoccupés de la façon d'enseigner vont à la rubrique *Dans nos classes*. Mais nos classes vont, comme chacun sait, de la Maternelle aux Facultés; et tout enrichissement de notre culture transforme notre enseignement alors que toute étude sur la façon de présenter la mesure des aires au Cours Moyen enrichit aussi notre culture.

Vont vers les *échanges* les notes sur la terminologie, les articles sur l'organisation de l'enseignement, les lettres, les petites notes dont la brièveté n'est pas un inconvénient, bien au contraire.

A cela, un de nos bons amis a fait l'objection que les professeurs qui n'ont pas beaucoup de temps libre ne lisent pas tout le *Bulletin*; bien souvent, ils laissent l'article

long du « bâton » pour plus tard et ils lisent tout de suite les petites notes. Est-ce une objection? Si la lecture des articles devait être faite dans l'ordre de la mise en pages, c'en serait une; mais chaque *Bulletin* propose à nos appétits un menu assez varié pour que, si la fantaisie vous en prend, vous commenciez par le dessert. N'oubliez pourtant pas le plat de résistance ni, comme disait ma grand mère, que tout fait ventre. Surtout si vous pensez, après avoir lu, à écrire vous-même ce que vous n'avez pas trouvé dans ces pages.

A propos du C.A.P.E.S. (Session de juillet 1968)

La remarque faite à propos de ce C.A.P.E.S. dans l'*Actuelle* du *Bulletin* 263 a entraîné un abondant échange de lettres que nous publions intégralement.

1. De M. Michel ALLIOT, Directeur du Cabinet du Ministre de l'Éducation Nationale à M^{me} TOUYAROT, à la date du 18 octobre 1968 :

Madame la Présidente,

Le numéro 263-264 du Bulletin de votre association publie, sous la signature de M. Gilbert Walusinski, professeur agrégé au Lycée de garçons de Saint-Cloud, un éditorial comprenant le passage suivant :

« Le C.A.P.E.S. de Mathématiques, limité cette année à des épreuves orales, s'est déroulé à Paris dans des lycées occupés par la police. Ce concours dépend-il encore de l'Éducation Nationale ou du Ministère de l'Intérieur? Quelle est la légalité d'épreuves orales non publiques, c'est-à-dire non librement ouvertes au public? Les présidents des jurys qui ont accepté de siéger dans des conditions aussi anormales ont pris une lourde responsabilité ».

Or il est absolument inexact :

- que les lycées visés aient été occupés par la police,*
- que les épreuves n'aient pas été publiques.*

Le témoignage des présidents et, s'il le fallait, celui des membres du jury, suffiraient à le montrer. Les affirmations de M. Walusinski sont non seulement sans fondement, mais encore parfaitement discourtoises, notamment à l'égard des présidents des jurys.

Je suis donc persuadé que vous voudrez bien apporter dans votre prochain numéro les rectifications que je viens de vous préciser à l'intention de vos lecteurs.

Je vous prie d'agréer, Madame la Présidente, l'expression de mes sentiments distingués.

Le Directeur de Cabinet,

Michel ALLIOT.

2. De plusieurs Collègues, membres des jurys des Capes, à G. WALUSINSKI, à la date du 26 octobre 1968 :

Cher Collègue, nous désirons faire la mise au point suivante, relativement au passage du bulletin de l'A.P.M., n° 263-264 rapportant les conditions dans lesquelles se sont déroulés les Capes masculins et féminins de Mathématiques lors de la session de juillet 1968.

1^o *Il n'y a pas eu d'occupation, par la police, des lycées où ont eu lieu les épreuves.*
2^o *Des observateurs ont été, sur leur demande, autorisés à assister au déroulement de celles-ci.*

Nous vous demandons d'insérer cette lettre dans le prochain bulletin.

Nous vous en remercions par avance.

Des membres des deux jurys :

M^{mes}, M^{lles}, MM. CUENAT, CARSIQUE, EDELIN, AUDIRAC, FOREST, LAULANET, LONJARET, GIROUD, LORIC, MICHAUD, SPANJAARD, BOULANGER, BOUSQUET, PRÉVOST, LOUSTALOT, LUSSIAA-BERDOU, LEFEBVRE, MOTTAL, ECALLE, DURUPT, THEVENIN, MEDER.

« Tout à fait d'accord pour le 1^o, mais il m'est impossible d'accepter la rédaction du 2^o » Signé: GODEFROY.

3. De M. FOREST à G. WALUSINSKI, le 22 octobre 1968 :

Monsieur, il est regrettable que vous utilisiez les colonnes du bulletin de l'A.P.M. pour vous livrer à des polémiques à caractère politique. Il est encore plus regrettable que vous vous appuyiez sur des assertions mensongères pour porter un jugement sur certains de nos collègues.

Il est faux que le C.A.P.E.S. de Mathématiques se soit déroulé dans des lycées occupés par la police. En ce qui concerne le C.A.P.E.S. masculin, vous pourrez recueillir des témoignages auprès des membres de son jury. Quant au C.A.P.E.S. féminin dont j'étais membre du jury, voici ce qui s'est passé.

Le premier jour, avant le début des épreuves, un service d'ordre a été installé dans la rue, aux abords du Lycée Victor-Duruy où se sont déroulées les épreuves. Il est exact que pendant quelques minutes, des policiers en civil ont interrogé les personnes qui pénétraient dans le lycée et il est aussi exact que ces mêmes policiers, en l'absence de l'appariteur qui était de service à l'entrée, ont franchi le seuil du Lycée.

Un collègue est alors arrivé, a bousculé un policier, et protesté contre la présence des policiers dans le lycée. Les policiers sont alors sortis et ne sont plus intervenus jusqu'à la fin des épreuves, se contentant d'assurer un service d'ordre dans la rue où aucun incident notoire n'est survenu.

Faisant partie de ceux que vos propos ont mis en cause, je vous prie de bien vouloir rétablir la vérité dans vos colonnes.

Acceptez, Monsieur, l'assurance de mes sentiments distingués.

4. De G. WALUSINSKI à M. FOREST, le 25 octobre 1968 :

Cher Collègue, votre lettre datée par la poste du 22 vient de me parvenir. En rédigeant un éditorial sur les événements de mai et juin ainsi que sur les mouvements qui ont agité l'Université et l'Éducation Nationale, je ne me suis livré à aucune « polémique à caractère politique » ; j'ai tenté, dans la mesure de mes moyens, d'analyser une situation concernant en particulier les problèmes de notre enseignement.

Je me suis gardé d'émettre le moindre jugement sur des Collègues. A propos des C.A.P.E.S., je n'ai cité aucun nom et n'ai mis en cause que les Présidents des jurys en tant que tels.

Selon des informations convergentes bien que d'origines diverses que j'avais recueillies, l'entrée du lycée Victor-Duruy, pendant une journée au moins, n'était possible qu'après remise de la carte d'identité à un service policier établi dans la loge du concierge. Conditions tout à fait anormales pour le déroulement d'un oral, en principe public. Voilà l'origine de ce que j'ai écrit.

Vous le contestez. J'enregistre votre protestation et ne manquerai pas de la porter à la connaissance des lecteurs du *Bulletin*. Votre lettre sera publiée intégralement dans le n° 265 ainsi que d'autres lettres concernant le même concours. Les lecteurs se feront eux-mêmes une opinion.

Sans doute penserez-vous, comme je le pense moi-même, que la place exacte des policiers par rapport à la porte d'entrée d'un lycée est d'importance secondaire si leur présence massive dans le voisinage immédiat de l'établissement en interdit pratiquement l'accès.

Ce qui me consterne, c'est que vous vous considériez comme mis en cause, alors que cela n'est pas. Le ton même de votre lettre me fait craindre que vous vous considériez comme diffamé. Si cela était, je serais bien coupable et vous devrais des excuses; mais je ne peux vous en présenter puisque cela n'est pas.

Agréez, cher Collègue, l'expression de mes sentiments dévoués.

5. De M. FOREST à G. WALUSINSKI, le 26 octobre 1968 :

Cher Collègue, à la lecture de votre lettre, je vois que votre information est fragmentaire.

Il est encore vrai que pendant une journée, il n'a été possible d'entrer au lycée Victor-Duruy qu'après remise de sa carte d'identité. Cette carte cependant n'était pas remise à un service policier, mais à un appareilleur dépendant authentiquement du ministère de l'éducation nationale et sous les ordres directs du président du jury. (Cet appareilleur, dont je connais le nom, participait en 1953 à la surveillance de la salle dans laquelle j'ai passé l'écrit de l'agrégation.)

Je dois vous préciser que si cette disposition a été prise (et pas seulement pour le C.A.P.E.S., mais aussi pour des centres de baccalauréat) c'est à la demande de la direction de la pédagogie, pour éviter que des provocateurs n'ayant aucun rapport avec le C.A.P.E.S., ne profitent de la liberté d'accès pour venir perturber les épreuves. J'ai vu des candidates empêchées par la force, de pénétrer dans les locaux d'examen. On s'en est même pris à une femme enceinte parce qu'elle désirait passer son concours.

C'est d'ailleurs à la suite d'événements semblables qu'a été mis en place, dans la rue, le deuxième jour des épreuves (et non pas le premier comme je l'ai indiqué par erreur dans ma précédente lettre) un service d'ordre dont la mission était non de contrôler les personnes pénétrant dans le lycée mais de garantir le libre accès de celui-ci.

Par ailleurs, vos propos mettent en cause tous les membres du jury. Les présidents respectifs des jurys masculins et féminins n'ont accepté de siéger qu'après avoir consulté lors d'une réunion commune l'ensemble des membres des deux jurys et recueilli leur accord unanime.

En vous priant de publier la présente mise au point à la suite des témoignages dont vous faites état, je vous prie d'agréer, cher Collègue, l'assurance de mes sentiments les meilleurs.

6. *Mise au point*, par P. VISSIO, Secrétaire Général de l'A.P.M.E.P.

D'avance, je prie les Collègues de m'excuser si je dois intervenir dans le *Bulletin* pour une mise au point. J'ai personnellement horreur de la polémique, mais après la publication des lettres précédentes, je crois devoir livrer à l'information des Collègues les simples faits dont j'ai été témoin (faits que j'aurais pu signaler dans le *Bulletin* 263-4 s'il ne m'avait pas paru préférable de les taire et de ne pas leur donner une importance sans doute exagérée).

Alerté par divers informateurs, collègues, candidats, syndicalistes, membres des jurys, sur les conditions dans lesquelles se déroulaient les épreuves des C.A.P.E.S. de mathématiques, je considérais que je devais me rendre sur place. Ainsi, le samedi 6 juillet, vers 14 h 30, me suis-je présenté devant le lycée Victor-Duruy où se passait le C.A.P.E.S. féminin. Tous les abords du lycée étaient surveillés par la police. A une centaine de mètres, au moins, de l'entrée secondaire du lycée, rue de Babylone,

un premier barrage me laissa passer après que j'eus répondu à la question « où allez-vous ? » A quelques mètres de l'entrée, des policiers en civil, entourés d'agents de police, m'interdirent d'aller au delà. Pour poursuivre mon chemin, il eût fallu que je remette ma carte d'identité. Devant mon refus, j'entendis la réponse : « *si tu n'es pas content, on t'embarque à Beaujon* ». N'ayant aucune raison d'aller de ce côté-là, je déclinai alors ma qualité de secrétaire général de l'A.P.M.E.P. et insistai pour pénétrer dans le lycée, précisant que les épreuves orales du C.A.P.E.S. devaient être publiques. Il me fut alors répondu, fort courtoisement, je le reconnais : « Nous obéissons aux ordres du Président du Jury ». Dans ces conditions, j'exigeai et j'obtins que fut transmis à celui-ci un billet par lequel j'exprimais : 1° mon désir d'assister à une épreuve de C.A.P.E.S.; 2° mon refus de remettre ma carte d'identité.

M. Cagnac vint alors à ma rencontre pour me dire qu'il « m'invitait » à pénétrer dans le lycée. Je dois à la vérité d'ajouter qu'à l'intérieur du lycée, dans le parc, quelques « promeneurs » attirèrent mon attention alors que, la semaine précédente, lors d'une de mes visites à des jurys de baccalauréat, je n'avais rien remarqué de semblable.

Après avoir assisté à un exposé par une candidate, je me rendis vers 17 heures au lycée Charlemagne où se déroulait le C.A.P.E.S. masculin. Là encore, les abords du lycée étaient surveillés par la police. Cependant, l'entrée du lycée étant située au fond d'un étroit passage, le déploiement de police était moins important que devant le lycée V.-Duruy. Pour obtenir l'ouverture de la grille d'entrée, il fallait indiquer le « motif de la visite ». Ensuite une personne en civil conduisait le « visiteur » auprès du Président du Jury, M. Maillard. Je dois encore à la vérité de dire, ce qui me permet de terminer sur un ton plus détendu, que je reçus un accueil très cordial et que je pus m'entretenir avec plusieurs Collègues, membres du Jury. Autres lieux, autres mœurs...

J'espère que les Collègues seront d'accord avec moi pour que je n'ajoute aucun commentaire à la sèche narration des faits. Le 28 octobre 1968.

P. VISSIO.

7. Peut-on conclure? Sur six pages d'un article évoquant les difficultés, les espoirs ou les déconvenues du printemps, les lettres précédentes sont relatives à une dizaine de lignes que je ne croyais certes pas si incendiaires, le 12 juillet, quand je les écrivais. A l'époque, ne sachant comment évoluerait une situation passablement compliquée relativement aux concours de recrutement, j'exprimais une inquiétude que, même *a posteriori*, je persiste à trouver justifiée sur les conditions inhabituelles dans lesquelles se passaient les épreuves.

On a vu, par les lettres précédentes, que la position exacte des policiers par rapport aux portes des lycées est sujette à contestation. Pour moi, je suis toujours inquiet quand le maintien de l'ordre, comme on dit, fait que leur présence devient visible.

Ce que je nie de façon catégorique, c'est d'avoir été discourtois à l'égard de quelqu'un. J'ai formulé un jugement sur la responsabilité qu'avaient prises les Présidents des jurys; je conçois tout à fait que ce jugement soit contesté; s'il l'est de façon probante, je le réviserai. Mais ce n'est pas contester un jugement que porter un autre jugement sur la forme du premier.

En fin de compte, les épreuves ont eu lieu sans autre incident. Il me paraîtrait plus utile, maintenant, de réfléchir aux conditions idéales que devraient remplir les futurs modes de recrutement. S'il ne tenait qu'à moi, je considérerais cette polémique sur le C.A.P.E.S. 68 comme close.

G. WALUSINSKI.

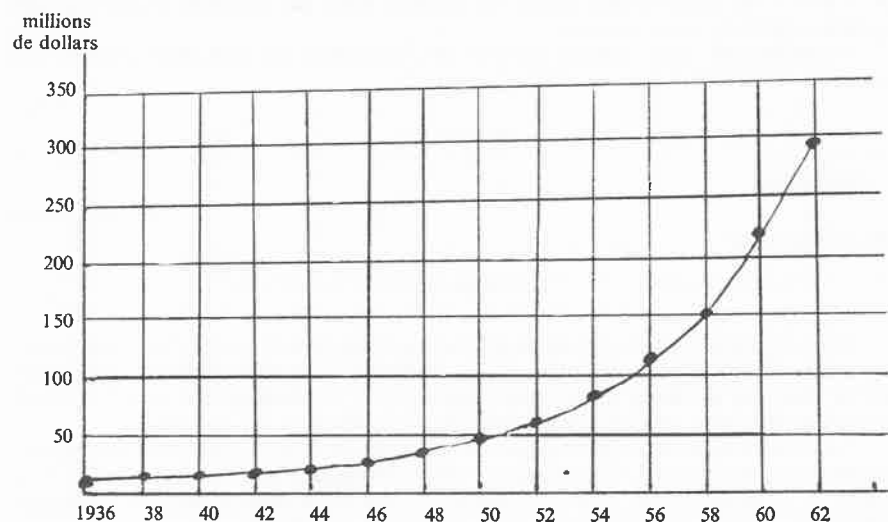
A propos de l'Industrie « Scolaire »

Lors du X^e Congrès de l'Association Mathématique du Québec consacré aux techniques d'enseignement, M. André Juneau, Président de la Société B.I.R.O. (Bureau d'Informatique et de Recherche Opérationnelle) a fait un exposé sur l'industrie scolaire, exposé précédé par la projection d'un film de l'Office National Canadien « Comment Savoir » et dont j'extrais les idées suivantes :

Quelles sont les forces qui agissent sur l'enseignement? On considère généralement que ces forces sont d'origine interne de sorte que l'enseignement serait quasi-autodéterminant. En réalité, ces forces doivent être repensées dans un contexte beaucoup plus large, contexte envahi par la technologie.

Les composantes organisationnelles de cet enseignement peuvent se ramener à trois types : 1^o le personnel; 2^o les bâtiments et sites; 3^o le matériel. Le phénomène caractéristique de notre époque est l'accroissement de la composante « matériel ». Cette composante n'occupe encore qu'une mince place à l'intérieur des budgets scolaires actuels (moins de 1 %), mais son évolution au cours des dernières décennies n'en est pas moins significative (voir la fig. ci-dessous). Et il est bien évident que faire passer ce budget de 1 à 10 %, par exemple, entraînera un changement important des conditions d'enseignement.

Comparaison des sommes consacrées à la composante « matériel » au cours des 30 dernières années aux États-Unis:



Or, il faut distinguer deux classes de matériel : le matériel destiné aux maîtres, à ceux qui enseignent et le matériel destiné aux élèves. Actuellement, l'effort de l'industrie scolaire se porte surtout sur ce second type de matériel destiné cette fois à une population beaucoup plus large que la population scolaire traditionnelle; il s'agit de matériel destiné à tous ceux qui apprennent c'est-à-dire finalement à une partie de plus en plus importante de la population enfants et adultes.

Les caractères de cette composante « matériel » sont :

- 1^o l'adéquativité aux divers besoins et contextes;
- 2^o la rapidité d'accès et d'emploi;

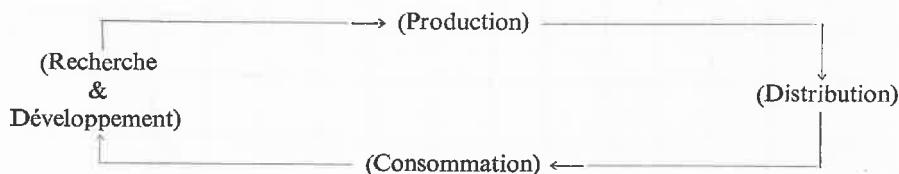
- 3° la productivité influant sur le coût unitaire;
- 4° la popularité des coûts (publicité chargée de sensibiliser le consommateur à ce nouveau produit de consommation : matériel dispensant des connaissances);
- 5° la diversité suivant les populations (dispersemment ou concentration p. ex.)

Il est en effet nécessaire d'envisager des formes multiples d'organisation scolaire (comparables à celle d'un autre secteur par exemple l'alimentation : 1° cuisine familiale avec produits bruts; 2° utilisation familiale de conserves; 3° livraison à domicile de mets tout préparés; 4° restaurants et cantines fixes; 5° cantines mobiles se déplaçant au gré des consommateurs, etc.).

La nature et la capacité des mémoires (pour textes, images et sons), leur accès plus ou moins rapide à distance plus ou moins grande, le contrôle plus ou moins précis des cheminements de l'apprentissage, le raffinement plus ou moins grand de l'orientation psychopédagogique, la présence complémentaire plus ou moins continue de la composante « personnel », et le rôle de cette présence, etc., le coût, finalement, du service global, les modalités d'acquisition de celui-ci (achat ou location), voilà autant de facteurs que l'on pourra retrouver différemment pondérés selon les divers contextes organisationnels scolaires.

Notons que cette diversité dans l'organisation matérielle de l'apprentissage a eu ses antécédents. L'enseignement par correspondance (avec ses livres, fiches, devoirs, et le service postal) — qui empêchait toute relation directe entre l'éduqué et le système éducatif —, les albums phonographiques d'apprentissage des langues vivantes, les « kits » de construction, furent en quelque sorte des systèmes précurseurs des systèmes entrevus pour l'avenir.

Actuellement, dans chaque branche de l'économie on peut distinguer quatre fonctions représentées par le schéma suivant :



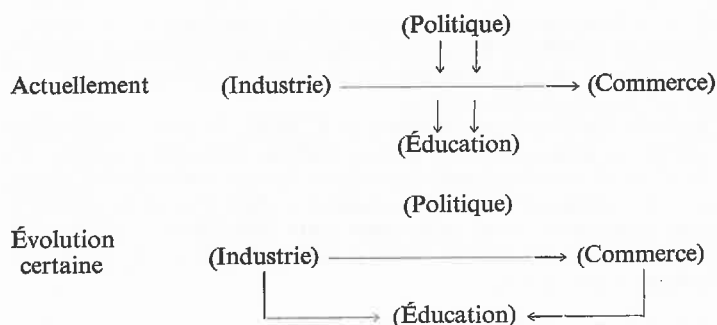
Dans le domaine scolaire, ces fonctions sont encore soit confondues, soit nulles. Par exemple, sur le plan des manuels, la recherche était pratiquement inexistante. Sur le plan des systèmes didactiques électroniques, la division des fonctions était inévitable. Il faudra prévoir à bref délai une spécialisation du personnel.

Le développement technologique, principalement dans le domaine des moyens d'expression, audiovisuel, informatique, télécommunication, est extraordinairement rapide. Il suffit de voir le chemin parcouru depuis 1954, date à laquelle le premier ordinateur commercial était utilisé dans l'industrie canadienne.

Or, l'industrie des données intéresse au premier chef l'enseignement. Cette industrie est caractérisée par : 1° le stockage; 2° l'accès immédiat; 3° le traitement rapide; 4° le décodage; 5° la transmission. C'est elle qui, actuellement, tend à dominer l'économie, c'est en elle que l'on trouve les plus grandes sociétés nord-américaines.

L'industrie scolaire est née de la rencontre de deux domaines : l'édition et l'électronique. Elle nécessite une main-d'œuvre de plus en plus importante. Deux courants se distinguent : d'une part le personnel spécialisé dans l'industrie de l'espace est adapté à cette nouvelle branche car il est préparé à la complexité des problèmes, à la miniaturisation indispensable, d'autre part certains pédagogues et éducateurs sont choisis pour des postes d'administration au sein de ces sociétés.

Sans entrer dans les détails, les schémas ci-dessous indiquent les influences qui s'exercent entre les quatre domaines suivants : politique, éducation, industrie, commerce.



Les liens entre la politique et l'éducation sont ainsi appelés à se relâcher. Les consommateurs en éducation vont servir de régulateurs. D'où l'importance extrême du rôle des consommateurs et de leur éducation. Un fait est significatif : pour la quatrième fois, une des plus importantes sociétés nord-américaines vient d'organiser un colloque sur l'enseignement réunissant près de trois mille personnes composées principalement d'hommes d'affaire, tant le marché qui s'ouvre est immense. Ce seul fait justifie l'importance que doivent attacher les enseignements à ce phénomène.

A ces idées que je me suis efforcé de ne pas déformer, j'ajouterai que si nous ne prenons pas conscience de ces faits, si, en particulier, les gouvernements, industriels, enseignants ne sont pas informés de la façon la plus large et la plus variée possible sur ce phénomène, nous nous retrouverons avant peu dans un état de sous-développement complet, avec des systèmes éducatifs complètement asservis à des modèles, architectures et techniques hors de notre contrôle. Nous avons le devoir d'agir le plus rapidement possible pour que la technologie soit au service de l'éducation dans le cadre des voies d'épanouissement de notre culture propre.

Marcel DUMONT.

Des « Cercles de Mathématique Moderne » pour les adultes.

L'introduction de la mathématique contemporaine se heurte souvent, entre autres obstacles, à l'hostilité plus ou moins déclarée de certains parents. Ils sont inquiets de ne pas retrouver dans les manuels et les cahiers de leurs enfants les « mathématiques de grand-papa ». Ils sont effrayés par les difficultés que, pensent-ils, le caractère abstrait et le vocabulaire nouveau de la mathématique contemporaine vont dresser devant les élèves et qui leur paraissent *a priori* plus grandes encore que celles des mathématiques traditionnelles. Ils ne voient pas l'utilité d'une telle évolution (ou révolution...) qu'ils attribuent volontiers à une mode passagère ou à une lubie de quelques professeurs dangereusement illuminés...

La régionale de Lyon de l'A.P.M. s'est donc résolue à s'adresser directement à eux et à leur présenter le problème de façon moins caricaturale.

Nous avons commencé par des conférences faites par des professeurs de mathématiques devant des associations de parents d'élèves, et par une brochure demandée et éditée par la Fédération Départementale Cornec.

Les « C.M.M. ». — Nous avons ensuite essayé d'aller plus loin. Pour « dédramatiser » plus sûrement le problème, nous avons offert aux parents de les initier à la mathématique « moderne », de leur faire toucher du doigt, si peu que ce soit, son langage et son esprit (et ses prétendues horreurs...).

Le premier Cercle de Mathématique Moderne (« C.M.M. »), ouvert en octobre 1966, groupait au début une cinquantaine de parents d'élèves du Lycée Ampère.

En 1967-68, dix C.M.M. ont fonctionné dans divers locaux scolaires de l'agglomération lyonnaise : un « niveau 2 » et neuf « niveau 1 » dont l'un était réservé à des maîtresses d'école maternelle. Nous prévoyons pour 1968-69 un « niveau 3 » (groupant les fidèles du premier lot, qui en seront à leur troisième année), plusieurs « niveau 2 » et plusieurs « niveau 1 ».

Qui suit les C.M.M. ? En 1967-68, un millier de personnes se sont inscrites. Mais le nombre de présents diminue sensiblement à partir de la quatrième ou de la cinquième séance, puis se stabilise entre le tiers et la moitié de l'effectif initial.

Approximativement, on compte 50 % d'enseignants (surtout des instituteurs, enseignant dans des écoles maternelles, des écoles primaires, des classes de perfectionnement, des C.E.G.; jardinières d'enfant, rééducatrices, professeurs, assistants de faculté); 14 % de mères de famille sans profession; 18 % d'ingénieurs, techniciens, cadres supérieurs; 12 % d'employés, cadres moyens, représentants de commerce; 6 % divers (professions libérales, ouvriers, cultivateurs, commerçants, artisans).

Fonctionnement des C.M.M. — Les séances ont lieu une fois toutes les deux semaines, soit de 20 h 30 à 22 heures, soit de 18 h 30 à 20 heures.

Il ne s'agit ni de cours magistraux, ni d'enseignement programmé. Les participants travaillent par petits groupes sur des fiches comportant à la fois des éléments d'information et des questions et exercices (1). On utilise des boîtes de blocs logiques de Dienes.

Des moniteurs bénévoles — au début, tous les moniteurs étaient des professeurs de mathématiques, mais nous avons maintenant la joie de nous voir épaulés par toute une équipe dynamique d'étudiants préparant la licence de mathématiques, — circulent entre les groupes et discutent avec les « élèves ».

Les fiches sont conçues de façon à n'exiger aucune connaissance mathématique préalable : on « part de zéro ». Chacun peut, s'il en a le temps, étudier aussi tout seul chez lui. Les absents à une séance peuvent combler leur retard plus facilement que s'il s'agissait de cours magistraux.

Pas de programme impératif, pas d'examen au bout de l'année, pas de notes, pas de classement : excellentes conditions pédagogiques !

Sujets étudiés. — Grammaire des ensembles. Notions sur les relations et les fonctions.

Nous envisageons pour la suite des fiches sur les lois de composition, sur les structures, sur la logique.

Premiers résultats. — Un questionnaire a été diffusé, malheureusement un peu tard (juin 1968), y compris auprès de ceux qui avaient abandonné en cours de route. Le dépouillement n'est pas encore achevé dans tous les C.M.M. Voici cependant quelques pourcentages probables (d'après 140 réponses venant de six C.M.M.).

(1) Ces fiches sont maintenant éditées sous le titre de « Travaux pratiques de Mathématique » (O.C.D.L.)

28 % ont assisté à toutes les séances, 31 % à presque toutes, 28 % à environ deux séances sur trois.

L'unanimité est satisfaite de la durée des séances : 1 h 30 avec souvent des prolongements sous forme de discussions amicales entre « mordus » et moniteurs.

80 % sont satisfaits du rythme adopté : une séance par quinzaine, d'octobre à juin; 20 % auraient préféré une séance par semaine (voir plus loin).

10 % préfèrent travailler seuls; 90 % préfèrent le travail en groupe (généralement, groupes de 3 à 5 personnes). Certains préconisent une réflexion individuelle suivie d'une confrontation des résultats entre membres du groupe. Quelques écueils : certains groupes sont de niveau trop peu homogène; certains se disloquent en cours d'année.

Principales difficultés rencontrées par les membres des C.M.M.

Abondance de symboles, de vocables et de notions nouveaux; d'où la nécessité de les revoir souvent, et pour chacun de constituer un répertoire. Ce sont là les difficultés de toute science nouvelle; elles sont ressenties plus péniblement par les adultes que par les enfants (p. ex., l'ensemble vide « passe » mieux chez les enfants que chez les adultes).

Les séances sont trop espacées et la plupart des « élèves » n'ont pas le temps de travailler chez eux entre deux séances. Et c'est encore le manque de temps qui les fait reculer devant le « remède » qui consisterait à tenir une séance par semaine.

Les exercices ne sont jamais assez nombreux, 85 % se plaignent d'avoir trop peu de corrigés écrits des exercices; certains souhaiteraient un livret contenant les solutions de tous les exercices proposés dans les fiches. D'autres refusent cette « solution de facilité » (disent-ils eux-mêmes), sachant bien qu'il est difficile de résister longtemps à la tentation de se reporter au corrigé avant d'avoir fourni l'effort de réflexion suffisant. Il n'en reste pas moins qu'il est gênant de continuer sans savoir si on a répondu juste; le moniteur est là pour le dire; encore faut-il qu'il n'ait pas trop de groupes à suivre (moyenne raisonnable : un moniteur pour 25 à 30 personnes).

Dans certains C.M.M., un moniteur donne de temps à autre quelques corrigés d'exercices, pour ceux qui les ont déjà abordés et qui désirent en avoir la solution (ils se rassemblent momentanément dans une salle voisine). Ces corrigés sont très appréciés.

Un petit nombre de réponses laissent percevoir une certaine nostalgie du cours magistral... Peut-être, d'ailleurs, des interventions, limitées dans le temps, d'un moniteur s'adressant à tout l'auditoire sont-elles bénéfiques. Mais la méthode active du travail en groupe reste très appréciée. Plusieurs réponses font état de l'atmosphère sympathique des cercles, aussi bien entre membres d'un groupe assidu qu'entre les groupes et les moniteurs. De notre côté à nous, professeurs, ces contacts avec des adultes, enseignants ou non, sont souvent agréables et profitables pour notre propre formation continue.

Une autre difficulté provient de la trop grande culture mathématique « classique » de certains de nos interlocuteurs, qui attendent avec inquiétude de voir poindre, assaisonnés à la sauce moderne, le théorème de Thalès et les identités remarquables. Il faut les inciter à la patience : il semble que deux ans de C.M.M. (à raison d'une séance tous les quinze jours) soient nécessaires avant de pouvoir commencer à retrouver les connaissances classiques.

On rencontre souvent la question suivante (en particulier venant des instituteurs) : « Où cela mène-t-il? Quelle est l'utilité pratique des notions modernes? ». Mais se sont-ils déjà demandé « où menaient » le trinôme du second degré, les théorèmes de Dandelin et les problèmes de robinets? Dilemme habituel entre mathématiques utilitaires et mathématiques formatrices. Il n'empêche que l'A.P.M. devrait

éclairer davantage l'opinion publique sur l'utilité comparée de la mathématique contemporaine et des mathématiques traditionnelles.

Quant au détail du contenu, les fiches signalées le plus souvent comme faciles sont les premières (manipulation des blocs logiques, premières notions sur les ensembles), celles qui présentent les couples et le produit cartésien et les premières fiches sur les relations. Les plus difficiles concernent la différence, la différence symétrique, la partition, l'ensemble des parties d'un ensemble, les théorèmes de De Morgan. Nous en concluons, comme déjà à propos des fiches de Quatrième et des fiches de Sixième, qu'on a intérêt à ne pas trop s'attarder, en un premier temps, sur les ensembles et à passer assez rapidement aux relations.

Buts poursuivis par les participants. — On peut, grosso modo, en dénombrer trois principaux, qui peuvent se cumuler :

a) La possibilité de mieux suivre les études des enfants (60 % des réponses); d'où la présence de nombreux parents d'élèves; les associations de parents d'élèves nous apportent souvent une aide précieuse pour mettre sur pied un C.M.M. Sont attirés en particulier ceux (25 %) dont les enfants participent à une expérience pédagogique (primaire, 6^e, 4^e, 3^e).

Quelques personnes sont déçues du fait que leurs études ne sont pas rigoureusement parallèles à celles de leurs enfants. L'idéal serait, pour des parents, de suivre d'abord un ou deux ans un C.M.M. pour pouvoir ensuite aider leurs enfants. Mais un parent, au contraire, estime que les enfants comprennent beaucoup plus vite (que les parents) et que par conséquent il vaut mieux les laisser se débrouiller tout seuls.

b) La curiosité intellectuelle, le désir de maintenir l'intellect en forme, de ne pas s'encroûter, l'intérêt pour les mathématiques : 85 %. Ce but est parfois le seul; c'est le cas pour certains retraités, de l'enseignement ou d'ailleurs, ce qui est légitime et méritoire! Il est en général considéré comme atteint, au moins partiellement.

c) La formation continue : souci présent chez la presque totalité des enseignants, et chez quelques représentants (6 %) d'autres professions. Nous avons toujours pris soin de préciser que l'assistance, même assidue, à un C.M.M., même pendant un ou deux ans, apporte certes une information, un début de formation théorique, mais qu'elle ne saurait être considérée à elle seule comme une formation continue à la fois théorique et pédagogique; nous renvoyons sur ce point à la charte de Chambéry.

Que ces divers buts ne soient pas complètement atteints, on en convient. Mais 82 % souhaitent, l'année scolaire prochaine, continuer cette initiation, ou, pour ceux qui avaient abandonné assez tôt, la reprendre à son début.

Raisons des abandons. — Nous avons demandé à ceux qui avaient abandonné en cours d'année de nous en indiquer franchement les raisons. La plupart des réponses invoquent le manque de temps et corrélativement l'oubli d'une séance à l'autre des fiches étudiées (80 %), la fatigue, les déplacements hors de Lyon, la maladie... Quelques-unes (16 %) indiquent le manque d'intérêt ou la trop grande difficulté.

Malheureusement, nous ne connaissons pas les raisons de ceux qui n'ont pas répondu...

Que pensent les membres des C.M.M. de la modernisation des programmes?

A la question : « Quelle est votre opinion sur l'introduction de la mathématique moderne dans les programmes scolaires? » La moitié environ (dont tous les membres du « niveau 2 ») répondent de façon favorable ou très favorable, voire enthousiaste. On invoque la nécessité de réformer l'enseignement actuel des mathématiques, l'apprentissage de la logique et du raisonnement par la mathématique moderne, son caractère attrayant, sa valeur pour l'adaptation au monde moderne. Beaucoup pen-

sent qu'il faut commencer dès la Maternelle et généraliser le plus tôt possible, mais sont conscients qu'il faut d'abord assurer la formation des maîtres.

Quelques réponses relient le problème à celui, plus général, de la réforme de l'enseignement : l'une espère que l'effort actuel de l'A.P.M. sera un « ferment pédagogique » pour l'ensemble des disciplines. Un instituteur précise : « Cela remet en cause notre attitude d'enseignant ».

5 % sont sceptiques, sans aller jusqu'à l'hostilité déclarée.

45 % adoptent une attitude réservée, et attendent d'être plus complètement informés pour se prononcer, ce qui est tout à fait compréhensible. Une année de C.M.M. ne suffit pas pour écarter toutes les réticences; mais une information partielle et une attitude réservée, c'est un progrès sur l'ignorance totale du problème et les opinions *a priori*. Il faudra, de temps à autre, dans les C.M.M., ouvrir une discussion sur ces questions.

Nous demandions aussi : « Quelle était votre opinion avant votre expérience du C.M.M.? ». Beaucoup n'en avaient pas. Ceux qui étaient favorables le restent ou le deviennent davantage; ceux qui étaient défavorables deviennent réservés ou favorables. Très peu de réponses marquent un renforcement du scepticisme initial.

Voici quatre extraits des réponses :

D'un chef de spécialité au centre de perfectionnement du Gaz de France : « Je me suis rendu compte de certaines possibilités de jugement pour le traitement de certains problèmes pratiques de la vie professionnelle ».

De trois institutrices :

« Depuis dix ans je cherchais à développer chez mes élèves du CM2 cette pensée mathématique. Les résultats ne m'ont jamais pleinement satisfaite. Cette année j'ai travaillé dans un esprit totalement rénové. Les cours de Math. moderne m'ont permis de présenter les problèmes différemment. Je suis parvenue à ce que la *totalité* des élèves aient le goût de la recherche, ne soient pas rebutés par la difficulté et à ce que 95 % d'entre eux trouvent les résultats *selon les déductions de leur pensée* et non en suivant la solution d'un problème type établi. » (membre du « niveau 2 »).

« Il me semble que ces mathématiques sont mieux adaptées au monde moderne, présentent plus d'applications pratiques. Elles ont l'avantage qu'on peut commencer très tôt à en parler aux enfants. Avant le C.M.M., ces mathématiques me semblaient réservées aux études supérieures parce que très compliquées. En réalité maintenant il me semble qu'elles simplifient plutôt les anciennes mathématiques, car elles présentent plus d'unité. »

« Je ne suis pas encore assez « calée » pour *dominer* la question : à quoi « raccrocher » toutes ces notions? Liaisons avec le calcul traditionnel? Par quel bout relier entre eux les élèves, les programmes, la Math. moderne...? J'ai le ferme espoir de résoudre ces questions favorablement lorsque j'aurai fait ma propre éducation en Math. moderne. Expérience passionnante mais je pense qu'il est *dangereux de se lancer* dans l'enseignement avant une formation suffisante (j'ai constaté personnellement en avançant au C.M.M. que j'avais « inventé » des notations fausses en proposant à l'école maternelle des jeux basés sur les premières fiches; d'où grande prudence maintenant. Avant le C.M.M. : on avait *besoin* de quelque chose de nouveau; les manipulations de quantités, de nombres chez les « moins de six ans » ne correspondent guère au niveau moyen, laissent peu de traces (à part la connaissance du signe... ce qui relève plus de la lecture que du calcul!). On doit pouvoir faire du bon travail de « logique » avec la mathématique moderne : une faculté intellectuelle peu exploitée jusqu'ici et apparemment riche de possibilités et plus directement ouverte sur la vie que les *faux* problèmes du calcul dit « concret ».

Pour l'avenir. — Le problème suivant se pose : faut-il créer des C.M.M. à l'usage exclusif des instituteurs, adaptés à une formation simultanément théorique et pédagogique, à l'image des chantiers de Pédagogie mathématique lancés par l'A.P.M.

dans la région parisienne; ou bien laisser les instituteurs acquérir en un an ou deux dans les C.M.M. ordinaires un début de formation théorique avant de nous lancer avec eux dans les problèmes pédagogiques? Même le jour où les I.R.E.M. seront — enfin — créés, la question se posera : les deux sortes de formation doivent-elles être simultanées ou non?

Nous espérons, d'autre part, créer des C.M.M. dans les Écoles Normales d'Instituteurs et d'Institutrices, en attendant que la formation initiale des maîtres et les programmes de l'école primaire soient résolument renouvelés.

Car nous en arrivons toujours à cette même exigence : les entreprises bénévoles et artisanales de notre Association sont certes bénéfiques. Mais elles doivent ouvrir la voie à la prise en charge par le Ministère de l'Éducation Nationale de la formation continue des maîtres, d'une part (l'A.P.M., avec la Charte de Chambéry, a apporté sa contribution au problème); de la formation permanente des adultes d'autre part.

Espérons que les événements de mai 1968 auront ouvert les yeux...

L. DUVERT,

Membre de l'équipe lyonnaise de l'A.P.M.

Questions et réponses

Réponses.

Les numéros renvoient au *Bulletin* dans lequel la question a été formulée.

262. Q. 2. Dans un système de numération de base x , avec les conventions d'écriture analogues à celle du système usuel, pour qu'avec les chiffres a et b on puisse avoir : $a, b = \frac{b}{a}$ il faut et il suffit que :

$$a \neq 0; \{a, b, x\} \subset \mathbb{N}; (b - a^2)x = ab; b < x.$$

La condition $x \in \mathbb{N}$ entraîne $b > a^2$ et la condition $b < x$ entraîne $b - a^2 < a$.

Conclusion. — Il existe une infinité de systèmes de numération conduisant à une solution au moins. Il suffit de choisir $a > 1$ et $b = a^2 + 1$ d'où $x = ab$.

Pour $a \geq 4$ il peut y avoir plusieurs bases pour le même nombre a . Il suffit pour cela que si l'on pose $b = a^2 + c$; ($c < a$); c soit diviseur de ab .

Remarquons que $x > b > a^2 > 1$. Il y a donc une seule solution dans le système décimal. [$9 > a^2 > 1 \Rightarrow a = 2$]. C'est la réponse qui a suggéré la question.

Remarques : 1° Une solution a, b, x conduit à une autre solution A, B, X telle que $A = na, B = n^2b, X = nx$ si $x > nb$; $n \in \mathbb{N}$. Ceci peut faciliter la recherche de systèmes ayant plusieurs solutions. Exemple : de $a = 10$; $b = 104$; $x = 260$ on déduit $a = 20$; $b = 416$; $x = 520$ à comparer à la solution $a = 8$; $b = 65$; $x = 520$.

2° En notant Φ le chiffre dix du système à base trente, nous pouvons écrire $3, \Phi = \frac{\Phi}{3}$, les deux membres valant $3 + \frac{1}{3}$.

Comme il faut autant de chiffres que d'unités dans la base, on notera qu'en pratique le problème étudié n'intéresse qu'un seul système simple, le système décimal, avec l'unique solution $2,5 = \frac{5}{2}$.

E. BARROUX (Angoulême).

N.D.L.R. — M. Gairard (E. N. de Privas) nous adresse une solution voisine de la précédente et cite un bon exemple familier en base soixante : $6\text{ h }40\text{ mn} = \frac{40}{6}\text{ h}$.

262. Q. 1. Plutôt que les notations $\text{Log } x$ et $\log_{10} x$, pourquoi ne pas adopter les notations normalisées $\ln x$ et $\lg x$. Ceci simplifiera déjà l'écriture. Quant à la lecture, je n'ai pas d'opinion.

Mais à propos du mot *mantisse*, je pose à mon tour une question : comment lire $\bar{2}$, 698 97? Lire « moins deux virgule six... » est incorrect; lire « zéro virgule six... moins deux » est long et peu pratique.

M^{me} LETZGUS (Chambéry).

Énoncés et formalisation.

En réponse à la brève communication de M. Bassat (*Bulletin*, 262, p. 239) nous avons reçu deux notes dont l'une anonyme (que l'auteur de la seconde nous excuse si c'est par la faute de la rédaction que son nom est omis).

Réponse de M. Jacques Chayé (Poitiers). — Il me semble que la question posée par notre collègue n'admet pas de réponse. Qu'il s'agisse de « lieu géométrique » ou d'« équation » on se heurte à la même difficulté; il y a souvent une entente tacite entre professeur et élève, entre celui qui pose un problème et celui qui le résout, et seul le bon sens ou le dressage peut suggérer le but à atteindre, mais la mathématique n'y peut rien. Il s'agit si on veut une bonne note (!) ou si on veut un résultat plus simple, plus pratique, plus évocateur (mais ce ne sont là que des considérations psychologiques) de remplacer une caractérisation d'un ensemble de points ou de nombres par une autre caractérisation, en raisonnant si possible par équivalence logique sur des formes propositionnelles à une ou plusieurs variables numériques ou ponctuelles :

— on partira par exemple de $MA = k MB$ (la variable étant M et ayant pour domaine le plan) et on arrivera par équivalence à $M \in C$, C étant le cercle tel que, etc.;

— on partira de $\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2}{x+1} = \frac{2x}{x^2-1}$, la variable x ayant pour domaine $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ et on arrivera par équivalence à $x(x-1) = 0$ ce qui est équivalent à $x = 0$ ou si on préfère à : $x \in \{0\}$.

Mais il n'existe pas de définition pour dire quel est le chemin logique à suivre et quel est le point précis d'arrivée.

Il est regrettable qu'il y ait toute une littérature sur les lieux géométriques et les équations, y compris leurs pseudo-définitions, car on y fait des acrobaties de langage et d'écriture pour essayer de donner à des mots (« trouver », « déterminer », « chercher », « résoudre », « préciser »...) et des signes (« ? », « $\exists ?$ », ...) une signification logique ou mathématique alors qu'il n'y en a pas.

Réponse anonyme. — 1° Le problème n'est pas nouveau; je veux dire qu'il n'est pas lié au langage moderne. Exemples :

Quel est le lieu géométrique des points équidistants de A et de B ? Réponse : c'est le lieu des points M tels que $MA = MB$,

A quoi est identique $a^2 - b^2$? Réponse : à $a^2 - b^2$.

Factorisez $a^2 - b^2$. Réponse : $\frac{1}{3} \cdot (a^2 - b^2) \cdot 3$.

Résolvez l'équation dans $\mathbb{R}$: $x + 3 = 7$. Réponse : l'ensemble-solution est :

$$\{x, x \in \mathbb{R} \mid x + 3 = 7\}$$

2° « Quelle est la courbe, ensemble des points tels que... » et « Quelle est la courbe, ensemble de points égal à l'ensemble des points tels que... » ; à mon avis, ces deux phrases signifient exactement la même chose.

Problème supplémentaire : « Qu'est-ce qu'une courbe ? ».

3° Alors, comment dire? Je n'ai pas de réponse satisfaisante... Peut-être :

« Définir autrement la courbe ensemble des points... » ou « Donner une autre définition de la courbe... ».

Et pourquoi pas, plus simplement (du moins pour le rédacteur d'énoncés...) :

« Étudier l'ensemble des points tels que... » ou « Que pensez-vous de l'ensemble... ».

Ce serait plus difficile à noter? Peut-être; mais le but est-il de mettre des notes sur des copies, ou de faire réfléchir les élèves?

4° Pendant qu'on y est, les énoncés contiennent souvent d'autres termes ou tournures qui ne sont clairs que par convention tacite entre élève et professeur; et ces conventions sont-elles universelles? Quelles distinctions faisons-nous entre « Montrer », « Démontrer », « Établir », « Vérifier », « Contrôler »? Et le fameux « Décrire »?

J'ai aimé les mathématiques de Papa.

Autre réponse, du même auteur anonyme à la lettre de J.-L. Pelletier (*Bulletin* 262, p. 238.)

« Je confesse sans honte : 1° que j'ai aimé les mathématiques de papa; 2° que j'aime la mathématique contemporaine (du moins le peu que j'en connais).

Et je sais que beaucoup de collègues la font aimer à leurs élèves. Et que beaucoup d'autres collègues n'ont pas réussi à faire aimer à leurs élèves les mathématiques de papa.

Mais peut-on faire aimer ce qu'on n'aime pas soi-même? »

Questions.

265. Q. 1. De P. Langlois (Lycée *Dorian*, Paris) : « J'aime beaucoup la rubrique des questions posées. En voici une dont l'origine est la fameuse question de la barre de 40 kg à débiter en quatre morceaux de masses elles aussi entières et avec lesquelles on pourrait réaliser toutes les pesées entières de 1 à 40 kg. Naturellement, le lien entre les 40 kg et les 40 combinaisons possibles de quatre entiers a_1, a_2, a_3, a_4 de la forme $|x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4|$ où les x_i sont à prendre dans $\{-1, 0, 1\}$, ne m'a pas échappé. A partir de là, il est possible de résoudre le problème; après s'être persuadé qu'une des masses doit être de 1 kg, on observe que 2 n'est pas possible, on essaye 3, etc.

La question que je pose est la suivante : généraliser le problème et le résoudre par la seule considération d'une structure et de raisonnements algébriques.

265. Q. 2. Aucune réponse n'a été donnée aux questions posées dans le *Bulletin* 263.4. La rédaction s'en étonne et prie les lecteurs de s'y reporter.

La rédaction se sait coupable de n'avoir encore pas trouvé le temps de rédiger la synthèse des réponses à 258.Q.2. ainsi que la note promise sur les cercles d'astrométrie. Elle s'efforcera de le faire pour le *Bulletin* 266...

BORDAS

189, avenue du Maine, Paris-XIV^e

COLLECTION DE MATHÉMATIQUES

E. COSSART

Ancien élève de l'E.N.S.
Professeur de Math. Spéciales
au Lycée Pasteur

&

P. THÉRON

Ancien élève de l'E.N.S.
Inspecteur général
de l'Instruction publique

NOUVEAUTÉS

MATHÉMATIQUES 1^{re} B

par M. COUTURIER, C. MORDELET et J. L. BOURSIN,
agréés de l'Université.

360 pages, relié sous couverture toile **18,40 F**

MATHÉMATIQUES TERMINALE C

Tome I, par C. PAIR, agrégé de l'Université, 320 pages,
relié sous couverture toile **12,30 F**

Tome II, par B. POUILLE et L. COLLOT, professeurs
au Lycée Henri-Poincaré à Nancy, 352 pages, relié sous
couverture toile **14,30 F**

Tome III, par B. POUILLE, L. COLLOT et C. PAIR,
320 pages, relié sous couverture toile **12,30 F**

RAPPEL

MATHÉMATIQUES, classe de 6^e **12,30 F**

MATHÉMATIQUES, classe de 5^e **12,30 F**

MATHÉMATIQUES, classe de 4^e **12,30 F**

MATHÉMATIQUES, classe de 3^e **12,30 F**

MATHÉMATIQUES, classe de 2^e C, tome 1 **12,30 F**

MATHÉMATIQUES, classe de 2^e C, tome 2 **12,30 F**

MATHÉMATIQUES, classe de 1^{re} C, tome 1 **12,30 F**

MATHÉMATIQUES, classe de 1^{re} C, tome 2 **12,30 F**

MATHÉMATIQUES, classe de 1^{re} D, tome 1 **12,30 F**

MATHÉMATIQUES, classe de 1^{re} D, tome 2 **12,30 F**

Salle d'exposition : 93, rue de Seine, Paris-VI^e

Éditions WESMAEL-CHARLIER

28, rue Madame, PARIS-6^e - Tél. 548/16.61 - C.C.P. Paris 16.124.11

Ouvrages de Mathématique conformes aux directives nouvelles

MM. WERBROUCK et WAMBERSIE

MATHÉMATIQUE 6^e

Première édition prévue en quatre fascicules

- Fascicule I. — **Ensembles. Relations Correspondances. Premiers éléments de Géométrie.**
96 pages. — 7,80 + t.v.a. : 8,60.
Prix spécial aux professeurs : 6,70 (frais d'envoi compris).
- Fascicule III. — **Les entiers rationnels.**
32 pages. — 3,40 + t.v.a. : 3,75
Prix spécial aux professeurs : 3,30 (frais d'envoi compris).

A paraître :

- Fascicule II. — **Les nombres naturels : notion d'équivalence et translations.**
- Fascicule IV. — **Travaux pratiques.**

COLLECTION LEROY & HANCHIR

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE MODERNE

1^{re} année de l'enseignement secondaire

1^{re} partie. — **Ensembles et relations.**

36 pages. — 4,22 + T.V.A. : 4,65.

Prix spécial aux professeurs : 3,95 (frais d'envoi compris).

A paraître :

- 2^e partie. — **Nombres naturels.**
- 3^e partie. — **Nombres entiers.**
- 4^e partie. — **Géométrie.**
- 5^e partie. — **Système métrique et problèmes.**

R. LISSAGORSKY et P. SIMON

Licenciés en Sciences Mathématiques

COURS DE MATHÉMATIQUE classe de 6^e

Première édition prévue en quatre fascicules

Premier fascicule. — **Premières notions sur les ensembles. Algèbre des ensembles.**

32 pages. — 2,81 + t.v.a. : 3,10

Prix spécial aux professeurs : 2,90 (frais d'envoi compris).

Deuxième fascicule. — **Premières notions sur les relations. Premiers éléments de Géométrie. Entretien des acquisitions et compléments.**

48 pages. — 4,22 + t.v.a. : 4,65.

Prix spécial aux professeurs : 3,95 (frais d'envoi compris).

A paraître : Troisième fascicule. — Quatrième fascicule.

« ...car vous aurez beau faire, c'est toujours avec le même élément de base qu'il vous faudra reconstruire. »

Roger Martin du Gard.

Les relations

Maurice GLAYMANN.

Faculté des Sciences. Lyon.

Je me propose de présenter dans cet article, le chapitre du nouveau programme de la classe de Sixième concernant les relations.

Je ferai état ici du travail de recherche entrepris par l'Équipe Lyonnaise dans 40 classes durant l'année 1967-1968.

Le concept de relation est un des plus importants de la mathématique ; c'est la clé de voûte de la plupart des grandes notions modernes. L'expérience a montré qu'au niveau de la classe de Sixième, il faut passer très rapidement sur l'introduction des ensembles ; il suffit que les enfants connaissent quelques rudiments de la grammaire des ensembles ; mais par contre, il faut aborder le plus tôt possible l'étude des relations ; ce concept, par sa nature dynamique, permet de présenter très simplement et avec grande efficacité de nombreuses notions. Le lecteur trouvera en annexe un organigramme des concepts engendrés par les relations. Il n'est pas question d'étudier toutes ces questions au niveau de la classe de Sixième ; le but est de présenter aux enfants un outil et de l'utiliser chaque fois que cela sera possible. En outre, il faut éviter tout formalisme inutile ; il est possible d'aller assez loin, sans pour autant introduire un vocabulaire abondant. Du point de vue pédagogique, il est beaucoup plus important que l'enfant découvre une notion et sache l'utiliser, plutôt que de connaître par cœur une définition qui restera bien souvent vide de sens, si l'on n'a pas pris soin de faire découvrir auparavant son intérêt.

Notons d'autre part, que le concept de relation a un caractère essentiellement non numérique. Il faut que l'enfant prenne conscience que la mathématique n'est pas uniquement l'art de calculer. En fait, si nous trouvons dans nos classes tant d'enfants hostiles et fermés à la mathématique, c'est que pour eux la mathématique, c'est faire du calcul. L'apprentissage du calcul doit cependant rester une partie importante de notre enseignement et il est important d'apprendre aux enfants à calculer sur d'autres objets que les nombres.

Je vais maintenant analyser le contenu des fiches qui ont été proposées aux enfants. L'Équipe Lyonnaise, compte tenu des résultats de la recherche a repris complètement la rédaction de ces fiches avant de les publier sous le nom de Galion.

En entrant en Sixième l'enfant connaît un grand nombre d'exemples de relations. C'est pour cette raison que nous sommes partis d'exemples familiers pour introduire ce concept. Nous avons d'abord présenté l'étude de relations d'un ensemble vers un autre ensemble.

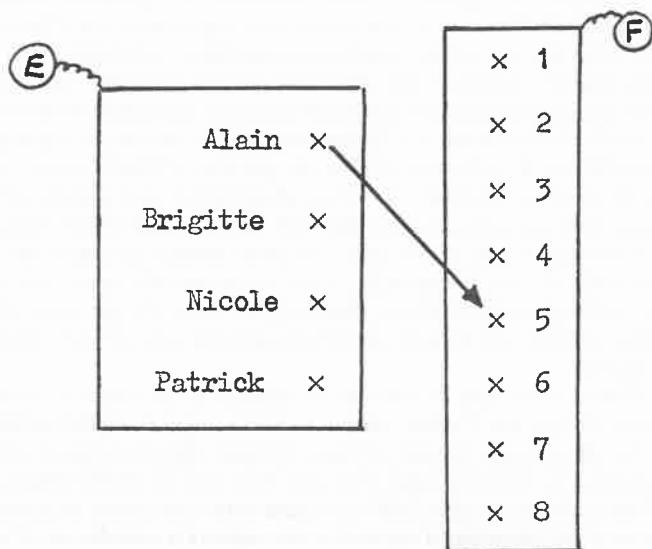
Fiche 1.

1. Voici deux ensembles : E est un ensemble d'enfants {Alain, Brigitte, Nicole, Patrick} et F est un ensemble de livres; ces livres sont numérotés pour plus de commodité :

- 1° Robur le Conquérant.
- 2° Les Malheurs de Sophie.
- 3° La Case de l'Oncle Tom.
- 4° Le Grand Meaulnes.
- 5° Les Misérables.
- 6° Sans Famille.
- 7° Don Quichotte.
- 8° Le Livre de la Jungle.

Alain *a lu* les livres 1, 5 et 6. Brigitte *a lu* les livres 2, 3 et 6. Nicole *a lu* les livres 1, 3 et 5. Patrick *a lu* les livres 8 et 6.

2. La phrase « Alain *a lu* le livre 5 » établit un lien entre Alain, élément de l'ensemble E, et le livre 5, élément de l'ensemble F. On représente cette phrase par une *flèche* allant de Alain vers le livre 5.



Trace *toutes* les flèches qui signifient « ...*a lu*... ».

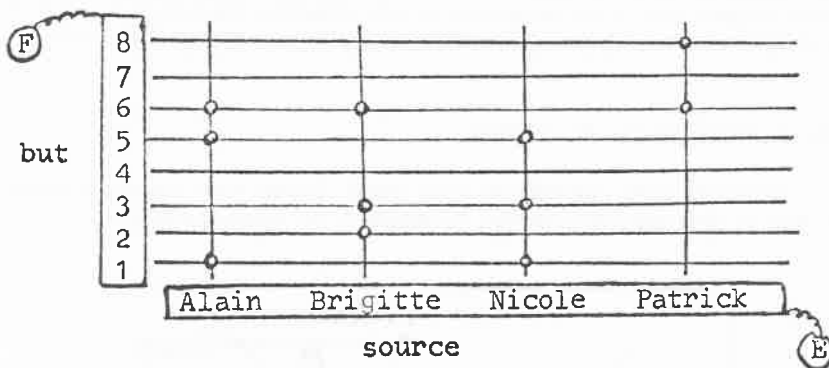
Tu as ainsi défini la *relation* « ... *a lu*... » de l'ensemble E vers l'ensemble F.

E est la *source* de la relation.

F est le *but* de la relation.

Le dessin ci-dessus, une fois complété est le schéma *sagittal* de la relation. En latin, « sagitta » veut dire « flèche ».

3. Voici ci-dessous une autre façon de représenter la relation : c'est le *schéma cartésien* de la relation.



Dans la phrase « Alain a lu le livre 5 », Alain est le *sujet* et le livre 5 le *complément*. Cette phrase peut être abrégée de la façon suivante :

A $\mathcal{L}$ 5

où $\mathcal{L}$ représente la relation « ... a lu... ».

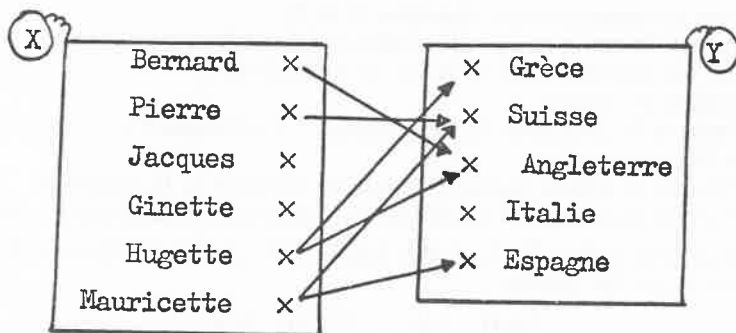
4. Exercice.

Voici deux ensembles :

$X = \{\text{Ginette, Mauricette, Huguette, Bernard, Pierre, Jacques}\}$.

$Y = \{\text{Suisse, Grèce, Angleterre, Espagne, Italie}\}$.

Voici le schéma sagittal de la relation de la source X vers le but Y : « ... a visité... ».



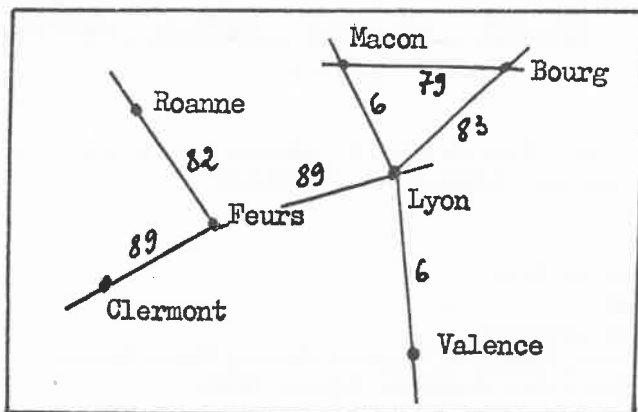
Quels pays a visités Bernard? Même question pour les cinq autres personnes? Dessinez le schéma cartésien de cette relation.

Dans cette première fiche, nous donnons une relation par sa source, son but et un groupe verbal : « ... a lu... ». Du point de vue formel, une relation $\mathcal{R}$ est définie par la donnée de trois ensembles : une source S , un but B et un sous-ensemble G du produit cartésien $S \times B$. G est le graphe de la relation $\mathcal{R}$; c'est un ensemble de couples. Nous

avons réservé à la classe de Cinquième ce point de vue. Par contre, en Sixième nous avons concrétisé les relations par des schémas sagittaux et cartésiens. Ces schémas permettent de mieux comprendre et d'organiser les éléments qui sont présentés aux enfants. D'autre part, il est intéressant et utile d'habituer les enfants à passer d'un type de schéma à l'autre, c'est l'objet de la quatrième question de cette fiche.

Fiche 2. Exercices sur les relations.

1. Voici une carte simplifiée de notre région. Prends pour source l'ensemble E des villes de cette carte et pour but, l'ensemble F des routes nationales.



Donne les inventaires des ensembles E et F.

a) Soit $\mathcal{N}$ l'écriture abrégée de la relation de E vers F : « ... est sur la nationale... ».

Ainsi, par exemple, « Lyon est sur la nationale 89 ».

Complète les phrases :

« Clermont $\mathcal{N}$... », « Feurs $\mathcal{N}$... », « Feurs $\mathcal{N}$... », « Valence $\mathcal{N}$... », « Bourg $\mathcal{N}$... », « Bourg $\mathcal{N}$... ».

b) Dessine le schéma sagittal et le schéma cartésien de la relation $\mathcal{N}$.

c) Dessine les schémas de la relation $\mathcal{F}$ « ... passe par... » de source F et de but E.

2. La source est $S = \{\Delta, *, A\}$ et le but $B = \{O, \square\}$. On exprime une relation $\mathcal{R}$ de S vers B par les phrases

$$\Delta \mathcal{R} O, * \mathcal{R} \square, * \mathcal{R} O, A \mathcal{R} \square.$$

Dessine le schéma sagittal et le schéma cartésien de cette relation.

3. S est l'ensemble de tes professeurs de Sixième et B l'ensemble des matières de ton emploi du temps.

Écris S et B en extension.

La relation $\mathcal{E}$ est « ... enseigne... » de S vers B.

Dessine les schémas de cette relation.

4. Invente d'autres exemples de relations.

Cette fiche présente d'autres relations d'un ensemble vers un autre ensemble. Le premier exemple montre l'usage que l'on peut faire d'une carte de géographie. Il conduit à deux relations $\mathcal{N}$ et $\mathcal{V}$ réciproques. Il est intéressant de comparer leurs schémas sagittaux. Une relation n'est pas toujours définie par sa source, son but et un groupe verbal. C'est pour cette raison que le deuxième exercice propose deux ensembles S et B et une relation $\mathcal{R}$ de S vers B par la donnée de phrases. Autrement dit, la relation est caractérisée ici, sans le dire, par sa source, son but et son graphe :

$$G = \{(\Delta, O), (*, \square), (*, O), (A, \square)\}.$$

Nous demandons alors aux enfants de dessiner les schémas sagittal et cartésien de cette relation $\mathcal{R}$.

Le paragraphe 3 met en évidence le rôle de la source et du but. Pour un enfant donné, la source S désigne l'ensemble de ses professeurs et B l'ensemble des matières de son emploi du temps. On étudie alors la relation $\mathcal{E}$, caractérisée par « ... enseigne... ». Il est clair que tous les enfants n'auront pas les mêmes schémas, car en particulier, ils n'étudient pas tous la même langue vivante, et par suite n'ont pas les mêmes professeurs. Cet exemple conduit à une discussion intéressante qui met en relief le fait qu'un groupe verbal ne suffit pas pour définir une relation, il faut connaître en outre la source et le but.

Nous invitons ensuite les enfants à inventer des relations. Cet exercice a un double but : permettre au maître de contrôler de façon précise si le concept est acquis et d'autre part développer l'imagination et la créativité de l'enfant.

Fiche 3. Relation dans un ensemble.

1. Voici un ensemble de personnes :

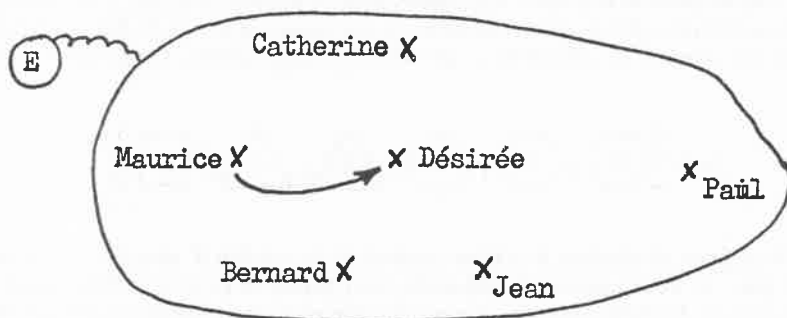
$$E = \{\text{Catherine, Désirée, Paul, Maurice, Bernard, Jules}\}.$$

Maurice est le fils de Désirée et le père de Jules; Bernard et Paul sont les fils de Catherine.

Ces phrases établissent une relation $\mathcal{F}$ entre des éléments de l'ensemble E : « ... est le fils de ... ».

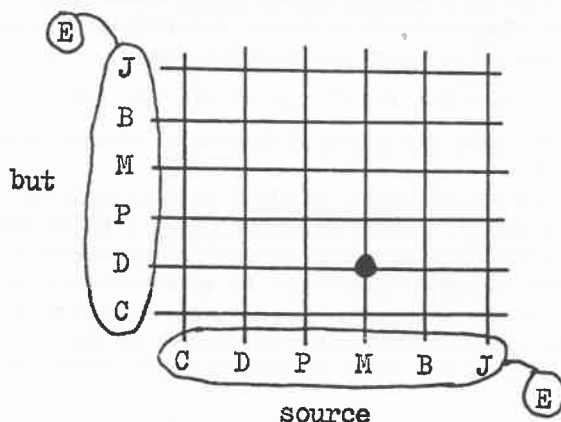
Ici, la source et le but sont des ensembles égaux : l'ensemble E .

Pour dessiner le schéma sagittal de cette relation $\mathcal{F}$, dessine deux fois l'ensemble E . Tu peux ensuite dessiner ce schéma en utilisant une seule fois l'ensemble E . Reproduis le dessin ci-dessous et complète-le.



Pour le schéma cartésien, il est nécessaire de représenter *deux fois* l'ensemble E. Il convient d'indiquer où est le but et où est la source !

Complète le schéma suivant :



2. Dessine une patate dans laquelle tu traceras :

- trois cercles, un bleu, un jaune et un rouge
- deux triangles, un bleu et un rouge
- un carré rouge.

L'ensemble de ces dessins est noté U.

Dessine le schéma sagittal de la relation $\mathcal{F}$ « ... a même forme que... » dans U.

Dessines-tu une flèche partant du carré rouge ?

Dessine le schéma sagittal de la relation $\mathcal{C}$ « ... a même couleur que... » dans U.

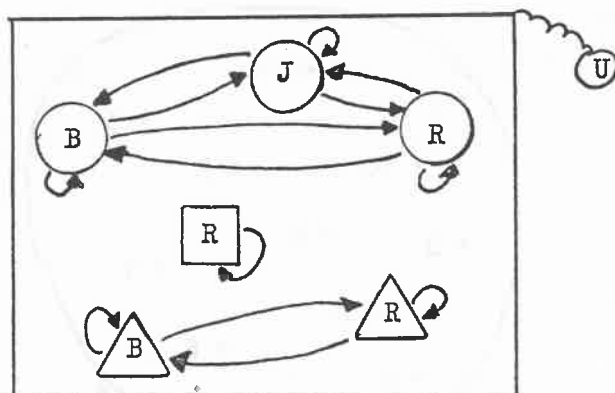
Nous abordons dans cette fiche l'étude des relations d'un ensemble vers lui-même (relations dans un ensemble) ; ici la source est égale au but.

En prenant un ensemble de personnes E et des liens de parenté, on étudie la relation dans E : «... est le fils de... ». Dans une première étape, pour construire le schéma sagittal de cette relation, nous suggérons de représenter deux fois l'ensemble E (comme dans le cas déjà étudié des relations d'un ensemble vers un autre ensemble), puis nous faisons constater qu'il suffit de représenter une seule fois cet ensemble ; d'où le schéma sagittal d'une relation dans un ensemble. Par contre, pour le schéma cartésien, il est nécessaire de représenter deux fois le même ensemble, en distinguant la source du but. L'exercice 2 prépare les concepts de réflexivité et de relation d'équivalence. On prend l'ensemble

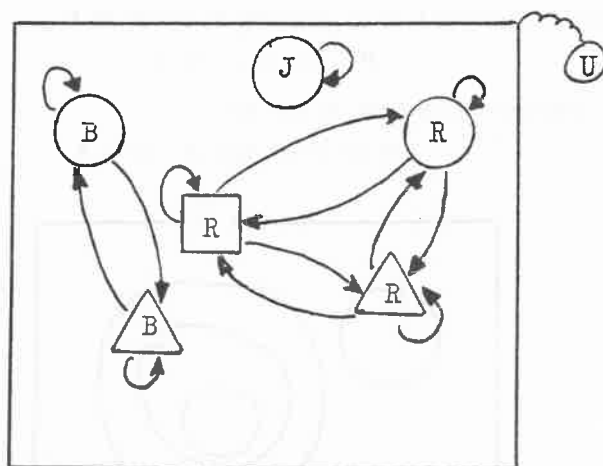
$$U = \{ \text{B}, \text{J}, \text{R}, \triangle \text{B}, \triangle \text{J}, \square \text{R} \}.$$

On propose de dessiner le schéma sagittal de la relation $\mathcal{F}$ dans U : «... a même forme que... ». Pour suggérer la réflexivité, nous posons la question « Dessines-tu une flèche partant du carré rouge ? » Comme le carré rouge a même forme que lui-même,

il faut tracer une telle flèche. Il en est de même des autres éléments de U , d'où le schéma sagittal :



De même, la relation C dans U : «... a même couleur que... » conduit au schéma suivant :



Fiche 4. Exercices.

1. Voici un ensemble $B = \{2, 5, 1, 7, 9, 11, 3, 8, 10, 4, 6\}$.

Dessine le diagramme ci-après une fois sur ton cahier et deux fois sur du papier calque.

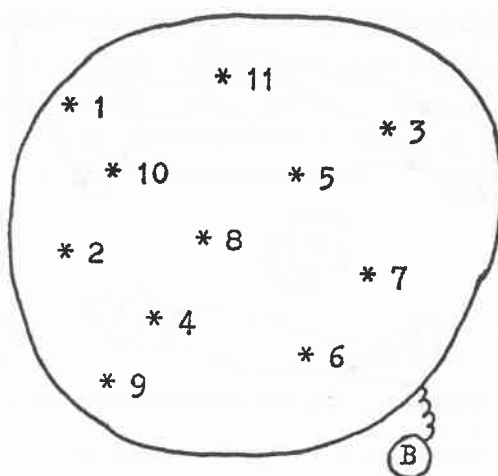
a) Sur ton cahier dessine le schéma sagittal de la relation $\mathcal{D}$: « ... est le double de... » dans B .

b) Dessine sur le papier calque le schéma de la relation $\mathcal{M}$: « ... est la moitié de... » dans B .

c) Superpose le calque au dessin. Que remarques-tu?

d) Sur le second calque, dessine le schéma de la relation $\mathcal{N}$: « ... n'est pas le double de... » dans B . Que remarques-tu?

e) Refais ces exercices à l'aide de schémas cartésiens.

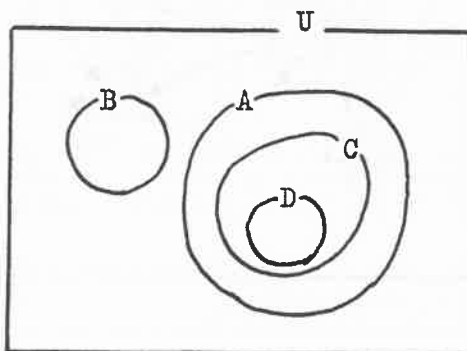


2. Voici un ensemble U et un ensemble de parties de U :

$$P = \{A, B, C, D, U\}.$$

Sur le diagramme ci-dessous, tu vois que

D est inclus dans A : $D \subset A$

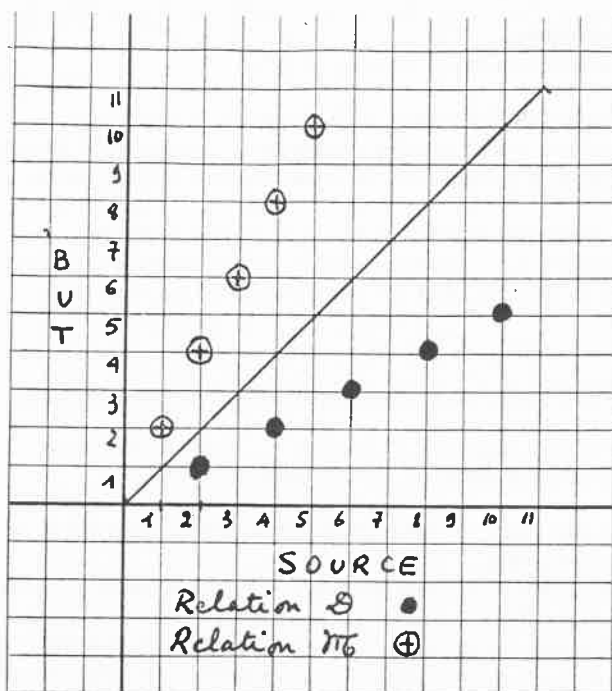


Dessine le schéma cartésien et le schéma sagittal de la relation «... est inclus dans... » dans P .

3. Imagine des relations dans l'ensemble E des élèves de ta classe. Pense, par exemple, au mois de naissance, aux initiales des noms.

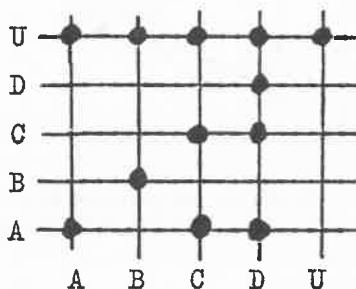
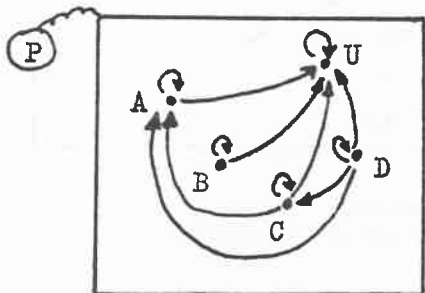
Nous proposons dans cette fiche trois exercices sur les relations dans un ensemble. Le premier est l'étude de trois relations dans un ensemble de naturels : $\mathcal{D}$ « ... est le double de... », sa relation réciproque $\mathcal{M}$ « ... est la moitié de... » et sa relation complémentaire $\mathcal{N}$ « ... n'est pas le double de ... ». L'utilisation de papier calque permet de

montrer que l'on passe du schéma sagittal de la relation $\mathcal{D}$ au schéma sagittal de la relation $\mathcal{M}$ en changeant le sens des flèches. De même, on passe du schéma sagittal de la relation $\mathcal{D}$ à celui de la relation $\mathcal{N}$ en traçant toutes les flèches qui manquent et en supprimant celles de $\mathcal{D}$. Il est alors intéressant d'utiliser les schémas cartésiens et de constater qu'en traçant sur un même schéma les relations $\mathcal{D}$ et $\mathcal{M}$ les deux ensembles de points sont symétriques par rapport à la première bissectrice.



Pour obtenir le schéma cartésien de la relation $\mathcal{N}$, il suffit d'utiliser celui de la relation $\mathcal{D}$ et de placer des points là où il n'y en a pas. Les graphes des relations $\mathcal{D}$ et $\mathcal{N}$ sont complémentaires dans $B \times B$.

Le second exercice est plus délicat. On donne un ensemble U et un ensemble P de parties de U , défini par un diagramme de Venn. La relation à étudier est « ... est inclus dans ... » qui conduit aux schémas suivants :



C'est le deuxième exemple de relation réflexive ; en effet, comme toute partie est incluse dans elle-même, chaque élément de P est relié à lui-même.

Le troisième exercice propose aux enfants d'imaginer des relations dans l'ensemble E des élèves de la classe. Le lecteur trouvera dans le livre de Papy « *Mathématique Moderne 1* » des exemples intéressants.

Fiche 5. Répartissons...

(Cette fiche sera étudiée en Travaux Dirigés.)

1. Prends l'ensemble des Blocs Logiques L .
 - a) La relation $\mathcal{C}$: « ... a même couleur que... » dans L , te permet de répartir tous les éléments de L en trois tas. Lesquels ? Tu peux désigner ces tas par les lettres R , J et B .
 - b) Même étude avec la relation $\mathcal{F}$: « ... a même forme que... » dans L .
 - c) La relation $\mathcal{W}$: « ... a même forme et même couleur que... » dans L te permet de répartir tous les éléments de L en tas. Combien de tas obtiens-tu ?

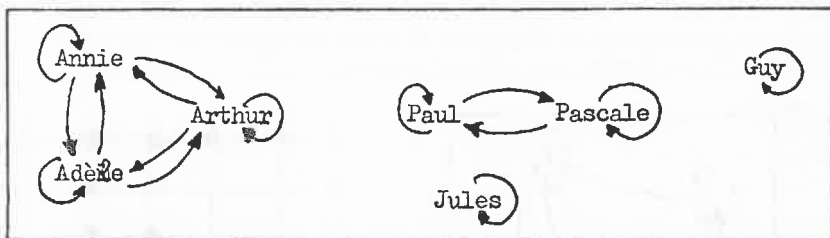
2. Voici un ensemble de prénoms :

$$P = \{\text{Annie, Paul, Guy, Adèle, Pascale, Jules, Arthur}\}.$$

Dessine le schéma sagittal de la relation « ... a même initiale que... » dans P .
Peux-tu répartir ces prénoms grâce à cette relation ?

3. Imagine des relations dans un ensemble qui te permettent de répartir les éléments de cet ensemble.

Nous reprenons dans cette fiche les relations $\mathcal{C}$ et $\mathcal{F}$ de la fiche 3, en utilisant cette fois l'ensemble L des Blocs Logiques. La relation $\mathcal{C}$ conduit à une partition de L en trois classes : les blocs rouges, jaunes et bleus ; de même, la relation $\mathcal{F}$ conduit à une autre partition de L en quatre classes : les blocs carrés, rectangles, triangles et ronds. La relation $\mathcal{W}$ est l'intersection des relations $\mathcal{C}$ et $\mathcal{F}$; elle conduit à une partition de L en douze classes ; c'est une sous-partition des partitions précédentes. Le schéma sagittal du deuxième exercice est le suivant :



On obtient une partition de P en quatre classes,
A ce stade, la réflexivité n'a plus posé de difficulté aux enfants.

Fiche 6. Partition.

1. La relation $\mathcal{C}$: « ... a même couleur que... » dans L t'a permis, dans la fiche précédente, de répartir les éléments de L en trois *classes* : R, J et B.

- Choisis deux quelconques de ces classes. Ont-elles des éléments communs?
- Prends un élément quelconque de L. Appartient-il à l'une de ces classes?

2. Mêmes questions avec la relation $\mathcal{F}$ dans L puis la relation $\mathcal{W}$ dans L.

3. Vocabulaire et définition.

Un ensemble de *parties* d'un ensemble E constitue une **PARTITION** de E si :

- a) aucune de ces parties *n'est vide* ;
 - b) tout élément de E est élément d'*une* de ces parties et d'*une seule*.
- Ces parties sont les **CLASSES** de la partition.

Quelle est la partition créée par la relation $\mathcal{C}$ dans L?

Quelles sont les classes de cette partition?

Mêmes questions pour les relations $\mathcal{F}$ et $\mathcal{W}$ dans L?

4. Exemples et contre-exemples.

Voici un ensemble : $U = \{a, d, b, f, e, c\}$.

Les parties

$$X = \{a, b\}, \quad Y = \{c\} \quad \text{et} \quad Z = \{e, d, f\}$$

constituent-elles une partition de U?

Même question pour les parties

$$M = \{a\}, \quad N = \{c, b, d\}, \quad P = \{e\} \quad \text{et} \quad Q = \{f\}.$$

Les parties

$$A = \{b, a, c\}, \quad B = \{b, f, d\} \quad \text{et} \quad C = \{e\}$$

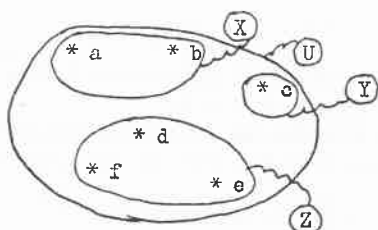
ne constituent pas une partition de U. Pourquoi?

Même question pour les parties

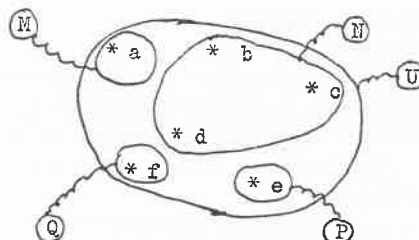
$$A' = \{b, a\} \quad \text{et} \quad B' = \{d, f, e\}.$$

5. Trouve des exemples et des contre-exemples de partitions d'un ensemble de ton choix.

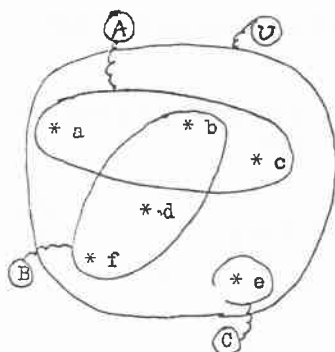
Nous introduisons dans cette fiche le mot partition. En reprenant la relation $\mathcal{C}$ dans l'ensemble L, les enfants constatent que les classes sont disjointes et que tout élément de L appartient à une classe. D'où la définition d'une partition sur un ensemble. Nous proposons alors des exemples et des contre-exemples de partitions.



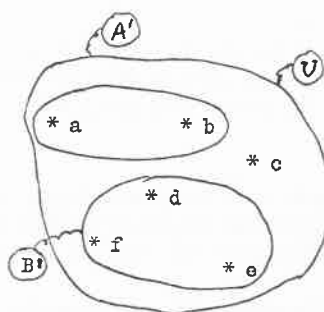
$\{X, Y, Z\}$ est une partition de U



$\{M, N, P, Q\}$ est une partition de U



$\{A, B, C\}$ n'est pas une partition de U , car les parties A et B ne sont pas disjointes



$\{A', B'\}$ n'est pas une partition de U , car l'élément e n'appartient à aucune classe.

Le concept de partition sera repris ultérieurement à l'occasion de l'étude des relations d'équivalence, des congruences et de la construction de l'ensemble $\mathbb{Z}$; le terrain est préparé suivant le bon principe de Revuz : « Tôt et progressivement ».

Fiche 7. Fonctions.

1. Voici deux ensembles :

$$F = \{\text{Rhône, Loire, Seine, Rhin, Garonne}\}$$

$$V = \{\text{Marseille, Lyon, Tours, Strasbourg, Paris}\}$$

et la relation $\mathcal{F}$ de F vers V : « ... passe par... ».

Dessine le schéma sagittal et le schéma cartésien de cette relation.

Si tu choisis un élément de F , combien a-t-il d'images, c'est-à-dire combien de flèches en partent? Un élément de la source F a-t-il plusieurs images?

Reprends la même étude mais en remplaçant l'ensemble V par l'ensemble :

$$V' = \{\text{Marseille, Lyon, Tours, Strasbourg, Paris, Avignon}\}$$

et la relation $\mathcal{F}'$ de F vers V' .

2. Tu viens d'étudier deux relations; pour la première, *tout* élément de la source a *au plus* une image.

Une telle relation est une **FONCTION**.

Une relation est une **FONCTION** si tout élément de la source a **AU PLUS** une image (il peut ne pas en avoir du tout).

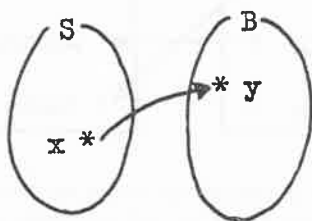
La seconde relation est-elle une fonction?

3. Notation.

Voici une fonction f de source S et de but B .

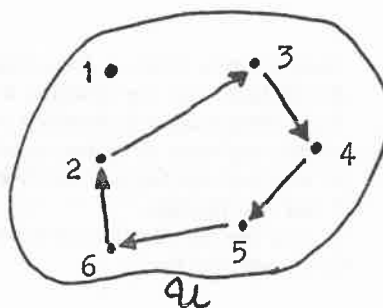
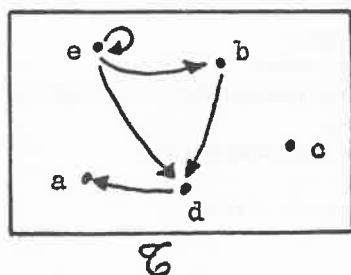
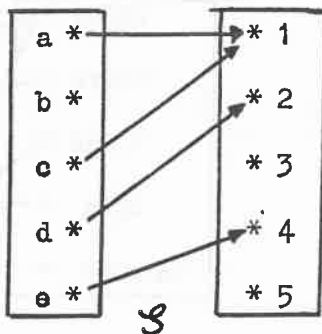
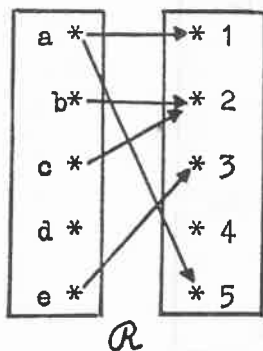
Si l'élément x de S a pour image l'élément y de B , on écrit :

$$f: x \mapsto y$$



ce qui se lit « x a pour image y par la fonction f ».

4. Voici les schémas sagittaux de quatre relations $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{U}$.

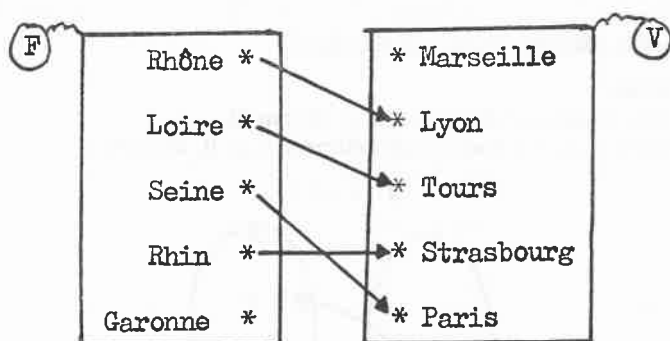


Lesquelles sont des fonctions?

Pour les autres, peux-tu supprimer des flèches pour que les nouvelles relations soient des fonctions?

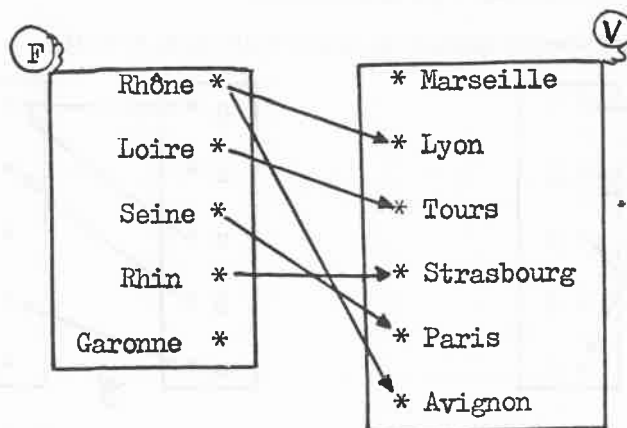
Nous introduisons dans cette fiche le concept de fonction. Nous proposons aux enfants l'étude de deux relations :

a) la relation $\mathfrak{F}$ de F vers V qui conduit au schéma sagittal suivant :



Un élément de la source F possède une image au plus (zéro ou une).

b) la relation $\mathfrak{F}'$ de F vers V' qui conduit au schéma sagittal suivant :



Dans ce cas le Rhône a deux images : Lyon et Avignon.

La relation $\mathfrak{F}$ est une fonction, $\mathfrak{F}'$ n'est pas une fonction.

Nous donnons alors la définition et la notation d'une fonction. Puis nous proposons les schémas sagittaux de quatre relations $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{U}$.

$\mathfrak{R}$ n'est pas une fonction car l'élément a possède deux images 1 et 5.

$\mathfrak{S}$ est une fonction.

$\mathfrak{C}$ n'est pas une fonction car e possède trois images : b , d et e .

$\mathfrak{U}$ est une fonction.

En supprimant du graphe de la relation $\mathcal{R}$ le couple $(a, 1)$ ou le couple $(a, 5)$ on obtient une fonction. De même, en supprimant du graphe de la relation $\mathcal{G}$ le couple (e, e) et le couple (e, b) on obtient une fonction.

Fiche 8. Exercices sur les fonctions.

1. Voici un ensemble d'enfants :

$$X = \{\text{Jeanne, André, Paul, Véronique, Rose}\}$$

et un ensemble de fleurs :

$$Y = \{\text{rose, œillet, tulipe, marguerite, mimosa}\}.$$

- André aime les roses et les tulipes, mais préfère les roses.
- Paul n'aime que les marguerites.
- Véronique préfère les tulipes, mais elle aime aussi les roses et le mimosa.
- Jeanne aime toutes les fleurs et n'en préfère aucune.
- Rose n'aime pas les fleurs.

- a) Dessine les deux schémas de la relation $\mathcal{A}$ « ... aime... » de X vers Y .
- b) Dessine les deux schémas de la relation $\mathcal{P}$ « ... préfère... » de X vers Y .
- c) Laquelle de ces deux relations est une fonction? Pourquoi?

2. Voici un ensemble :

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

Dans l'ensemble E , la relation « ... est le double de... » est-elle une fonction?

Dans l'ensemble E , la relation « ... est multiple de... » est-elle une fonction?

3. La relation « ... est multiple de... » de source $S = \{5, 8, 21, 18, 13\}$ et de but $B = \{5, 9, 4, 7, 11\}$ est-elle une fonction?

Si oui, comment peux-tu transformer la source S pour que la nouvelle relation ne soit pas une fonction?

Même question en modifiant le but.

4. Imagine d'autres exemples de fonctions d'un ensemble vers un autre ensemble et des exemples de fonctions dans un ensemble.

Voici le schéma sagittal de la relation $\mathcal{A}$ et celui de la relation $\mathcal{P}$.



Le graphe de la relation $\mathcal{F}$ est inclus dans celui de la relation $\mathcal{A}$. La relation $\mathcal{F}$ est une fonction, car une personne ne peut préférer qu'un seul type de fleur (ou pas du tout).

La relation $\mathcal{A}$ n'est pas une fonction : une personne peut aimer plusieurs types de fleurs.

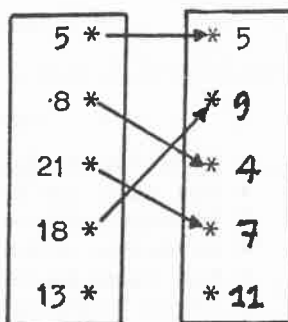
La relation « ... est le double de ... » dans E est une fonction : un naturel est le double d'au plus un naturel ; ainsi, par exemple, 10 est le double de 5 et 7 n'est le double d'aucun naturel.

La relation « ... est multiple de ... » dans E n'est pas une fonction, en effet, un naturel peut être multiple de plus d'un naturel ; par exemple, 10 est multiple de 1, 2, 5 et 10.

Par contre, la relation « ... est multiple de ... » de S vers B est une fonction.

Cet exemple montre une fois encore que la nature d'une relation dépend essentiellement de la source et du but.

En prenant 20 dans la source, cet élément a alors deux images 4 et 5 ; ce n'est plus une fonction. De même, en prenant 6 dans le but, l'élément 18 a alors deux images 6 et 9 ; ce n'est plus une fonction.



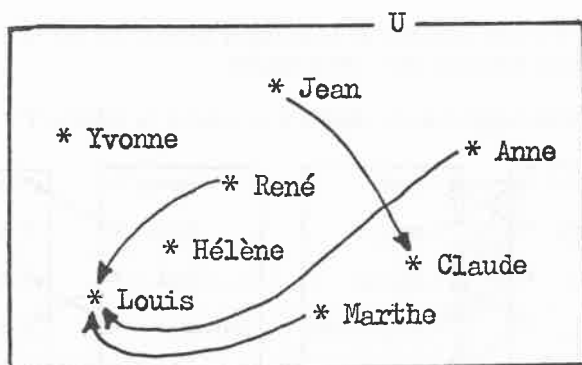
Fiche 9. Composition de relations.

1. Voici un ensemble de personnes :

$U = \{\text{Jean, Yvonne, Anne, René, Hélène, Claude, Louis, Marthe}\}$.

- Louis a trois enfants : Anne, Marthe et René.
- Jean est le fils de Claude et de Marthe.
- Yvonne est la mère de Louis.
- Hélène est la mère de Claude.

Le dessin ci-après est le schéma sagittal de la relation $\mathcal{F}$ « ... a pour père ... » dans U .

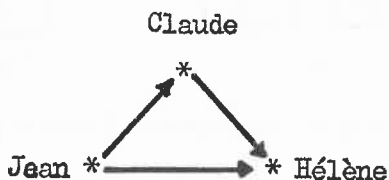


a) Ce schéma est-il correct?

b) Dessine sur le même diagramme, le schéma sagittal de la relation $\mathcal{M}$ « ... a pour mère... » dans U .

2. Hélène est la mère de Claude, Claude est le père de Jean, Hélène est donc la grand-mère paternelle de Jean.

Tu as ainsi une nouvelle relation dans U : « ... a pour grand-mère paternelle... ».

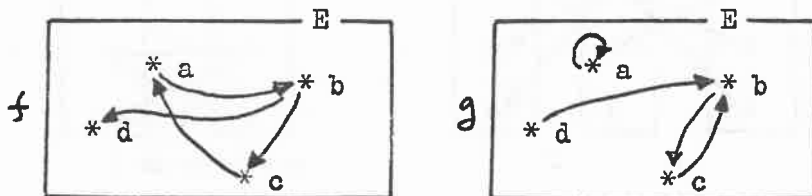


Représente sur un autre dessin le schéma sagittal de cette nouvelle relation. Cette nouvelle relation s'appelle la relation composée de la relation $\mathcal{F}$ « ... a pour père... » suivie de la relation $\mathcal{M}$ « ... a pour mère ... ».

3. Sur un troisième dessin, représente le schéma sagittal de la relation composée de $\mathcal{M}$ suivie de $\mathcal{F}$. Comment s'énonce-t-elle ?

4. Exercice.

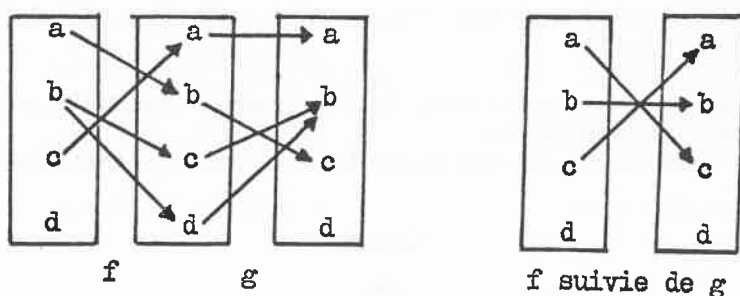
Voici deux relations f et g dans l'ensemble $E = \{a, b, c, d\}$ données par leurs schémas sagittaux :



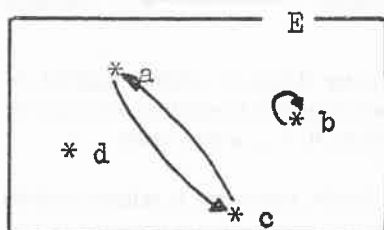
Donne le schéma sagittal de la relation composée de la relation f suivie de la relation g .

Même question pour la relation composée de la relation g suivie de la relation f .

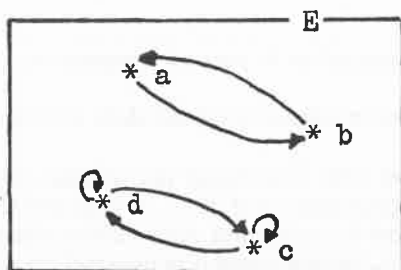
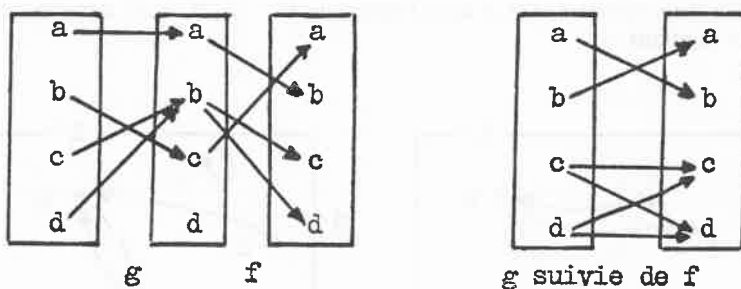
Nous abordons dans cette fiche l'étude des relations composées. En partant des deux relations $\mathcal{F}$ « ... a pour père... » et $\mathcal{M}$ « ... a pour mère ... » dans un ensemble de personnes, nous conduisons les enfants aux deux relations composées « ... a pour grand-mère paternelle ... » et « ... a pour grand-père maternel... » dans le même ensemble U . L'exercice suivant est plus difficile. Deux relations f et g sont données par leurs schémas sagittaux. Pour trouver les relations composées, la plupart des enfants ont procédé de la manière suivante :



d'où le schéma sagittal de la relation composée « f suivie de g ».



De même pour la relation « g suivie de f ».



On constate sur cet exemple que les relations composées « f suivie de g » et « g suivie de f » ne sont pas égales.

Fiche 10. Exercices.

1. En suédois, les mots « fader » et « moder » signifient « père » et « mère ». Ils sont remplacés par « far » et « mor » dans les noms composés.

En français, il n'y a que deux mots pour désigner des grands-parents : « grand-père » ou « grand-mère ».

En suédois, il en existe quatre : « farmor », « farfar », « morfar » et « mormor ». « farmor » signifie « la mère du père ». Que signifient les trois autres ?

« Bror » signifie « frère » et il existe deux mots pour « oncle ». L'un d'eux est « farbror ». Quel est l'autre ?

Le mot « fils » se traduit en suédois par « son ». Peux-tu donner un des mots pour traduire « neveu » ?

« Dotter » signifie « fille ». Trouve les quatre mots pour traduire « petit-fils » et « petite-fille ».

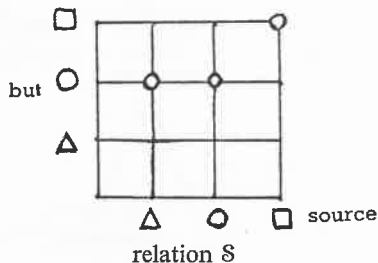
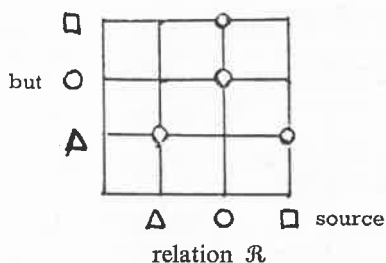
Complète les phrases suivantes :

« Si Ubrika est *farmor* de Nils, alors Nils est ... de Ubrika ».

« Si Karl est *brorson* de Olaf, alors Olaf est ... de Karl ».

(Nils et Olaf sont des prénoms masculins.)

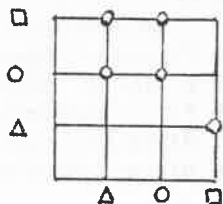
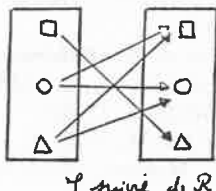
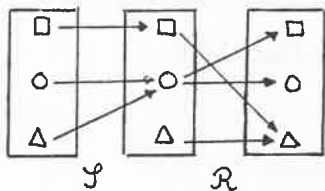
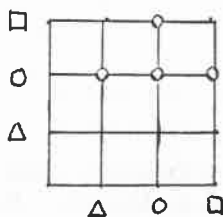
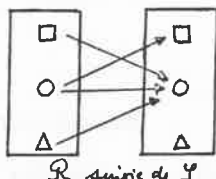
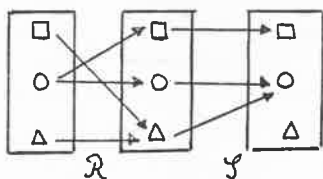
2. Voici deux relations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ dans l'ensemble $X = \{\Delta, O, \square\}$, données par leurs schémas cartésiens :



Dessine le schéma cartésien de la relation « $\mathcal{R}$ suivie de $\mathcal{S}$ ».

Dessine de même le schéma cartésien de la relation « $\mathcal{S}$ suivie de $\mathcal{R}$ ».

Le premier exercice de cette fiche est dû à Fletcher. Il a beaucoup intéressé les enfants qui étaient tout heureux de faire du suédois. Pour résoudre le second, ils sont passés pour la plupart par les schémas sagittaux :



Ici encore on constate que les relations « R suivie de S » et « S suivie de R » ne sont pas égales.

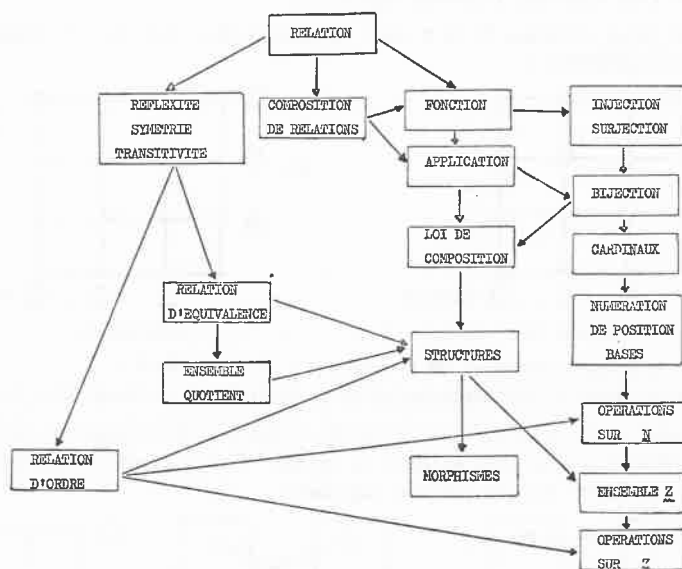
Remarques :

1. Dans la nouvelle rédaction des fiches (Mathématique en 6^e, E. Galion), nous avons abandonné le concept de fonction et nous avons introduit celui d'application.

2. Nous avons d'autre part proposé de plus nombreux exercices sur les relations numériques.

3. Sans passer par les notions d'injection et de surjection, nous avons présenté le concept de bijection ainsi que la composition de bijections, ce qui conduit à des concrétisations intéressantes de groupes.

4. La notion de relation ne fait pas l'objet d'un « chapitre », cette notion a été utilisée chaque fois que l'occasion s'est présentée. Nous disposons d'un outil et nous l'avons exploité au maximum.



BIBLIOGRAPHIE

1. DUMONT : *Étude intuitive des Ensembles*, Dunod.
2. E. DUPONT : *Apprentissage Mathématique*, Sudel.
3. DUVERT, GAUTHIER et GLAYMANN : *Travaux Pratiques de Mathématique*, série II : *les Relations*, O.C.D.L.
4. FLETCHER : *Apprentissage de la Mathématique aujourd'hui*, O.C.D.L.
5. E. GALION : *Mathématique en 6^e*, O.C.D.L.
6. PAPY : *Mathématique Moderne*, Didier.
7. REVUZ : *Le Cours de l'A.P.M.*, tome 1.
8. REVUZ : *Mathématique Moderne, Mathématique Vivante*, O.C.D.L.

L'anneau des entiers en classe de Cinquième

E. DEHAME,

Mathématiques Supérieures, lycée de Poitiers.

Dans un précédent article (*Bulletin 259*, p. 355), nous avons vu comment il était possible de donner aux élèves de Sixième une idée assez complète de la structure de groupe (additif) ordonné de $\mathbb{Z}$. A cette fin, nous avons adopté le principe pédagogique suivant :

- étudier plusieurs situations concrètes conduisant à différents ensembles $\mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2, \dots$ ayant tous la même structure;

- étudier cette structure sur un ensemble - type, appelé $\mathbb{Z}$, susceptible d'une définition purement mathématique ($\mathbb{Z}$ est le modèle mathématique correspondant aux ensembles $\mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2, \dots$);

- utiliser ce modèle dans l'étude de nouvelles situations concrètes.

Le programme de la Commission Lichnérowicz prévoit l'introduction, en classe de Cinquième, de l'ensemble $\mathbb{Z}$ muni de sa structure d'anneau ordonné, c'est-à-dire muni de l'addition, de l'ordre, et aussi de la multiplication.

Le but du présent article est de chercher si cette introduction peut être faite en appliquant le même principe pédagogique.

Le problème est ici beaucoup plus complexe. Afin de mieux saisir quelles sont les difficultés pédagogiques, nous commencerons par faire une étude théorique de $\mathbb{Z}$ indépendante du niveau des élèves auxquels s'adresse cet enseignement.

1. Étude théorique de l'anneau des entiers.

1. 1. Le groupe additif ordonné des entiers.

$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des classes de couples d'entiers naturels pour la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par

$$(a, b) \mathcal{R} (a', b') \Leftrightarrow a + b' = b + a'$$

Afin d'éviter toute introduction prématurée des signes $+$ et $-$, nous désignerons les éléments de $\mathbb{Z}$ par des nombres en couleurs ; pour des raisons typographiques, nous écrirons a_r et a_v au lieu de a (en rouge) et a (en vert).

Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, la classe de $(a, 0)$ sera notée a_r , celle de $(0, a)$ sera notée a_v . La classe de $(0, 0)$ sera notée 0_z .

Nous désignerons par $\mathbb{Z}_r$ le sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ constitué par O_z et par tous les a_r ($a \in \mathbb{N}^*$), par $\mathbb{Z}_v$ le sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ constitué par O_z et tous les a_v ($a \in \mathbb{N}^*$).

Addition. Soient x et y deux éléments de $\mathbb{Z}$, (a, b) un couple de naturels appartenant à la classe x , (c, d) un couple de naturels appartenant à la classe y . On démontre que la classe du couple $(a+c, b+d)$ ne dépend que de x et de y . C'est cette classe qu'on appelle $x+y$.

On vérifie que, muni de l'addition ainsi définie, $\mathbb{Z}$ est un groupe abélien, dont l'élément neutre est O_z . L'opposé d'un entier x sera noté $\text{opp } x$. L'ensemble des opposés d'une partie A de $\mathbb{Z}$ sera noté $\text{opp } A$.

Relation d'ordre. Si, dans un groupe abélien quelconque G , une partie A possède les propriétés suivantes :

- (1) A est stable pour l'addition,
- (2) $A \cap (\text{opp } A) = \{0_G\}$ (0_G : élément neutre de G),
- (3) $A \cup (\text{opp } A) = G$,

on démontre que la relation α , entre éléments de G , définie par

$$x \alpha y \Leftrightarrow y + \text{opp } x \in A$$

est une relation d'ordre total dans G , compatible avec l'addition

$$(x \alpha y) \Rightarrow (x+z) \alpha (y+z)$$

On dit alors que $(G, +, \alpha)$ est un groupe abélien totalement ordonné. A est l'ensemble des $x \in G$ qui vérifient

$$0_G \alpha x.$$

On dit que A est l'ensemble des éléments positifs de G (pour la relation d'ordre α).

La relation réciproque de α , c'est-à-dire la relation $\preceq$ définie par :

$$x \preceq y \Leftrightarrow y \alpha x$$

est aussi une relation d'ordre total compatible avec l'addition dans G . L'ensemble des éléments positifs de G pour la relation $\preceq$ est $\text{opp } A$.

Cette circonstance se produit dans $\mathbb{Z}$: chacune des parties $\mathbb{Z}_r$, $\mathbb{Z}_v$ (qui sont opposées l'une de l'autre) jouit des propriétés (1), (2), (3). Il est donc possible de définir dans $\mathbb{Z}$ deux relations d'ordre total, réciproque l'une de l'autre, et toutes deux compatibles avec l'addition :

$$\begin{aligned} x \alpha y &\Leftrightarrow y + \text{opp } x \in \mathbb{Z}_r \\ x \preceq y &\Leftrightarrow y + \text{opp } x \in \mathbb{Z}_v \end{aligned}$$

Les éléments de $\mathbb{Z}_r$ sont positifs pour la relation d'ordre α , ceux de $\mathbb{Z}_v$ sont positifs pour la relation d'ordre $\preceq$.

1. 2. L'anneau ordonné des entiers.

Il est facile de démontrer (cela peut constituer un exercice pour élèves de terminale) qu'il y a deux lois de composition et deux seulement qui, jointes à l'addition,

munissent $\mathbb{Z}$ d'une structure d'anneau unitaire. Ce sont les lois $\top$ et $\perp$ définies respectivement par : (1)

$$\left\{ \begin{array}{lll} \forall a \in \mathbb{N}^*, \forall b \in \mathbb{N}^*, & a_r \top b_r = a_v \top b_v = (a \ b)_r \\ \forall a \in \mathbb{N}^*, \forall b \in \mathbb{N}^*, & a_r \top b_v = a_v \top b_r = (a \ b)_v \\ \forall x \in \mathbb{Z}, & 0_z \top x = x \top 0_z = 0_z. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{lll} \forall a \in \mathbb{Z}^*, \forall b \in \mathbb{N}^*, & a_v \perp b_v = a_r \perp b_r = (a \ b)_v \\ \forall a \in \mathbb{N}, \forall b \in \mathbb{N}^*, & a_v \perp b_r = a_r \perp b_v = (a \ b)_r \\ \forall x \in \mathbb{Z}, & 0_z \perp x = x \perp 0_z = 0_z. \end{array} \right.$$

L'élément neutre pour la loi $\top$ est 1_r , l'élément neutre pour la loi $\perp$ est 1_v .

On constate, à posteriori, que les deux anneaux ainsi obtenus : $(\mathbb{Z}, +, \top)$ et $(\mathbb{Z}, +, \perp)$ sont commutatifs. Ils sont d'ailleurs isomorphes entre eux, l'isomorphisme étant défini par : $x \mapsto \text{opp } x$.

Multiplication et ordre. Si $(G, +, \times)$ est un anneau quelconque, si A est l'ensemble des éléments positifs de G pour une relation d'ordre α compatible avec l'addition, et si, de plus, A est stable pour la multiplication, on dit que $(G, +, \times, \alpha)$ est un anneau ordonné. Dans tout anneau ordonné G ,

$$x\alpha y \text{ et } 0_G\alpha z \Rightarrow (x \ z)\alpha(y \ z)$$

Dans le cas de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_r$ est stable pour la loi $\top$, mais non pour la loi $\perp$, $\mathbb{Z}_v$ est stable pour la loi $\perp$ mais non pour la loi $\top$.

$(\mathbb{Z}, +, \top, \alpha)$ et $(\mathbb{Z}, +, \perp, \alpha)$ sont des anneaux ordonnés, admettant respectivement pour ensembles des éléments positifs $\mathbb{Z}_r$ et $\mathbb{Z}_v$. Ces anneaux ordonnés sont d'ailleurs isomorphes entre eux (isomorphisme : $x \mapsto \text{opp } x$).

$(\mathbb{Z}, +, \top, \alpha)$ et $(\mathbb{Z}, +, \perp, \alpha)$ ne sont pas des anneaux ordonnés.

Pour le mathématicien, la situation est très simple : la structure d'anneau ordonné étant plus féconde que celle d'anneau non ordonné, il choisira l'un des anneaux $(\mathbb{Z}, +, \perp, \alpha)$ ou $(\mathbb{Z}, +, \top, \alpha)$. Et, puisque ces anneaux ordonnés sont isomorphes, il choisira n'importe lequel des deux. Du point de vue mathématique, il n'y a aucun inconvénient à décréter que les classes des couples de la forme $(a, 0)$ sont les entiers positifs, à les noter a^+ , et à définir la multiplication dans $\mathbb{Z}$ par

$$\left\{ \begin{array}{lll} \forall a \in \mathbb{N}^*, \forall b \in \mathbb{N}^*, & a^+ \times b^+ = a^- \times b^- = (ab)^+ \\ \forall a \in \mathbb{N}^*, \forall b \in \mathbb{N}^*, & a^+ \times b^- = a^- \times b^+ = (ab)^- \\ \forall x \in \mathbb{Z}, & 0_z \times x = x \times 0_z = 0_z \end{array} \right.$$

Mais, pour le pédagogue qui cherche à dégager la structure d'anneau de $\mathbb{Z}$ de situations concrètes, ce choix n'est pas arbitraire. En effet la situation idéale (difficile à réaliser, comme nous le verrons par la suite) est la suivante : on a établi une bijection d'un ensemble E d'objets

$$\dots\dots\dots A'_2 \ A'_1 \ A_0 \ A_1 \ A_2 \ \dots\dots\dots$$

sur $\mathbb{Z}$, par exemple

$$A'_n \mapsto n_r, \ A_n \mapsto n_v, \ A_0 \mapsto 0_z.$$

(1) En d'autres termes, pour chacune des « multiplications » $\top$ et $\perp$, la valeur absolue du produit est égale au produit des valeurs absolues; pour $\top$, le produit de deux nombres de même couleur est rouge, le produit de deux nombres de couleurs différentes est vert; pour $\perp$ c'est le contraire.

A l'addition dans $\mathbb{Z}$, correspond une loi de composition dans E qui a une signification concrète. Il peut arriver qu'à l'une des lois $\top$ ou $\perp$ corresponde aussi une loi dans E qui a une signification concrète, mais qu'à l'autre loi ne corresponde rien d'intéressant.

1. 3. Identification de $\mathbb{N}$ à une partie de $\mathbb{Z}$.

La bijection φ de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}_r$ définie par :

$$\forall a \in \mathbb{N}^*, \varphi(a) = a_r \text{ et } \varphi(0) = 0_z$$

est un isomorphisme de $(\mathbb{N}, +, \leq)$ sur $(\mathbb{Z}_r, +, \alpha)$.

La bijection ψ de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}_v$ définie par

$$\forall a \in \mathbb{N}^*, \psi(a) = a_v \text{ et } \psi(0) = 0_z$$

est un isomorphisme de $(\mathbb{N}, +, \leq)$ sur $(\mathbb{Z}_v, +, \alpha)$.

Si $\mathbb{Z}$ est muni de la multiplication notée ci-dessus par le signe $\top$ (resp. $\perp$), seule la bijection φ (resp. ψ) est un isomorphisme pour la multiplication.

Souvent, mais peut-être pas aussi souvent qu'on ne le pense, on a intérêt à considérer les naturels comme des entiers particuliers. Il faut alors identifier $\mathbb{N}$ à $\mathbb{Z}_r$ (resp. $\mathbb{Z}_v$) au moyen de la bijection φ (resp. ψ).

Le choix de la partie ($\mathbb{Z}_r$ ou $\mathbb{Z}_v$) de $\mathbb{Z}$ qu'on identifie à $\mathbb{N}$ équivaut au choix de la relation d'ordre (α ou α) dans $\mathbb{Z}$, ou encore au choix de la multiplication ($\top$ ou $\perp$) dans $\mathbb{Z}$. Dans un exposé idéal de la théorie des entiers, ces trois choix devraient intervenir au même instant.

Ces choix étant faits, la relation d'ordre choisie dans $\mathbb{Z}$ peut se noter $\leq$, car elle prolonge la relation d'ordre notée de cette façon dans $\mathbb{N}$, et les éléments de $\mathbb{Z}$ peuvent se noter (dans l'ordre croissant) :

$$\dots \text{ opp } 2, \text{ opp } 1, 0, 1, 2, 3 \dots$$

Le signe — pour désigner l'opposé ne s'impose pas encore.

1. 4. Multiplication externe d'un entier par un naturel.

Soit G un groupe abélien (additif) quelconque. Pour tout élément x de G et pour tout naturel n , on définit nx comme étant la somme de n termes égaux à x . Il s'agit en réalité d'une définition par récurrence :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad & 0x = 0_G \\ & nx = (n-1)x + x. \end{aligned}$$

On démontre les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in G, \quad \forall y \in G, \quad & n(x+y) = nx + ny \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in G, \quad & (n+m)x = nx + mx \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in G, \quad & n(mx) = (nm)x \end{aligned}$$

La première exprime que l'application

$$f_n : x \mapsto nx$$

est un *endomorphisme* de G (une application de G dans G qui respecte l'addition). La seconde exprime que la somme des endomorphismes f_n et f_m est l'endomorphisme f_{n+m} , la troisième que le composé $f_n \circ f_m$ est l'endomorphisme f_{nm} .

Cette définition et ces propriétés s'appliquent au cas où G est le groupe $(\mathbb{Z}, +)$. *L'étude de la multiplication d'un entier par un naturel peut donc se faire avant d'avoir choisi celui des deux ensembles $\mathbb{Z}_r, \mathbb{Z}_v$ qu'on identifiera à $\mathbb{N}$.*

Cette multiplication externe possède, dans le cas de $\mathbb{Z}$, la propriété suivante :

$$nx = 0_x \Rightarrow n = 0 \text{ ou } x = 0_x$$

qui est fautive dans d'autres groupes abéliens $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \text{ p. ex.})$.

En outre, pour tout naturel n , l'application f_n est croissante (pour chacune des relations d'ordre α, v) :

$$x \alpha y \Rightarrow (nx) \alpha (ny)$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, cette application est même strictement croissante.

1. 5. L'anneau des endomorphismes du groupe $(\mathbb{Z}, +)$.

Cherchons quelles sont toutes les applications f de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Si f est une telle application, on vérifie immédiatement que :

$$\begin{array}{lll} \forall x \in \mathbb{Z}, & f(0_x) = 0_x \\ \forall n \in \mathbb{N}, & \forall x \in \mathbb{Z}, & f(\text{opp } x) = \text{opp } f(x) \\ & & f(nx) = nf(x) \end{array}$$

Il en résulte qu'un endomorphisme f du groupe additif $\mathbb{Z}$ est entièrement déterminé par la donnée de $f(1_r)$ (ou de $f(1_v)$). En effet, deux cas sont possibles :

— ou bien $f(1_r)$ appartient à $\mathbb{Z}_r$; posons alors $f(1_r) = n_r$ (n naturel donné),

$$\begin{array}{ll} \forall p \in \mathbb{N}, & f(p_r) = f(p1_r) = pn_r = (pn)_r = np_r \\ \forall p \in \mathbb{N}, & f(p_v) = \text{opp } f(p_r) = np_v; \end{array}$$

dans ce cas, il existe un naturel n tel que

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \quad f(x) = nx$$

f est l'application f_n étudiée ci-dessus (§ 1.4.);

— ou bien $f(1_r)$ n'appartient pas à $\mathbb{Z}_r$; il existe alors un naturel strictement positif n tel que $f(1_r) = n_v$, et on démontre, comme dans le cas précédent, que

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \quad f(x) = \text{opp } (nx)$$

Réciproquement, l'application f qui à tout x associe $\text{opp } (nx)$ est bien un endomorphisme du groupe additif $\mathbb{Z}$: c'est la composée des endomorphismes f_n et

$$x \mapsto \text{opp } x.$$

Nous noterons cette application f'_n .

Il y a donc deux sortes d'endomorphismes de $(\mathbb{Z}, +)$:

— les *endomorphismes croissants* f_n (qui « conservent la couleur »);

— les endomorphismes décroissants f'_n (qui « changent la couleur »).

L'endomorphisme nul f_0 , qui est une application constante, doit être considéré comme appartenant aux deux classes.

Addition des endomorphismes

D'une façon générale, si f et g sont des endomorphismes d'un groupe abélien G , l'application $f+g$ définie par

$$x \mapsto f(x) + g(x)$$

est encore un endomorphisme de G .

Dans le cas où G est le groupe $(\mathbb{Z}, +)$, on constate facilement que l'addition des endomorphismes s'effectue selon les règles suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \begin{aligned} f_n + f_m &= f_{n+m} \\ f'_n + f'_m &= f'_{n+m} \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall m \geq n, \quad \begin{aligned} f_n + f'_m &= f'_{m-n} \\ f'_n + f_m &= f_{m-n} \end{aligned}$$

Ces règles opératoires sont analogues à celles qui permettent de calculer la somme de deux éléments de $\mathbb{Z}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \begin{aligned} n_r + m_r &= (n+m)_r \\ n_v + m_v &= (n+m)_v \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall m \geq n, \quad \begin{aligned} n_r + m_v &= (m-n)_v \\ n_v + m_r &= (m-n)_r \end{aligned}$$

Cela signifie que la bijection de $\mathbb{Z}$ sur l'ensemble $\mathcal{E}$ des endomorphismes de $(\mathbb{Z}, +)$ définie par :

$$(1) \quad \begin{cases} n_r \mapsto f_n \\ n_v \mapsto f'_n \\ 0_z \mapsto f_0 \end{cases}$$

est un isomorphisme de groupes. Il en est de même, bien entendu, pour la bijection déduite de la précédente en échangeant les rôles des indices r et v .

Composition des endomorphismes

Le composé $g \circ f$ de deux endomorphismes f et g d'un groupe G est encore un endomorphisme de G . Dans le cas du groupe $(\mathbb{Z}, +)$, les endomorphismes se composent de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad f_n \circ f_m &= f'_n \circ f'_m = f_{nm} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad f_n \circ f'_m &= f'_n \circ f_m = f'_{nm} \end{aligned}$$

La bijection définie par (1) est donc un isomorphisme de l'anneau $(\mathbb{Z}, +, \top)$ défini au paragraphe 1.2. sur l'ensemble $\mathcal{E}$ muni de l'addition et de la composition des endomorphismes.

On peut donc identifier l'ensemble $\mathcal{E}$ des endomorphismes du groupe additif $\mathbb{Z}$, muni de ces deux lois, à l'anneau $\mathbb{Z}$. Cette identification ne peut se faire que d'une seule façon : les éléments positifs de $\mathcal{E}$ sont les endomorphismes croissants.

Nous rencontrons ainsi pour la première fois un ensemble d'objets :

$$\mathcal{E} = \{ \dots f'_2, f'_1, f_0, f_1, f_2, \dots \}$$

en correspondance bijective avec $\mathbb{Z}$, la bijection ne pouvant s'effectuer que d'une seule façon si on veut qu'à l'addition et à la multiplication dans l'anneau $\mathbb{Z}$ correspondent l'addition et la composition des endomorphismes.

Malheureusement, ces objets sont des êtres mathématiques au nom barbare et peu élémentaires du point de vue conceptuel. Songeons par exemple que l'égalité de deux éléments de $\mathcal{E}$ ($f = g$) signifie que, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $f(x) = g(x)$!

Remarque sur la terminologie.

Il faut éviter de confondre les endomorphismes du groupe additif $\mathbb{Z}$ et les endomorphismes de l'anneau $(\mathbb{Z}, +, \times)$. Dans l'ensemble $\mathcal{E}$ des endomorphismes de $(\mathbb{Z}, +)$, seuls f_0 (application constante $x \mapsto 0$) et f_1 (application identique de $\mathbb{Z}$) sont des endomorphismes pour la structure d'anneau. L'expression « endomorphismes de $\mathbb{Z}$ » (sans préciser la structure) est donc à proscrire.

On pourrait remédier à cet inconvénient en appelant les éléments de $\mathcal{E}$ les *homothéties* de $\mathbb{Z}$. Par exemple, f_n est l'homothétie de rapport n , f'_n l'homothétie de rapport (opp n). Mais c'est au titre d'endomorphismes de $(\mathbb{Z}, +)$ et non au titre d'homothéties (dans l'anneau $\mathbb{Z}$ ou dans le $\mathbb{Z}$ -module $\mathbb{Z}$) que les éléments de $\mathcal{E}$ interviennent dans cette étude.

De toute façon, les élèves de Cinquième n'ayant pas la notion générale d'endomorphisme ni celle d'homothétie, si les éléments de $\mathcal{E}$ interviennent dans un jeu, il sera préférable de leur donner un nom qui n'a pas de sens mathématique précis (machines, opérations, etc...).

Anneau des endomorphismes d'un groupe abélien quelconque $(G, +)$.

On démontre que, pour tout groupe abélien $(G, +)$, l'ensemble (noté $\text{End } G$) des endomorphismes de G est un anneau pour l'addition et pour la composition des endomorphismes. Mais, en général, le groupe $(\text{End } G, +)$ n'est pas isomorphe au groupe $(G, +)$. On peut s'en rendre compte, par exemple, en étudiant l'anneau des endomorphismes du groupe de Klein.

La possibilité de définir une structure d'anneau sur $(\mathbb{Z}, +)$ en identifiant $\mathbb{Z}$ à l'ensemble de ses endomorphismes (de groupe) n'est donc pas généralisable à n'importe quel groupe abélien. Elle est due à la propriété tout à fait remarquable suivante :

$$(\text{End } \mathbb{Z}, +) \text{ est isomorphe à } (\mathbb{Z}, +)$$

$\mathbb{Z}$ n'est pas le seul groupe qui possède cette propriété : elle vaut aussi pour le groupe additif des réels, des rationnels, des décimaux, des classes d'entiers modulo p .

2. Recherche de situations conduisant à la multiplication des entiers.

Ce problème pédagogique n'est pas particulier à $\mathbb{Z}$. Il se pose aussi pour la multiplication des décimaux (D), des rationnels ($\mathbb{Q}$), des réels ($\mathbb{R}$), et même déjà pour la multiplication dans D^+ , dans $\mathbb{Q}^+$ ou dans $\mathbb{R}^+$. Le cas de $\mathbb{N}$ est favorisé, la multiplication des naturels pouvant s'interpréter comme une multiplication de cardinaux.

2. 1. Multiplication externe.

Que le lecteur m'autorise à user, pendant quelques lignes, d'un langage qui n'est pas celui des mathématiciens ! Les exemples concrets de multiplications (dans $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$, etc...) consistent à multiplier des grandeurs de deux espèces différentes, les produits étant des grandeurs d'une troisième espèce (deux de ces espèces pouvant d'ailleurs être les mêmes). Par exemple,

longueur $\times$ longueur = aire

vitesse $\times$ durée = longueur, etc...

Pour le mathématicien, il n'y a dans ces exemples que des multiplications de nombres :

$$\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ etc...}$$

Mais, si on part d'une situation concrète, on considère trois ensembles d'objets E_1 , E_2 , E_3 en correspondance bijective avec $\mathbb{R}$ (ou avec $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}^+$, etc...) ; à l'addition dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}^+$, etc...) correspondent des lois internes dans E_1 , E_2 , E_3 qui ont une signification concrète ; à la multiplication dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}^+$, etc...) correspond une application

$$E_1 \times E_2 \rightarrow E_3$$

qui a une signification concrète.

Dans le cas de $\mathbb{Z}$, la difficulté provient du fait que les bijections de E_1 , E_2 , E_3 sur $\mathbb{Z}$ qui respectent l'addition ne sont pas uniques : on peut les composer avec l'automorphisme de $(\mathbb{Z}, +)$:

$$x \mapsto \text{opp } x.$$

Supposons que, ces trois bijections étant choisies, l'opération concrète $E_1 \times E_2 \rightarrow E_3$ corresponde à la multiplication dans $\mathbb{Z}$ notée ci-dessus (§ 1.2.) par le signe $\top$. Si on change l'une de ces bijections, ou si on les change toutes les trois, cette opération correspondra à la loi notée $\perp$.

Un tel exemple illustre donc mal la structure d'anneau de $\mathbb{Z}$: les deux lois $\top$ et $\perp$ jouent le même rôle, il n'y a pas dans $\mathbb{Z}$ d'éléments positifs, aucune partie de $\mathbb{Z}$ ne peut être canoniquement identifiée à $\mathbb{N}$.

Exemple. On distribue aux élèves des jetons rouges ou verts (ainsi qu'un jeton « zéro ») : ... 2_v , 1_v , 0_{rv} , 1_r , 2_r ...

Chaque élève joue avec des jetons tous de la même espèce (p. ex. des jetons 6_v) au jeu décrit dans l'article mentionné ci-dessus (*Bulletin* 259, p. 355). Ce jeu consiste à jeter les jetons sur une table comportant une partie gagnante G et une partie perdante P. Si 5 jetons tombent dans G, 2 dans P, l'élève obtient le « score » (5, 2) ; la classe du couple (5, 2) se note 3_g (3 points gagnants) ; si 2 jetons tombent dans G, 4 dans P, le score est (2, 4) et la classe de (2, 4) se note 2_p , etc... On convient qu'avec les jetons rouges, les scores gagnants font gagner de l'argent, les scores perdants en font perdre, et qu'avec les jetons verts c'est le contraire. Cela donne lieu à des multiplications telles que :

$$6_v \times 3_g = 18_d \quad (18 \text{ centimes déboursés})$$

$$5_r \times 2_g = 10_r \quad (10 \text{ centimes reçus})$$

etc...

Dans cette situation, on a trois ensembles distincts :

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}_{rv} &= \{ \dots 2_v ; 1_v ; 0_{rv} ; 1_r ; 2_r \dots \} \\ \mathbb{Z}_{gp} &= \{ \dots 2_p ; 1_p ; 0_{gp} ; 1_g ; 2_g \dots \} \\ \mathbb{Z}_{r'd} &= \{ \dots 2_d ; 1_d ; 0_{r'd} ; 1_{r'} ; 2_{r'} \dots \}\end{aligned}$$

et une application de $\mathbb{Z}_{rv} \times \mathbb{Z}_{gp}$ dans $\mathbb{Z}_{r'd}$.

Des artifices permettent de réduire ces trois ensembles à deux ou à un. Par exemple, au lieu de solder les résultats par un gain ou une perte de monnaie, on peut convenir que le joueur reçoit ou donne des jetons rouges ou verts (en convenant d'identifier 18_d à 18_v , $10_{r'}$ à 10_r , et en convenant que donner 18_r équivaut à recevoir 18_p) ; on a alors une application de $\mathbb{Z}_{rv} \times \mathbb{Z}_{gp}$ dans $\mathbb{Z}_{rv}$. On peut aussi décider qu'un jeton 6_p équivaut à 6 points perdants, un jeton 5_r à 5 points gagnants, et on obtient une loi interne :

$$\mathbb{Z}_{gp} \times \mathbb{Z}_{gp} \rightarrow \mathbb{Z}_{gp}.$$

Mais ces conventions ne s'imposent pas ; les conventions contraires (rouge correspondant à perdant, vert à gagnant) sont tout aussi justifiées. En somme, un tel exemple ne fait pas apparaître la multiplication comme loi interne dans $\mathbb{Z}$.

Dans le cas de $\mathbb{R}$ (ou de $\mathbb{D}$, ou de $\mathbb{Q}$), la situation se complique encore par l'arbitraire que comporte le choix d'une unité. En effet, contrairement à $(\mathbb{Z}, +)$ qui n'admet qu'un seul automorphisme (autre que l'identité).

$$x \mapsto \text{opp } x,$$

$(\mathbb{R}, +)$ en admet une infinité :

$$x \mapsto ax \quad (a \in \mathbb{R}^*)$$

S'il existe une bijection f d'un ensemble E (p. ex. l'ensemble des points d'une droite) sur $\mathbb{R}$, et si on connaît une loi interne dans E ayant une signification concrète et correspondant, par f , à l'addition des réels, toutes les bijections obtenues en composant f avec les automorphismes $x \mapsto ax$ de $(\mathbb{R}, +)$ possèdent la même propriété.

Composer f avec $x \mapsto ax$ revient à faire un changement d'unité (et aussi, si $a < 0$, un changement d'orientation).

Ainsi, si on veut illustrer la multiplication des réels par la relation entre l'espace parcouru x , la vitesse v , et la durée du parcours t , si on oriente arbitrairement les axes des abscisses, des vitesses et des temps, et si on choisit arbitrairement une unité sur chacun d'eux, on obtient une relation du type

$$x = kvt$$

où k est un réel non nul fixe.

Le physicien choisit des orientations concordantes et des systèmes d'unités cohérents, de façon que $k = 1$. Mais cela présuppose la connaissance de la multiplication dans $\mathbb{R}$. Ce n'est pas une introduction à la multiplication des réels.

2. 2. Multiplication interne.

Les seules situations concrètes pouvant servir à introduire la multiplication dans $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ etc... sont celles où (si on veut bien me permettre, encore un instant, ce langage non mathématique) on multiplie des grandeurs de même espèce pour obtenir une grandeur de même espèce :

$$E \times E \rightarrow E$$

En physique, cela ne se produit que lorsqu'on multiplie des nombres abstraits (des nombres « sans dimension »). Essayons de traduire cela en langage mathématique :

Un « nombre abstrait » est le rapport de deux grandeurs de même espèce. On a donc un ensemble F de « grandeurs », un ensemble de nombres ($\mathbb{R}$ p. ex.) et une loi externe dans F dont les opérateurs sont les éléments de $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R} \times F \rightarrow F \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda x$$

Le « rapport de deux grandeurs x et y de F » est le réel λ tel que $y = \lambda x$.

Le « nombre abstrait » du physicien est un opérateur d'homothétie dans F :

$$f_\lambda : x \mapsto \lambda x$$

et, au produit de deux nombres λ, λ' correspond la composée des homothéties $f_\lambda \circ f_{\lambda'}$.

Donc les seules situations concrètes conduisant à la multiplication interne dans $\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, etc...) sont celles où les éléments de $\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, etc...) opèrent dans un ensemble F . Il faut supposer que F est muni d'une addition (pour pouvoir définir la somme de deux homothéties), qu'à la somme de deux nombres correspond la somme des homothéties :

$$f_{\lambda+\lambda'} = f_\lambda + f_{\lambda'}$$

et qu'au produit de deux nombres correspond la composée :

$$f_{\lambda\lambda'} = f_\lambda \circ f_{\lambda'}$$

Enfin, si on veut que la composée des homothéties f_λ et $f_{\lambda'}$ définisse sans ambiguïté le produit $\lambda\lambda'$, il faut exiger que :

$$f_{\lambda_1} = f_{\lambda_2} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

S'il s'agit d'introduire $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$, toutes ces conditions sont réalisées quand on prend pour F un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ (resp. sur $\mathbb{R}$). Les situations les mieux adaptées à l'introduction de la multiplication des rationnels et des réels, sont :

- les rationnels opérant dans $\mathbb{Q}$ lui-même (ou, pour des raisons pédagogiques, les rationnels positifs définissant des opérations non partout définies dans $\mathbb{N}$),
- les réels définissant des homothéties sur la droite ou dans le plan,
- les réels positifs considérés comme des taux opérant par exemple dans un ensemble de sommes d'argent (problèmes d'intérêts composés avec taux variable) ou dans un ensemble de marchandises (rapport des productions annuelles d'une certaine denrée), etc...

S'il s'agit d'introduire $\mathbb{Z}$, toutes ces conditions sont réalisées quand on prend pour F un groupe abélien dans lequel $\mathbb{Z}$ opère fidèlement (ou, comme on dit aussi, un $\mathbb{Z}$ -module fidèle). Rappelons que, dans tout groupe abélien $(F, +)$, on définit une loi externe dont les opérateurs sont les éléments de $\mathbb{Z}$:

$$n \in \mathbb{Z}, \quad x \in F, \quad (n, x) \mapsto nx$$

et que cette loi vérifie les axiomes de module :

$$n(x+y) = nx+ny, \quad (n+m)x = nx+mx, \quad n(mx) = (nm)x.$$

On dit que $\mathbb{Z}$ opère fidèlement dans F si

$$[\forall x, nx = mx] \Rightarrow n = m$$

C'est cette dernière propriété qui assure que la correspondance entre les éléments de $\mathbb{Z}$ et les homothéties qu'ils définissent est bijective.

On est donc amené, pour introduire la multiplication dans $\mathbb{Z}$

— soit à faire opérer $\mathbb{Z}$ dans lui-même. Les homothéties sont alors les endomorphismes de $(\mathbb{Z}, +)$ étudiés au § 1.5. L'inconvénient de cette méthode est la présence simultanée de deux ensembles $\mathbb{Z}$ structurés de façon différente et qu'on ne peut pas identifier canoniquement.

— soit, pour remédier à cet inconvénient, à faire opérer $\mathbb{Z}$ dans un autre groupe abélien dans lequel il opère fidèlement, par exemple le groupe $(D, +)$ des décimaux relatifs, le groupe $(\mathbb{Z}^2, +)$ des couples d'entiers, le plan $(\mathbb{R}^2, +)$, etc..., mais non le groupe des classes d'entiers modulo p dans lequel $\mathbb{Z}$ n'opère pas fidèlement.

3. Quelques propositions pour la classe de Cinquième.

3. 1. Le groupe ordonné $(\mathbb{Z}, +, \alpha)$.

Les élèves de Cinquième ne peuvent prendre conscience de la structure, assez complexe, constituée par $(\mathbb{Z}, +, \times)$ opérant dans $(\mathbb{Z}, +)$ que si, au cours d'une révision du programme de Sixième, on les a habitués à manier différents ensembles isomorphes à $(\mathbb{Z}, +)$ notés de façons différentes :

- ensemble des nombres gagnants ou perdants,
- ensemble des nombres rouges ou verts, etc...,

et si aucun choix prématuré n'a été fait entre les deux relations d'ordre α, ν , donc aucune identification entre $\mathbb{N}$ et une partie de $\mathbb{Z}$.

On peut imaginer deux jeux tels que le suivant (ce jeu sera repris ensuite pour introduire la multiplication : § 3.3).

Au pays des monnaies rouges et vertes.

Dans un pays imaginaire, on utilise des pièces de monnaie, soit rouges, soit vertes, sur chacune desquelles est inscrit un naturel (sa valeur absolue) ; les pièces marquées 0 sont en partie rouges, en partie vertes. La « valeur » d'une pièce est un entier : $2_r, 5_v, 0_{rv}$, etc...

On distribue de telles pièces aux élèves, et chacun calcule sa « fortune » (la somme des « valeurs » des pièces qu'il possède). Puis on joue « au marchand » : un objet coûte 18_r ; on peut le payer avec une pièce de 20_r et une pièce de 2_v , etc...

Chez un certain marchand, tous les objets ont pour valeur un nombre rouge : les clients les plus riches sont ceux dont la fortune est « la plus rouge » ou la « moins verte ». Chez un autre marchand, tous les objets ont pour valeur un nombre vert : la notion de richesse est inversée.

Ainsi, aucun des ensembles $\mathbb{Z}_r, \mathbb{Z}_v$, n'est privilégié, les deux relations d'ordre jouent le même rôle.

Remarque sur les relations d'ordre.

Il vaut mieux éviter, pour l'instant les notations $\leq, \geq$ qui supposent un choix d'entiers « positifs ». Il n'est peut-être pas nécessaire d'introduire d'autres symboles tels que $\alpha, \approx$. On peut, à propos de chaque exemple, trouver des locutions telles que « a au moins autant de chance que », « est au moins aussi rouge que ». Ce qui importe c'est que, quelle que soit la notation adoptée, les élèves aient — au niveau de la Cinquième — une définition précise de l'ordre :

$$x \alpha y \text{ signifie : } y + \text{opp } x \in \mathbb{Z}_r$$

et que leur attention soit attirée sur l'unique propriété qui relie l'ordre à l'addition :

$$x \alpha y \Rightarrow (x+z) \alpha (y+z)$$

Multiplication d'un entier par un naturel.

C'est dans le cadre de la révision de $(\mathbb{Z}, +, \leq)$ au début de la classe de Cinquième que s'introduit cette multiplication externe (définie comme somme répétée).

On peut faire remarquer que, si M est la « machine à multiplier par n », si on fait entrer dans la machine deux entiers, puis leur somme, il en sortira deux entiers puis leur somme. On peut aussi composer les machines, les additionner, comme nous le verrons ci-dessous (§ 3.2.) dans un cas plus général.

En somme, l'étude de la multiplication externe

$$\mathbb{N} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

est une première initiation à l'étude des endomorphismes de $(\mathbb{Z}, +)$.

3. 2. Étude systématique des endomorphismes de $(\mathbb{Z}, +)$.

L'étude de l'anneau $\mathbb{Z}$ ne devant intervenir que vers la fin de la classe de Cinquième, on peut espérer qu'à ce moment les élèves seront suffisamment familiarisés avec la notion d'application pour comprendre la signification de phrases telles que « quels que soient les entiers $x, y, f(x+y) = f(x) + f(y)$ ».

Néanmoins, au niveau de la Cinquième, une telle phrase ne peut être considérée que comme le résultat d'un exercice de style ; pour l'approche intuitive de la structure d'anneau de $\mathbb{Z}$, les « petites machines » seront sans doute plus efficaces.

On connaît des machines qui transforment les sommes en sommes (les machines à multiplier par un naturel). Peut-on en construire d'autres ?

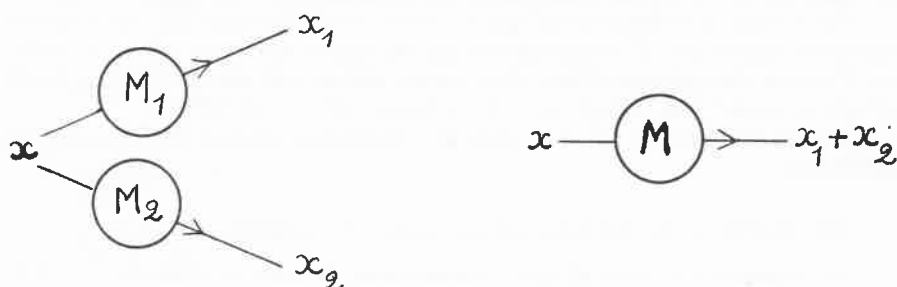
Supposons qu'une machine M transforme 1_r en 3_r . Qu'obtient-on si on fait entrer dans cette machine $2_r, 3_r, 0_r, 2_{vv}, \dots$?

Existe-t-il une telle machine transformant 2_r en 3_v ?

Différents exercices de ce genre montrent qu'une machine est entièrement déterminée quand on connaît l'image de 1_r (ou de 1_v) et que cette image peut être un entier choisi arbitrairement. On peut alors noter les machines de la façon suivante :

$$1_r \longrightarrow \textcircled{3^+} \longrightarrow 3_r \qquad 1_r \longrightarrow \textcircled{2^-} \longrightarrow 2_v$$

On définit la somme M de deux machines M_1 et M_2 :



On vérifie que M est encore une machine qui conserve l'addition. On cherche une règle permettant de trouver la somme de deux machines, et on constate que cette règle est analogue à celle qui donne la somme de deux entiers : l'égalité

$$(3^+) + (2^-) = (1^+)$$

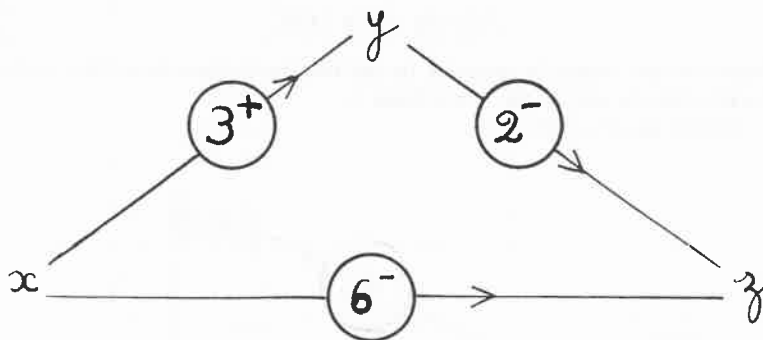
correspond à :

$$3_r + 2_v = 1_r \quad (\text{ou à } 3_v + 2_r = 1_v)$$

On introduit ainsi un nouvel ensemble $\mathbb{Z}$ dont les éléments se notent

$$\dots, 2^-, 1^-, 0^+, 1^+, 2^+, \dots$$

Ensuite, on étudie la composition des machines (trouver une machine M qui, à elle seule, travaille de la même façon que deux machines M_1, M_2 opérant successivement) et on est conduit à la définition de la multiplication dans le nouvel ensemble $\mathbb{Z}$ qu'on vient de construire :



6^- est, par définition le produit $3^+ \times 2^-$ (ou, si on préfère : $2^- \times 3^+$; les deux conventions sont valables, mais il faut en adopter une).

Il est alors facile d'obtenir les règles usuelles permettant de calculer le produit de deux entiers. Ces règles peuvent désormais servir de définition, et permettent de faire des démonstrations indépendantes des machines (c'est-à-dire indépendantes du fait que les éléments de $\mathbb{Z}$ sont interprétés comme définissant des endomorphismes de $(\mathbb{Z}, +)$).

Pour l'associativité de la multiplication, c'est évidemment l'interprétation par les machines qui s'impose (associativité de la composition des applications).

Par contre, la commutativité (qui se déduit immédiatement des règles opératoires) ne résulte pas de l'interprétation par les endomorphismes : il peut arriver que l'anneau des endomorphismes d'un groupe abélien soit non commutatif ; c'est ce qui se produit par exemple pour les groupes $(\mathbb{Z}^2, +)$ et $(\mathbb{R}^2, +)$.

L'étude du rôle de 0^{+-} et de 1^+ dans la multiplication ne pose pas de problèmes particuliers.

Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

La multiplication dans $\mathbb{Z}$ étant commutative, il suffit de démontrer, soit la distributivité à gauche, soit la distributivité à droite.

Nous donnerons quand même les deux démonstrations, car elles sont de nature différente et toutes deux intéressantes. Nous commencerons par la démonstration « sérieuse », peut-être trop sérieuse pour les élèves de Cinquième.

1) Soient f, g, h trois endomorphismes de $(\mathbb{Z}, +)$. Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, l'image de x par $(f+g) \circ h$ est, d'après la définition-même de la somme de deux endomorphismes :

$$f(h(x)) + g(h(x)).$$

C'est aussi l'image de x par $(f \circ h + g \circ h)$. Donc,

$$(f+g) \circ h = f \circ h + g \circ h.$$

2) L'image de x par $f \circ (g+h)$ est $f(g(x) + h(x))$, c'est-à-dire, puisque f est un endomorphisme :

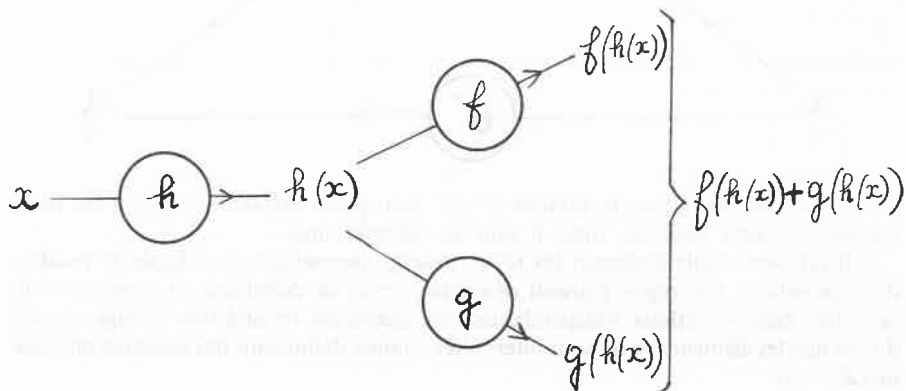
$$f(g(x)) + f(h(x)).$$

C'est aussi l'image de x par $(f \circ g + f \circ h)$. Donc,

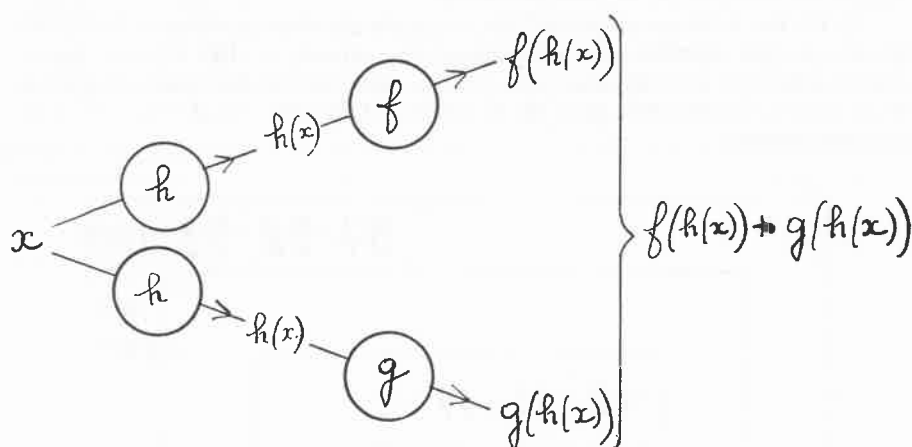
$$f \circ (g+h) = f \circ g + f \circ h.$$

Voyons ce que donne la première de ces démonstrations dans l'illustration des endomorphismes au moyen de « machines » :

— schéma de $(f+g) \circ h$:



— schéma de $f \circ h + g \circ h$:



On peut commencer par effectuer ces schémas sur des exemples numériques, constater que, dans ces exemples, les deux « montages » conduisent au même résultat, puis essayer de voir pourquoi cette propriété est générale.

3. 3. Jeux où interviennent les endomorphismes de $(\mathbb{Z}, +)$.

1) Au pays des monnaies rouges et vertes (§ 3.1.), un « banquier » effectue l'opération suivante : à chaque instant, un « cours » est fixé (le cours est un élément de $\mathbb{Z}$ noté 1^- , 2^+ , etc...); supposons par exemple que le cours soit 5^+ ; si un client donne au banquier une pièce x , le banquier lui rend 5 pièces analogues à x . Si le cours est 5^- , le banquier lui rend 5 pièces de même valeur absolue que x , mais de couleur différente :

Cours 5^+ :

$1_r \mapsto 5_r$
 $2_v \mapsto 10_v$
 $0_{rv} \mapsto 0_{rv}$

Cours 5^- :

$1_r \mapsto 5_v$
 $2_v \mapsto 10_r$
 $0_{rv} \mapsto 0_{rv}$

Cette situation est exactement la même que celle des machines du paragraphe 3.2. : peut-être que, présentée sous cette forme, elle accrochera mieux les élèves, car ici ce sont les élèves eux-mêmes qui jouent :

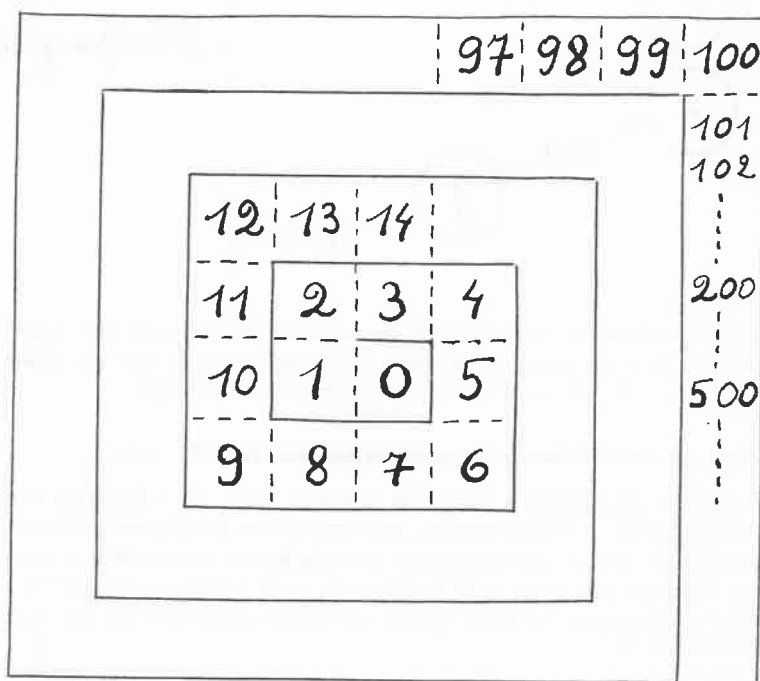
Jean joue le rôle du banquier, mais ne veut pas dévoiler le cours ; Pierre donne à Jean une pièce x , Jean lui rend une pièce y . Pierre peut-il en déduire le cours ?

Pour l'addition, on peut imaginer que deux banquiers opèrent dans une même banque et additionnent leurs résultats ; pour la multiplication, le client passe successivement dans deux banques.

Remarque. Une variante de ce jeu consiste à utiliser des pièces de monnaie dont la valeur absolue est un décimal ; le cours est toujours un entier. Les éléments de $\mathbb{Z}$ apparaissent ainsi comme définissant des homothéties dans D . Cet exemple présente

l'intérêt d'écarter tout risque de confusion entre l'ensemble des opérateurs et l'ensemble des éléments sur lesquels ils opèrent.

2) Un jeu, analogue au jeu de l'oie, comporte des cases numérotées de 0 à 100 (p. ex.) et une dernière case représentant les naturels > 100 . Chaque joueur dispose d'un pion dont les deux faces peuvent facilement se distinguer (un endroit et un envers). On joue avec deux dés de couleurs différentes : un dé blanc et un dé noir par exemple.



Si un joueur obtient 5 avec le dé blanc et 2 avec le dé noir (ou 6 avec le blanc, 3 avec le noir ; ou 4 avec le blanc, 1 avec le noir) ; il effectue l'opération (3^+) qui consiste à faire passer son pion, *sans le retourner*, de la case numérotée par le naturel n à la case numérotée par le naturel $3n$.

Si un joueur obtient (2, 5) (ou (3, 6), ou (1, 4)), il effectue l'opération (3^-) qui consiste à faire passer son pion de la case n à la case $3n$, *et à retourner ce pion*.

En somme, les éléments de $\mathbb{Z}$ opèrent ici dans l'ensemble $\mathbb{Z}' = \{ \dots (2, \text{envers}), (1, \text{envers}), 0, (1, \text{endroit}), (2, \text{endroit}), \dots \}$ de la façon suivante :

(3^+)

1, endroit $\mapsto$ 3, endroit
2, envers $\mapsto$ 6, envers
0 $\mapsto$ 0

(3^-)

1, endroit $\mapsto$ 3, envers
2, envers $\mapsto$ 6, endroit
0 $\mapsto$ 0

Au début du jeu, tous les pions sont à l'endroit dans la case 1. Le gagnant est le premier qui arrive à mettre son pion à l'endroit dans la case des nombres > 100 .

La case 0 est « la prison ». On ne peut en sortir que quand on est délivré par un autre joueur (dans ce cas, on recommence en mettant son pion à l'endroit dans la case 1).

On peut introduire la multiplication et l'addition en compliquant un peu la règle du jeu : dans certains cas, un joueur joue deux fois de suite (multiplication) ; dans d'autres cas, il joue avec deux paires de dés et additionne les résultats.

3. 4. Identification de $\mathbb{Z}^+$ à $\mathbb{N}$.

Évariste a effectué des additions et des multiplications de nombres, puis il a remplacé les nombres par des petits dessins. Il n'a pas dit si ces nombres étaient des entiers ou des naturels. Il a dit uniquement ceci :

— quand un même dessin figure plusieurs fois, il représente toujours le même nombre

— Δ et $\square$ représentent des nombres différents.

Exercice : retrouver les calculs effectués par Évariste :

a) en supposant que les dessins représentent des naturels;

b) en supposant que les dessins représentent des entiers.

$$\begin{array}{lll} \square + \square = \square & \square + \Delta = \Delta & \Delta \times \square = \square \\ \Delta \times \Delta = \Delta & \Delta + \Delta = \bigcirc & \Delta + \bigcirc = \diamond, \text{ etc...} \end{array}$$

La comparaison des résultats des questions a) et b) montre qu'il n'y a qu'une bijection de $\mathbb{N}$ sur une partie de $\mathbb{Z}$ qui soit susceptible de respecter à la fois l'addition et la multiplication.

C'est :

$$\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}^+$$

définie par $\varphi(n) = n^+$, $\varphi(0) = 0^+$.

Réciproquement, quels que soient les naturels n, m ,

$$\varphi(n+m) = \varphi(n) + \varphi(m) \text{ et } \varphi(nm) = \varphi(n) \varphi(m).$$

Dans toutes les questions où $\mathbb{Z}$ intervient par sa structure d'anneau, on pourra désormais identifier $\mathbb{Z}^+$ à $\mathbb{N}$ au moyen de la bijection φ .

L'une des deux relations d'ordre dans $\mathbb{Z}$ est maintenant privilégiée : c'est celle qui prolonge la relation d'ordre notée $\leq$ dans $\mathbb{N}$. On la notera par le même signe. Elle est définie par :

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{Z}^+$$

Les éléments de $\mathbb{Z}^+$ sont les $x \in \mathbb{Z}$ tels que $0 \leq x$. On les appelle les *entiers positifs*.

Toutes les propriétés de $\mathbb{Z}$ faisant intervenir à la fois la multiplication et l'ordre sont des conséquences de la suivante :

$\mathbb{Z}^+$ est stable pour la multiplication. On utilise souvent un corollaire de cette propriété :

$$x \leq y \text{ et } 0 \leq z \Rightarrow xz \leq yz$$

Remarque. L'identification de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{Z}^+$ justifie les notations employées pour la multiplication externe $\mathbb{N} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ et pour la multiplication interne $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$:

nx et n^+x représentent le même élément de $\mathbb{Z}$.

3. 5. Les notations usuelles.

Il ne semble pas indispensable d'introduire en Cinquième les notations usuelles (+5, -5, etc...) qui sont une source de confusion.

Le signe — de la soustraction peut toutefois être introduit (mais le plus tard possible) pour deux raisons :

a) $(x, y) \mapsto x + \text{opp } y$ est une loi de composition interne (partout définie) dans $\mathbb{Z}$. Il est naturel de représenter cette loi par un signe particulier :

$$(x, y) \mapsto x - y$$

et d'en étudier les propriétés. C'est un exemple simple de loi non commutative, non associative, admettant un élément neutre à droite et non à gauche.

b) la soustraction dans $\mathbb{Z}$ prolonge la soustraction dans $\mathbb{N}$, déjà connue des élèves. Il est naturel de la noter par le même signe.

Mais une introduction prématurée des notations -5, +5... qui ne peuvent s'expliquer que par omission du zéro (-5 signifie 0-5, +5 signifie 0+5) risque de donner aux élèves la mauvaise habitude de ne pas tenir compte du zéro, au lieu d'attirer leur attention sur l'importance des éléments neutres.

La notation $-x$, au lieu de $\text{opp } x$, présente le même danger.

4. Les démarches successives dans l'initiation à $\mathbb{Z}$ et à D .

Les remarques qui suivent valent aussi bien pour l'anneau des entiers que pour l'anneau des décimaux qui peut être introduit par des méthodes analogues aux précédentes.

On peut distinguer trois phases dans l'initiation à ces anneaux de nombres.

4. 1. Construction d'un anneau à partir de situations concrètes.

C'est la phase décrite dans le paragraphe précédent (§ 3.2 et 3.3). Pour les élèves arrivés à ce point de l'initiation un entier représente un endomorphisme (appelé — selon le jeu choisi — machine, opération bancaire, opération au jeu de l'oie).

En somme, un entier (positif ou négatif) est une étiquette servant à désigner une application d'un autre ensemble (l'ensemble des nombres rouges ou verts p. ex.) dans lui-même (2).

4. 2. Étude abstraite d'un anneau.

Dans cette seconde phase, un entier est un élément abstrait noté :

$$\dots 2^-, 1^-, 0, 1^+, 2^+ \text{ (ou } 1), 2^+ \text{ (ou } 2), \dots$$

(2) En donnant la priorité à l'aspect « opérateurs » des entiers, ne prépare-t-on pas déjà les élèves à mettre l'accent sur les applications linéaires plutôt que sur l'algèbre des matrices?

Les lois de composition et la relation d'ordre sont définies indépendamment de l'interprétation de ces éléments comme endomorphismes :

$$a^+ + b^+ = (a + b)^+ ; \text{ si } a < b, a^+ + b^- = (a - b)^+, \text{ etc...}$$

$$a^+ b^+ = a^- b^- = (ab)^+ ; \text{ etc...}$$

$$x \leq y \Rightarrow y + \text{opp } x \in \mathbb{Z}^+.$$

Des exercices ne faisant pas appel au concret permettent d'approfondir l'étude de la structure de $\mathbb{Z}$: calculs numériques, vérification de nouvelles propriétés des lois de composition (associativité généralisée, produit d'une somme par une somme, etc...), résolutions d'équations simples dans $\mathbb{Z}$.

4. 3. Application à de nouvelles situations concrètes.

Dans cette troisième phase, la structure abstraite $(\mathbb{Z}, +, \times)$ ou $(D, +, \times)$ étudiée en 4.2. servira de modèle pour la résolution de nouveaux problèmes concrets.

Dans la plupart des cas, il s'agira de multiplication externe (§ 2.1.) et le problème concret ne se traduira dans le langage des entiers (ou des décimaux) que moyennant un choix convenable des orientations (et des unités).

Le jeu mentionné au paragraphe 2.1. (jeu des jetons verts ou rouges) fournit un exemple d'utilisation de $\mathbb{Z}$. Les exercices classiques sur les espaces parcourus, les vitesses et les durées fournissent des exemples d'utilisation des décimaux.

E. D.

Chantiers de pédagogie mathématique

Cahiers pour la formation permanente

Une nouvelle publication de la Régionale Parisienne
de l'A.P.M.E.P. : voir p. 572 les conditions d'abonnement

Économies

J. COMMEAU,

Mathématiques Supérieures, Lycée Kléber, Strasbourg.

In memoriam.

Notre Collègue Joanny COMMEAU est décédé à Strasbourg le 14 septembre 1968, à la suite d'une crise cardiaque qui l'a emporté en vingt-quatre heures. La cérémonie des obsèques a eu lieu le 16 septembre, en l'église Saint-Maurice de Strasbourg, en présence d'une assistance nombreuse et recueillie de parents, d'amis et d'anciens élèves.

L'A.P.M.E.P. renouvelle l'expression de ses respectueuses condoléances à M^{me} Commeau si cruellement atteinte puisque, dans le même jour, elle a perdu son mari et sa mère, M^{me} REY, terrassée par l'émotion à l'annonce du décès de son gendre.

Né au Creusot en 1907, Joanny Commeau a eu une enfance malade ; il n'est entré qu'assez tard au lycée de Dijon, après des études techniques dans sa ville natale. Reçu à l'E.N.S. en 1929, agrégé en 1932, il commence sa carrière par de courts séjours à Cherbourg, Clermont et Dijon, avant d'être nommé, à la veille de la guerre, professeur de mathématiques supérieures au lycée de Strasbourg. De 1940 à 1945 il enseigne en Spéciales, d'abord à Mauriac — où il a suivi ses élèves alsaciens repliés — puis à Montpellier ; la rentrée de 1945 le voit reprendre possession de sa chaire du lycée Kléber qu'il ne va plus quitter.

C'est dans cette tâche de professeur de mathématiques supérieures si passionnante mais en même temps si délicate, à la charnière de deux formes d'enseignement, que Commeau a pu s'épanouir sur les plans professionnel et humain. Il excellait dans l'art d'amener ses disciples à découvrir par eux-mêmes l'origine des notions qu'il leur exposait, quitte à mettre au net, en une vigoureuse synthèse, ce qui devait rester de ses leçons ; il savait voir dans les jeunes gens qui lui étaient confiés non pas des robots plus ou moins aptes à ingurgiter des mathématiques, mais bien des adolescents en pleine mutation, conditionnés par un environnement familial et local qu'il s'efforçait de discerner par des prises de contact individuelles.

Nul plus que Commeau n'a eu le souci constant de l'amélioration permanente qui est l'honneur de notre métier. Jamais pleinement satisfait de son cours, il le remettait en cause chaque année, modifiant des chapitres entiers, et obtenant ainsi une présentation toujours neuve, toujours fraîche. Cette année il avait refondu son cours d'algèbre linéaire et c'est à cette occasion que, moins de dix jours avant sa mort, il nous envoyait, impeccablement présentée de sa belle écriture moulée et vigoureuse, la note que nous publions aujourd'hui.

Joanny Commeau était chevalier de la Légion d'Honneur ; en 1967 il avait partagé le prix Gaston Julia avec son collègue Marvillet, professeur de Spéciales au Lycée Kléber.

E. RAMIS.

Il convient de faire ici une remarque très importante pour la suite : les deux

$$\mathcal{B} \quad \mathcal{B}$$

écussons $\mathcal{A} \left[\begin{array}{c} \mathcal{B} \\ \alpha \end{array} \right]$ et $\mathcal{A} \left[\begin{array}{c} \mathcal{B} \\ \alpha' \end{array} \right]$ entraînent $\alpha = \alpha'$ si, et seulement si, $\mathcal{A}$ est un système libre.

Les graphies (1), (2), (3), (4), (5), (6) sont équivalentes ; on mesure l'économie réalisée en passant de (1) à (6).

2. Opérations linéaires.

Si $\mathcal{B}' = \{ B'_j \}$ est un autre système de q combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{A}$, les égalités :

$$\left. \begin{aligned} B_j &= \sum_{i \in P} a_{ij} A_i \text{ et } B'_j = \sum_{i \in P} a'_{ij} A_i \\ B_j + B'_j &= \sum_{i \in P} (a_{ij} + a'_{ij}) A_i \end{aligned} \right\} \forall j \in Q$$

entraînent :

On est conduit à appeler *somme* des matrices $\alpha = [a_{ij}]$ et $\alpha' = [a'_{ij}]$ (de mêmes dimensions) la matrice notée, $\alpha + \alpha'$, dont l'élément générique est $a_{ij} + a'_{ij}$.

On pourra alors écrire :

$$(7) \quad \left(\begin{array}{c} B_j \\ A_i \left[\begin{array}{c} \mathcal{B} \\ \alpha \end{array} \right] \text{ et } A_i \left[\begin{array}{c} \mathcal{B}' \\ \alpha' \end{array} \right] \end{array} \right) \Rightarrow A_i \left[\begin{array}{c} B_j + B'_j \\ \alpha + \alpha' \end{array} \right]$$

De même, si on appelle *produit* de la matrice $\alpha = [a_{ij}]$ par l'élément s du corps K , la matrice, notée $s\alpha$, dont l'élément générique est sa_{ij} , on pourra écrire :

$$(8) \quad \left(\begin{array}{c} B_j \\ A_i \left[\begin{array}{c} \mathcal{B} \\ \alpha \end{array} \right] \text{ et } s \in K \end{array} \right) \Rightarrow A_i \left[\begin{array}{c} sB_j \\ s\alpha \end{array} \right]$$

3. Multiplication.

Soit $\mathcal{C} = \{ C_k \}$, $k \in R$ un système de r combinaisons linéaires des vecteurs B_j . Les égalités :

$$C_k = \sum_{j \in Q} b_{jk} B_j \text{ et } B_j = \sum_{i \in P} a_{ij} A_i$$

entraînent (après l'intervention permise des signes Σ) :

$$C_k = \sum_{i \in P} \left(\sum_{j \in Q} a_{ij} b_{jk} \right) A_i$$

Ce qui montre que les vecteurs C_k sont aussi combinaisons linéaires des A_i avec les coefficients : $c_{ik} = a_{ij} b_{jk}$.

On est conduit à définir le *produit* de la matrice $\alpha = [a_{ij}]$ ($i \in P, j \in Q$) par la matrice $\beta = [b_{jk}]$ ($j \in Q, k \in R$) : c'est la matrice, notée $\alpha\beta$, d'élément générique :

$$c_{ik} = \sum_{j \in Q} a_{ij} b_{jk} \quad (i \in P, k \in R).$$

De cette définition. et du calcul qui précède. résulte la graphie suivante :

$$(9) \quad \left(A_i \left| \begin{array}{c} B_j \\ \alpha \end{array} \right. \text{ et } B_j \left| \begin{array}{c} C_k \\ \beta \end{array} \right. \right) \Rightarrow A_i \left| \begin{array}{c} C_k \\ \alpha\beta \end{array} \right.$$

4. Applications.

Les graphies (7). (8). (9) traduisent les trois règles élémentaires du calcul matriciel. Donnons quelques applications de (9).

1) *Toute matrice de changement de base est inversible.* Supposons que $\mathcal{E}$ soit de dimension finie n , et rapportons-le à deux bases $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$. Chacune est déterminée. dans l'autre, par sa matrice, dite *matrice de passage* de la première à la seconde. Les deux écussons :

$$\mathcal{U} \left| \begin{array}{c} \mathcal{V} \\ \varpi \end{array} \right. \text{ et } \mathcal{V} \left| \begin{array}{c} \mathcal{U} \\ \varpi' \end{array} \right.,$$

pris dans cet ordre, puis dans l'ordre inverse, conduisant aux suivants :

$$\mathcal{U} \left| \begin{array}{c} \mathcal{U} \\ \varpi\varpi' \end{array} \right. \text{ et } \mathcal{V} \left| \begin{array}{c} \mathcal{V} \\ \varpi'\varpi \end{array} \right.$$

Or, si ε est la matrice unité d'ordre n ,

$$\mathcal{U} \left| \begin{array}{c} \mathcal{U} \\ \varepsilon \end{array} \right. \text{ et } \mathcal{V} \left| \begin{array}{c} \mathcal{V} \\ \varepsilon \end{array} \right.$$

Puisque les systèmes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont libres, on a :

$$\varpi\varpi' = \varpi'\varpi = \varepsilon$$

2) *Changement de base.* Connaissant la matrice β du système $\mathcal{A}$ dans la base $\mathcal{V}$, déterminer la matrice α de ce même système dans la base $\mathcal{U}$?

Le problème est résolu immédiatement par l'application de la « formule » (9) :

$$\left(\mathcal{U} \left| \begin{array}{c} \mathcal{V} \\ \varpi \end{array} \right. \text{ et } \mathcal{V} \left| \begin{array}{c} \mathcal{A} \\ \beta \end{array} \right. \right) \Rightarrow \mathcal{U} \left| \begin{array}{c} \mathcal{A} \\ \varpi\beta \end{array} \right.$$

et, puisque le système $\mathcal{U}$ est libre, $\alpha = \varpi\beta$.

3) *Matrice d'une application linéaire.* Supposons que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ soient de dimensions finies p et q . La matrice α de l'application linéaire f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$, rapportés aux bases $\mathcal{U} = \{ U_j \}$ et $\mathcal{V} = \{ V_i \}$ est définie, par l'écusson :

$$(10) \quad V_i \left| \begin{array}{c} f(U_j) \\ [a_{ij}] \end{array} \right. = \alpha.$$

Soit $\mathfrak{X} = \{X_k\} (k \in R)$ un système de r vecteurs de $\mathfrak{E}$, déterminé par sa matrice $\xi = [x_{kj}]$ dans la base $\mathfrak{U}$. Proposons-nous de déterminer la matrice η , dans la base $\mathfrak{V}$, du système :

$$f(\mathfrak{X}) = \{f(X_k)\} (k \in R)$$

En écrivant :

$$X_k = \sum_{j \in P} x_{kj} U_j, \text{ on en déduit } f(X_k) = \sum_{j \in P} x_{kj} f(U_j)$$

Ces égalités, valables pour tout $k \in R$, se traduisent par l'écusson :

$$(11) \quad f(\mathfrak{U}_j) \left| \begin{array}{c} f(X_k) \\ \xi \end{array} \right.$$

$$\text{Or (10) et (11)} \Rightarrow V_i \left| \begin{array}{c} f(X_k) \\ \alpha \xi \end{array} \right.$$

Et, puisque $\mathfrak{V}$ est libre, $\eta = \alpha \xi$.

4) *Matrice du produit de deux applications linéaires.* $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ sont de dimensions finies p, q, r , et rapportés aux bases $\mathfrak{U} = \{U_i\}$, $\mathfrak{V} = \{V_j\}$, $\mathfrak{W} = \{W_k\}$. f et g sont deux applications linéaires de $\mathfrak{E}$ dans $\mathfrak{F}$ et de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{G}$, déterminées par leurs matrices α et β . Quelle est la matrice de $g \circ f = h$?

Il s'agit de déterminer la matrice du système $\{h(U_i)\}$ dans la base $\mathfrak{W}$. Or, en posant : $\alpha = [a_{ij}]$, on a :

$$f(U_i) = \sum_{j \in Q} a_{ji} V_j$$

Il en résulte que :

$$g(fU_i) = h(U_i) = \sum_{j \in Q} a_{ji} g(V_j)$$

Ces égalités ont lieu pour tout $i \in P$, ce qui se traduit par l'écusson :

$$(12) \quad g(V_j) \left| \begin{array}{c} h(U_i) \\ \alpha \end{array} \right.$$

Or, par définition de β :

$$(13) \quad W_k \left| \begin{array}{c} g(V_j) \\ \beta \end{array} \right.$$

$$\text{Et :} \quad (13) \text{ et } (12) \Rightarrow W_k \left| \begin{array}{c} h(U_i) \\ \beta \alpha \end{array} \right.$$

Puisque $\mathfrak{W}$ est un système libre, $\beta \alpha$ est la matrice de $h = g \circ f$.

On remarquera que les problèmes posés dans ce paragraphe ont été résolus sans qu'il ait été nécessaire de reprendre, sous une forme plus ou moins déguisée, les calculs du paragraphe 3.

J. C.

NOUVEAUTÉ RENTRÉE 68

Statistiques

Classe de 1^{re} D

par **M. POUSSE**

Professeur au Lycée de Strasbourg-Neudorf.

Cet ouvrage est conforme au programme d'initiation à la Statistique prévu en classe de 1^{re} D : description d'une série statistique et étude de ses paramètres; notions d'ajustement linéaire et de corrélation linéaire et analyse sommaire des séries chronologiques. Il est rédigé dans l'esprit de la section D, orientée vers les sciences physico-chimiques et les sciences de la nature.

Un volume. 11 F

Collection **CAGNAC** et **THIBERGE**

Analyse, Cinématique

Classes terminales C, D, E

par **J. COMMEAU**

Professeur de Mathématiques Supérieures du Lycée Kléber, à Strasbourg.

Ce manuel d'analyse conforme au dernier programme des classes terminales expose les diverses questions au programme des Sections C, D et E prévu par l'arrêté du 8 août 1966.

Principales divisions :

1. fonctions - limites - dérivées. 2. primitives - fonction logarithme et fonction exponentielle. 3. applications théoriques et pratiques. 4. éléments de cinématique.

Nombreux exercices et problèmes.

Un volume 26,40 F

classiques masson et cie

120, BOULEVARD SAINT-GERMAIN — PARIS - 6^e

— 513 —

MATHÉMATIQUES

" L'HEURE DE MATHÉMATIQUE EN CLASSE
TERMINALE LITTÉRAIRE "

Une nouveauté **FERNAND NATHAN**

par Madame **C. DURANT**, professeur au Lycée d'Alençon

Monsieur **G. PITEL**, professeur à l'E.N. de Coutances

Monsieur **C. TOUYAROT**, professeur de Philosophie à l'E.N. de Caen

Il est apparu indispensable d'associer un philosophe, spécialiste de la philosophie des Sciences, à la rédaction de ce volume, dans lequel on trouvera, en fin de chaque chapitre, des textes significatifs « à faire lire et commenter » comme le préconisent les Instructions officielles.

MATHÉMATIQUES CLASSE de 3^e

Collection

M. QUEYSANNE, A. REVUZ



Ce manuel de 3^e est la suite naturelle de celui de 4^e. Couronnement de la série du 1^{er} cycle, il débute par un chapitre de mise au point des notions modernes acquises précédemment. Le vocabulaire ainsi précisé et légèrement étendu est ensuite utilisé pour l'exposé des matières du programme : nombres, polynômes, équations, fonction linéaire et affine, géométrie. La notion de vecteur permet d'initier les élèves à l'aide d'exemples concrets et d'exemples mathématiques à l'une des notions les plus fécondes des mathématiques, celle d'espace vectoriel. De nombreux exercices illustrent toutes les matières exposées.

Volume plastifié, format 15,5 × 22.

Livre du Professeur
(en préparation)

FERNAND NATHAN

« ... un livre n'est rien qu'un petit tas de
feuilles sèches, ou alors une grande forme
en mouvement : la lecture. »

J.-P. Sartre.

Les miettes du festin

Le convive : Jean ITARD.

Bourbaki écrit, p. 183 des *Éléments d'Histoire des mathématiques*, 1960 :

« C'est dans les lettres et papiers privés des savants [du XVII^e siècle], autant ou même plus que dans leurs publications proprement dites, que l'historien a à chercher ses documents. Mais, tandis que ceux d'Huygens par exemple nous ont été conservés et ont fait l'objet d'une publication exemplaire, ceux de Leibniz n'ont été publiés encore que d'une manière défectueuse et fragmentaire, ceux de Newton ne l'ont point été du tout, et beaucoup d'autres sont perdus sans remède ».

Ces remarques pessimistes — écrites d'ailleurs bien avant 1960 — doivent être aujourd'hui corrigées, tout au moins en ce qui concerne Newton.

La Royal Society a entrepris en effet la publication de sa correspondance. Elle comprendra au total sept volumes dont quatre ont paru à ce jour. Comme il se devait, ce sont les *Cambridge University Press* qui s'occupent de l'édition placée sous l'autorité incontestable en la matière de H. W. Turnbull et de J. F. Scott. La correspondance ainsi publiée s'étend pour le moment de 1661 à 1709.

Newton est un savant universel, mais surtout un opticien, un mécanicien et un astronome. Les sujets traités dans sa correspondance sont donc très variés et dépassent d'ailleurs largement le domaine scientifique. Il fut en effet Maître de la Monnaie, et en tant que tel, fonctionnaire dévoué jusqu'au scrupule et cet aspect de sa personnalité se montre en bien des endroits.

Les professeurs de mathématiques seront donc probablement beaucoup plus intéressés par la publication des « *Mathematical Papers of Isaac Newton* ». Elle paraît encore aux *Cambridge University Press* et elle est effectuée par D. T. Whiteside, professeur d'Histoire des Sciences à Cambridge. Il est assisté par M. A. Hoskin. Deux volumes sont parus. Le premier contient les essais, brouillons, notes de lecture, allant de 1664 à 1666. C'est un ouvrage qui, avec les introductions et annotations des éditeurs, contient plus de six cents pages. Il est sorti des Presses en 1967.

Le second volume est un peu moins volumineux. Il comprend les années 1667 à 1670. C'est, pour Newton, une époque d'intense activité en optique. Les mathématiques pures s'en ressentent évidemment un peu. Le volume vient de paraître en

1968. La collection comprendra au total huit tomes. Les historiens des mathématiques auront alors une source d'informations des plus précieuses.

Newton, né le 25 décembre 1642, était entré à Cambridge en 1661, alors que les idées de Descartes s'introduisaient dans la vieille université et y amenaient quelques bouleversements. La tradition veut qu'il y ait trouvé en la personne d'Isaac Barrow un maître attentif qui l'initia aux mathématiques d'avant-garde. Il n'en est rien, ou du moins cela est-il fort exagéré.

Il est évidemment très difficile de dater avec précision les premiers essais d'un étudiant mais les plus anciens écrits rassemblés paraissent remonter à 1664. Ce sont, rédigées en anglais, des notes de lecture provenant d'Oughtred, de Schooten, de Viète ou de Wallis.

Newton ne lit pas Viète dans les écrits originaux mais dans l'édition de Schooten, parue en 1646. Les notations y sont celles de Descartes, à savoir, en gros, les nôtres. De même il lit la géométrie de Descartes dans la traduction latine de Schooten, et plutôt dans la seconde édition de 1659-1660, enrichie de nombreux commentaires et de traités écrits par les disciples hollandais du traducteur, que dans la première édition de 1649.

Si donc Newton, dans ses premiers pas en mathématiques supérieures, a eu un maître, ce n'est pas Barrow, mais plutôt le défunt Schooten dont il dévore en autodidacte les divers ouvrages. Et c'est ici que l'on se rend compte de l'importance de la fonction enseignante. Certes Frans van Schooten (1616-1660) n'est pas un mathématicien de premier ordre. Mais c'est un bon mathématicien, et un professeur, qui a eu au moins deux chances dans sa vie. La première c'est d'avoir eu un père mathématicien Frans van Schooten (1581-1646), chance qu'il partage avec Blaise Pascal et Alexis Claude Clairaut. La seconde, c'est d'avoir connu Descartes et d'avoir été un de ses disciples préférés. Il s'est montré digne de ces deux chances extraordinaires. Ses disciples hollandais, première école mathématique cartésienne, et singulièrement Huygens, ont poursuivi son œuvre. Et nous voyons maintenant qu'il peut revendiquer un autre disciple de taille, Newton.

Évidemment, ni Huygens, ni Newton ne sont de bons petits élèves bien sages. Ils apportent autant et plus qu'ils ne reçoivent, mais ils doivent tous deux beaucoup à Schooten parce qu'il leur a transmis ce qu'il y avait de meilleur, ce qu'il y avait de neuf, ce qu'il y avait d'explosif dans la mathématique du siècle.

Aussi respectable que soit Isaac Barrow, Newton lui doit beaucoup moins. Né à Londres en 1630, décédé en 1677, royaliste convaincu, il entre à Trinity College en 1643, est Bachelier ès Arts en 1648, est élu fellow en 1649 et passe la maîtrise en 1652. Mais, sous Cromwell, toutes les portes lui sont fermées. Il voyage quatre années en Europe, allant jusqu'à Constantinople. Rentré en 1660, à la Restauration, il obtient la chaire de Grec qu'il convoitait et prend les ordres sacrés. Il enseigne de plus les mathématiques au Gresham College de Londres. Mais, comme Wallis à Oxford, il est en mathématiques un autodidacte. En 1663 une chaire de mathématiques, la Lucasian Chair, est créée à Cambridge. Il en sera le premier titulaire. Il avait publié en 1654 un résumé des *Éléments* d'Euclide. C'est dans ce texte latin abrégé que Newton lira le *Géomètre* grec. Mais ce n'est pas cela qui pourra l'initier aux mathématiques d'avant-garde. Ni les *Lectiones Mathematicae* que Barrow enseigna de 1664 à 1666. Ces leçons sont intéressantes certes, érudites, subtiles. Mais elles portent — d'une façon assez scolastique — sur la mathématique traditionnelle, principalement la mathématique grecque. Il n'y a pas, dans cette cuisine savante sur de vieilles recettes, de quoi satisfaire un appétit de jeune loup. Quant aux *Lectiones geometricae*,

où l'on veut parfois trouver pour Newton l'inspiration, l'illumination, il suffit de constater que ce dernier suggéra à l'auteur certaines modifications comme la suivante. Barrow, dans le problème des tangentes, suivant la marche inspirée par Fermat, donne aux coordonnées des accroissements infiniment petits. L'abscisse étant p et l'ordonnée m les accroissements sont respectivement e et a . Eh bien, cette notation, où l'on veut voir un apport de Barrow, et une source pour Newton, a été en réalité inspirée par le second au premier.

Il y a donc, entre les deux universitaires, collaboration certes, mais non pas relation de bon élève obéissant à maître incontesté.

Quoi qu'il en soit cela est assez secondaire. Il suffit de savoir que, dans les premières années du séjour de Newton à Cambridge, il n'y avait pas d'enseignement organisé des mathématiques tant soit peu modernes et que chacun devait être plus ou moins autodidacte. Cela d'ailleurs est de tous les temps, et aujourd'hui encore, si l'étudiant veut se cultiver il faut impérieusement que, seul ou en groupe, il paie de sa personne. La science ne se reçoit pas, elle se conquiert.

Notons encore que l'érudition du jeune Newton est faible, qu'il n'est guère au courant de ce qui se fait autour de lui, et qu'il pense en anglais. Ce n'est guère que lorsqu'il est élu fellow, et que les fonctions d'enseignement vont lui être accessibles, qu'il se met à rédiger en latin, avec parfois quelques retours brefs à des expressions anglaises. Cela est d'autant plus remarquable que ses premières notes, rédigées en anglais, sont prises sur des ouvrages tous écrits en latin. Moralité : bien connaître d'abord sa langue maternelle, le reste sera donné par surcroît.

Ces quelques remarques ne prétendent nullement résoudre tous les mystères de la formation d'un homme de la dimension de Newton. Ce ne sont que quelques miettes d'un festin. Si vous voulez en savoir davantage, il vous faudra lire les « Mathematical Papers ». Mais pour bien les goûter, il faut me semble-t-il être au courant de la mathématique du XVII^e siècle, et singulièrement de l'école cartésienne. Nul n'est prophète en son pays, et l'école de Descartes se situe d'abord en Hollande. Cependant Newton fait mentir le proverbe et ses disciples seront anglais. Curieusement, c'est avec l'arme mathématique forgée par le philosophe français qu'il renversera sa physique et que le Newtonisme entrera victorieux à Paris vers 1740.

Mais arrêtons ici ces remarques. Je ne me propose dans ces réflexions à bâtons rompus, que de vous faire part de quelques-unes de mes lectures.

Albert Blanchard vient de procéder à un nouveau tirage des « Œuvres Mathématiques de Riemann » traduites en français par L. Laugel. On ne les trouvait pratiquement plus en librairie. Laugel les dédie « à Monsieur Charles Hermite, membre de l'Institut, à l'occasion de son 73^e anniversaire (25 décembre 1822-1897) ».

Tout le monde n'est pas Newton, ni Hermite. Mais il est encore bien difficile d'être Laugel, traducteur d'Hilbert, de Félix Klein ou de Riemann. Vivent les bons ouvriers qui savent accomplir une tâche utile.

La traduction, faite dans l'ensemble par Laugel, mais aussi par Houël pour « les Hypothèses qui servent de fondement à la Géométrie » ou par Stouff pour « La propagation des ondes planes », n'est pas intégrale. Quatorze mémoires donnés dans la seconde édition allemande, 1892, ont été omis. A plus forte raison ne contient-elle pas ceux qui sont parus en 1902 dans un supplément. Mais pour pénétrer la pensée de Riemann, ce n'est déjà pas mal.

Les amoureux de Géométrie, il doit bien en rester, et je leur souhaite longue vie et nombreuse descendance, pourront s'intéresser aux « Hypocycloïdes et Épicycloïdes » par J. Lemaire dont Albert Blanchard nous donne encore un nouveau tirage.

Ils trouveront chez le même éditeur, les « Recherches de Géométrie contemporaine », tome premier, par T. Lemoyne. J'ai lu avec intérêt cet ouvrage d'un disciple enthousiaste de Michel Chasles. J'y ai trouvé beaucoup de belles choses mais pas trace d'un beau théorème d'un émule du grand géomètre. A la vérité je ne retrouve nulle part, de nos jours, cette élégante proposition. Peut-être n'ai-je pas assez fouiné. La voici donc. Étant donné un triangle abaissons d'un point du plan les perpendiculaires sur ses trois côtés. Le cercle passant par les trois pieds sera dit le cercle podaire du point relativement au triangle. Cela étant, les cercles podaires d'un point fixe d'une conique relativement à tous les triangles inscrits dans la courbe concourent en un même point.

Vous trouverez la démonstration par l'inventeur Étienne Bobillier, dans les « Annales de Gergonne », t. 19, p. 349-359, Mémoire sur l'hyperbole équilatère. Le mémoire est daté du 11 novembre 1828. La meilleure étude sur l'œuvre mathématique de Bobillier reste celle de Michel Chasles, Rapport sur les Progrès de la Géométrie, 1870. Les deux hommes, Poncelet, Kummer et Steiner ont traité à la même époque, dans les Annales, des sujets analogues et les mathématiques modernes leur doivent à tous beaucoup, aussi éloignées qu'elles puissent paraître de la géométrie pure.

Mais si Chasles connaît bien l'œuvre de Bobillier, il ignore à peu près tout de sa vie. J'ai écrit sur lui une notice pour la biographie scientifique en langue anglaise en cours de parution à New York. Les éditeurs ne verront aucun inconvénient à ce que je signale ici qu'Étienne Bobillier est né à Lons-le-Saunier, le 17 avril 1798 et a perdu son père à l'âge de sept ans, qu'il a préparé seul — encore un autodidacte — l'École Polytechnique où il fut reçu en 1817, que pressé par des difficultés pécuniaires il quitta l'École dès octobre 1818 pour être professeur de mathématiques à l'École des Arts et Métiers de Châlons où il fit toute sa carrière sauf un bref et malheureux séjour à celle d'Angers, de 1830 à 1832, qu'il cumula ces fonctions avec celles de professeur de mathématiques spéciales au Collège Royal de Châlons et qu'il mourut le 22 mars 1840 et non pas en 1832 comme l'affirme Chasles.

Je me devais de rendre cet hommage à la mémoire d'un collègue qui honore notre corporation.

Il y a eu cinquante ans, que, le 6 janvier 1918, mourut à Halle Georg Can'or, le grand mathématicien dont la vie fut un martyre et qui, quoiqu'en pensent les sots, aura toujours raison. La traduction française d'un de ses principaux mémoires par notre regretté collègue Francisque Marotte (1873-1947) devient introuvable. Mais on lira avec plaisir et profit, la « Philosophie mathématique » de Jean Cavaillès, Paris, Hermann, qui lui est entièrement consacrée.

Le convive :
Jean ITARD.

Matériaux pour l'histoire des nombres complexes

par Jean ITARD.

Une brochure de 32 pages, à paraître en janvier 1969.

Envoi franco contre virement de 3 F au compte de l'APM ou 3 F en timbres : conformez-vous aux recommandations rappelées p. 420.

Pour la rénovation de l'enseignement élémentaire.

NUFFIELD FOUNDATION, London. — *I do and I understand* (Je fais et je comprends) : 1^{er} livret : mathematics begins; 2^e livret : pictural representation; 3^e livret : beginnings; 1^{er} guide : computation and structure; 2^e guide : shape and size. — London, Chambers and Murray, 1967, — 18 cm, pl., fig. (Nuffield mathematics project).

L'évolution accélérée de notre civilisation donne à l'enseignement des mathématiques au niveau primaire une importance croissante. Alors qu'en France, une méconnaissance due peut-être à une présentation trop affinée de la mathématique actuelle a longtemps paralysé toute évolution, à l'étranger, de nombreux mathématiciens et psychologues ont compris l'intérêt purement éducatif des concepts nouveaux. Toute une pédagogie est donc repensée à la lumière, d'une part, de ces concepts, d'autre part, des recherches effectuées en psychologie au cours des dernières décades. C'est ainsi qu'en Grande-Bretagne une équipe de professeurs publie au sein de la fondation Nuffield, une série de livrets destinés aux maîtres de l'enseignement primaire. Ces livrets font partie du Plan Nuffield et concernent l'éducation mathématique des enfants de cinq à treize ans et par la même occasion celle des maîtres.

En exergue du premier livret un proverbe chinois, arme à plusieurs tranchants, donne le ton : « J'entends et j'oublie, je vois et me souviens, j'agis et je comprends. » Mais quelques extraits de l'introduction générale résument l'ensemble des ouvrages et les intentions des auteurs :

« ... Ces livres ne contiennent pas un nouveau programme. L'accent est mis beaucoup plus sur la façon d'enseigner que sur ce qu'il faut apprendre...

« Tout au long, l'idée centrale est que l'enfant doit rester libre de faire lui-même ses propres découvertes, libre d'avoir lui-même son opinion — gage certain d'une meilleure compréhension au lieu d'apprendre et répéter de mystérieuses recettes... ».

L'enfant ne peut aller d'emblée, droit vers l'abstraction : il a besoin de manipuler les objets...

Trois catégories de livres sont prévues : les guides du maître, les guides particuliers (Weaving guides!), les guides contrôle. 1^o Les guides du maître concernent trois domaines principaux : Calcul numérique et structure — Forme et taille — Graphes conduisant à l'algèbre. Dans ces guides, on envisage en spirale le développement des mathématiques. Le même concept est rencontré et présenté de différentes manières à différents niveaux. Les contenus ne s'étalent pas sur une année ou sur une période déterminée ; les guides développent simplement des thèmes et montrent aux maîtres comment permettre à un enfant de progresser à une allure différente de celle d'un autre. Ils contiennent des suggestions directes d'enseignement, des exemples sur des sujets apparemment non-mathématiques et des situations qui peuvent être utilisés pour développer la pensée mathématique, des exemples de travaux d'enfants, des suggestions de thèmes de discussions en classe et d'activités extra-scolaires. 2^o Chaque « Weaving guide » ne concerne qu'un seul sujet en détaillant informations et conseils. 3^o La troisième catégorie fournira des moyens de contrôle des progrès accomplis par l'enfant... Ces tests doivent être préparés par une équipe de l'Institut des sciences de l'éducation de Genève sous l'autorité du Professeur Piaget ».

Mais une telle conception de l'enseignement — laisser l'enfant libre de penser, d'agir, dans un domaine où traditionnellement il est dirigé pas à pas dans une voie unique et conditionné par des automatismes plus ou moins rationnels — ne va pas sans introduire des problèmes d'ordre général.

Le premier livret « I do and I understand » qui n'appartient à aucune des trois

catégories précédentes soulève ces problèmes et présente des solutions. Voici quelques titres de chapitres et paragraphes :

Pourquoi faire des mathématiques. — La contribution de Piaget. — La signification du langage; les discussions en classe; l'exploitation du milieu; problèmes d'organisation à l'école (temps utilisables, personnels); problèmes d'organisation en classe (la journée souple, comment débiter, écoles rurales et urbaines, groupement des élèves; mobilier, équipement; information (livres, fiches, notes)); l'évaluation des progrès. Enfin, deux maîtres exposent leurs débuts dans cette voie.

Le titre de ce livret dédié à Piaget pourrait laisser croire qu'il ne s'agit là que d'un renouveau des méthodes actives, méthodes que les contraintes matérielles, chez nous, ont trop souvent réduites à l'état de vœux pieux. Ce seul objet suffirait déjà à mériter attention. En effet de nombreuses suggestions sont faites : par exemple deux plans comparés, celui d'une salle et sa disposition traditionnelle et celui de la même salle aménagée avec l'équipement nécessaire à un enseignement vivant de mathématique vivante. Mais il y a plus : c'est une réflexion profonde sur les contenus, les mobiles de cet enseignement, les attitudes des enfants et leur évolution en fonction des méthodes, des moyens d'expression. Le résultat en est une conception extrêmement libérale des programmes et emplois du temps en particulier. Le programme n'introduit pas, bribe par bribe, des sujets additionnels dont la prolifération conduit aux allègements! Il repose essentiellement sur des processus d'apprentissage beaucoup plus que sur des classifications et diversification de sujets. « La souplesse est le mot clé. » En d'autres termes, le programme, tel que nous le concevons en France — liste exhaustive de sujets précis à traiter dans un temps déterminé, l'année, quitte à les laisser ensuite tomber dans l'oubli — n'existe plus.

Toutes ces idées générales sont développées clairement, sobrement en 62 pages. Mais pour bien comprendre la conception d'un tel enseignement des mathématiques — on devrait dire d'une éducation — il est indispensable de lire les guides suivants.

Cinq livrets sont actuellement parus dans la série « Guides du maître » un premier tryptique concerne une approche générale et contient trois guides :

« Mathematics begins », « Pictural representation », « Beginnings ».

Le second triptyque concerne les trois thèmes fondamentaux annoncés dans l'introduction. Deux guides seulement sur les trois sont actuellement publiés. Ce sont : « Computation and structure », « Shape and Size ».

1^o « Mathematics begins » (61 pages) concerne les toutes premières années scolaires de l'enfant et l'évolution de ses expériences vers une pensée mathématique. Mais ce guide est aussi un commencement en un autre sens : il introduit quelques-unes des idées de base par lesquelles débiter les mathématiques. Les chapitres en sont : expériences pré-scolaires — relation — premières expériences de classification et leurs développements — correspondances un à un (bijection) et invariance du nombre — ordre et inclusion — vers le nombre — opérations et emploi de symboles — au-delà (ce dernier chapitre résume les notions abordées — ensembles, relations, partitions d'un ensemble, bijection — et aborde brièvement deux nouveaux thèmes — applications et relations d'équivalence). On trouve dans cet ouvrage des exemples et méthodes pouvant paraître assez banals à ceux qui suivent l'évolution actuelle. Mais l'originalité réside en une prise de conscience permanente des notions fondamentales pour la formation de l'intelligence. Ceci entraîne des choix parmi ces notions et les moyens d'expression. Ainsi les notions de partition et relation sont bien dégagées. Il en est de même pour celle d'opérateurs numériques, représentés par des flèches et notés, par exemple, « add5 » afin de les distinguer soigneusement des symboles représentant une somme, par exemple « $3 + 5$ ». En outre, l'emploi de tableaux caractéristiques, genre cartes perforées, parallèlement aux diagrammes de Venn, pour déterminer les ensembles évite le conditionnement à un seul type d'expression. On peut seulement regretter parfois quelques précipitations, par exemple, une présentation un peu sommaire et trop verbale des relations d'équivalence

dans le dernier chapitre. Mais un tel reproche n'a guère de sens à propos d'une méthode où chaque concept est repris à des niveaux différents dans d'autres livrets, aussi bien pour le maître que pour l'élève.

2° « Pictural representations » est un guide très bref de 40 pages consacré à l'emploi des graphiques comme moyen d'expression. « Les graphiques ne sont pas introduits pour le seul but de dessiner ou d'être à la mode. Ils sont un moyen essentiel d'information. » Notons les chapitres suivants : quelles mathématiques apparaissent dans un graphique — stades de développement — soins à apporter — vocabulaire. Dans ce guide, outre des travaux d'enfants de six à onze ans, sont présentées une foule de suggestions et remarques. Ainsi en deux pages, 48 exemples de fonctions sont suggérés pour des enfants de neuf à onze ans, 27 exemples pour ceux de six à neuf ans. Les auteurs distinguent des stades de développement dans l'emploi des moyens d'expression et soulignent entre autres l'idée suivante : « Collectionner des objets de toutes sortes doit être une activité constante et c'est la variété de ces collections qui permettra d'élargir le champ d'expérience de l'enfant quel que soit le stade où il se trouve ». Notons encore cette remarque : « Chaque fois qu'un travail graphique est en cours, il faut s'attendre à des questions qui pourraient orienter différemment la discussion. C'est une bonne chose pour le maître comme pour les élèves d'accepter ces digressions avant de revenir à l'idée initiale ». Là encore, on retrouve cette ouverture d'esprit qui fait qu'un problème, une discussion sont toujours ouverts.

3° « Beginnings » troisième volet du premier triptyque est un guide de 100 pages parallèle à « Mathematics begins ». Alors que ce dernier développe l'idée de nombre au travers des relations « Beginnings » présente cette idée dans le contexte des mesures provenant du milieu : volumes, capacités, etc.. Dans ce guide les auteurs établissent un diagramme montrant les relations entre toutes les activités possibles dont voici l'essentiel : expériences et langage pré-scolaire ; les deux aspects des activités scolaires : 1) aspect créatif (jeux de sable, d'eau, de constructions, art et broderie, musique, mouvement) ; 2) aspect imitatif (achats, cuisine, activités au sein de la famille) — développement du langage et des expériences débouchant sur les volumes, aires, poids, longueurs, formes, nombres, durées et les relations.

« Le message est simple : les enfants apprennent par l'expérience et la découverte. Il serait désastreux d'imposer un programme... Que parents et maîtres en soient conscients ou non, les expériences qui conduisent à la formation des concepts ont lieu très tôt aussi bien à la maison qu'à l'école. Ce guide contient des suggestions montrant quand et comment ces expériences ont pu se réaliser et comment tenter, à partir de là, une approche des concepts. » La majeure partie de ce guide est ainsi consacrée à comparer, classer et discuter afin de découvrir les relations. Le travail décrit n'est pas matière à mémorisation ou activités purement numériques : il est essentiellement l'aptitude à percevoir ces relations. Notons encore la présentation d'activités auxquelles ne s'intéresse guère jusqu'alors l'enseignement traditionnel du « calcul » par exemple des dessins de tricots, des rythmes en musique, utilisation d'échelles, etc.,

4° Mais il est impossible de suggérer en quelques lignes, la foule d'idées contenues dans ces ouvrages. En bref, le premier livret du deuxième diptyque « Computation and structure » (103 pages) reprend les thèmes numériques, mais à un niveau moins naïf. Outre des numérations et mesures à l'aide d'unités les plus variées, on y trouve par exemple des carrés magiques, équations et inéquations, tables d'addition modulo 2, etc. Le second livret « Shape and Size » (101 pages) est consacré à diverses approches de l'espace et diverses descriptions conçues à partir d'expériences suggérant les idées de transformations (relations particulières) et de propriétés invariantes, soulignant ainsi l'unité des mathématiques actuelles. Enfin un « Weaving guide » de quelques pages concerne l'emploi de machines à calculer (« weaving » car il s'agit de tisser des idées fondamentales autour d'un sujet particulier).

Ces guides, extrêmement bien présentés, ne peuvent être lus séparément sans risque de déformer les intentions des auteurs. Ceux-ci, d'ailleurs, toujours très attachés au respect de la pensée individuelle, vis-à-vis des enfants autant que des maîtres, n'ont pas voulu imposer un point de vue et s'ils ont appelé « guides » ces livrets ils s'empressent d'ajouter « Bien que ces guides soient la partie vitale du Plan Nuffield, ils ne sauraient être regardés comme la seule manière correcte d'enseignement. Nous pensons fermement que le développement de ce travail aura plus d'importance que les guides eux-mêmes... L'emploi de ces guides peut paraître difficile à un maître isolé s'il n'a pas les encouragements, les confirmations issus d'une discussion avec d'autres collègues. De tels centres de discussion existent déjà en Grande-Bretagne et nous espérons que de nombreux autres se créeront.. »

Ainsi ce plan Nuffield a un double but : il présente d'une part, au sujet des enfants, une pédagogie qui, si elle n'est pas nouvelle sur certains points, l'est certainement par sa conception globale des contenus. Mais d'autre part, ce plan est un moyen d'informer les maîtres sur un contenu dont le moins qu'on puisse dire est qu'il fait exploser le cadre traditionnel du « calcul ». C'est pourquoi, il semble urgent, en France, que de nombreux maîtres et responsables de l'Éducation nationale prennent connaissance de ce projet qui gagnerait à être commun à bien des pays, ne serait-ce que pour être amélioré.

Marcel DUMONT.

N.D.L.R. — L'article précédent a paru dans le n° 4 (juillet-août-septembre 1968) de la *Revue Française de Pédagogie*. Nous remercions notre Collègue Dumont et la Rédaction de la *Revue* de nous avoir autorisés à reproduire cet important compte rendu.

Calcul infinitésimal.

Jean DIEUDONNÉ, *Calcul infinitésimal*.

20 × 14, 480 pages, Collection « Méthodes », Hermann, 1968, 42 F.

Voici un remarquable ouvrage de l'Académicien J. Dieudonné. Les toutes dernières méthodes de l'Analyse Moderne sont mises ici à la portée des étudiants de MP2. Il est bien évident que les étudiants des années ultérieures et aussi les professeurs en feront leur profit !

Le concept fondamental de l'Analyse est dégagé avec précision : il s'agit de « majorer, minorer, approcher ». Toute la construction de l'ouvrage est basée sur ce principe et se développe harmonieusement : approximations des racines d'une équation, développements asymptotiques, intégrales, approximations uniformes, fonctions analytiques, théorie de Cauchy, équations différentielles.

Comme à son habitude, cet auteur enchante par son art de présenter chaque question en partant des prémices simples et essentielles ; citons par exemple l'exposé sur la convolée d'une fonction : à l'aide d'exemples élémentaires, cette méthode d'approximation uniforme apparaît clairement, dépouillée de ces nombreux accessoires qui, chez d'autres auteurs, obscurcissent la question.

À la fin de chaque chapitre, des exercices précieux sont donnés, qui enrichissent les points de vue déjà exposés.

Cette contribution remarquable d'un grand savant à la pédagogie de la Mathématique sera vivement appréciée des étudiants, des professeurs et des chercheurs.

A. DONEDDU.

Les nouvelles mathématiques en classe de Sixième (1).

Afin d'assurer la continuité de l'enseignement des mathématiques, dans son orientation actuelle, les nouveaux programmes de Sixième comportent désormais une théorie naïve des ensembles.

Il est à notre avis quatre modes d'interprétations qu'il faudrait éviter :

- La méthode axiomatique (2);
- Une acquisition stérile de vocabulaire sans domaines d'application;
- Des séparations étanches entre les diverses parties (ensembles, numération, géométrie, mesure...) (3);
- Un point de vue « très » logique plaçant toutes les questions sur le même plan de rigueur.

Si à ce stade, les esprits sont neufs, disponibles, prêts à recevoir et assimiler du vocabulaire, à savoir même de nouvelles méthodes de pensée ; il n'en reste pas moins qu'il faudra veiller, par simple respect de l'esprit de l'enfant, à aller du cas particulier au cas général. C'est-à-dire adopter le sens inverse de la démarche axiomatique, soit encore une illustration abondante de la notion à enseigner avant même de prononcer le mot clé-définition, quitte à dégager des particularités, le lien commun, d'en tirer l'essence : la définition qui englobe tous les cas traités et possibles.

Traiter la « théorie » des ensembles en quelques leçons, en faire une simple question de vocabulaire, revient à penser encore que la culture consiste à tout apprendre et tout oublier ! C'est pourquoi les enfants se demandent à quoi peut bien servir cette notion, et la considèrent comme un ajout insolite au programme.

Établir des séparations étanches entre la numération, la mesure et la géométrie, c'est se condamner l'accès à un champ d'applications immense et oublier que la géométrie, la mesure et la numération permettent en même temps d'illustrer, de compléter la théorie et d'inculquer en passant les anciens points du programme tels que le système métrique.

Enfin, étant parvenu à lancer le cours sur des définitions solides et rigoureuses et continuer tout le long de l'année sur le même ton en s'attaquant à des problèmes comme celui de la définition de l'ensemble des entiers ou par exemple en géométrie la notion des angles, dépasse nettement à notre avis le cadre de cette réforme tout en anticipant lourdement sur les programmes de Cinquième.

Le livre du groupe E. Galion (4) évite très habilement les quatre abus précités. Il apporte de plus une remarquable continuité dans le déroulement des leçons. La grammaire qu'il nous propose est de celles qui une fois la notion d'ensemble précisé, étudie la paire et le couple, par suite le produit cartésien pour introduire la relation binaire, l'application comme cas particulier d'une relation binaire, la bijection et enfin l'étude du groupe des bijections d'un ensemble comme premier exemple d'une loi de composition binaire. Sa numération montre bien le rôle des bases dans l'étude des entiers, en exerçant les esprits aux problèmes de passage de la base décimale à la base binaire ou même duodécimale. Sa mesure comporte une esquisse de l'étude d'une mesure complètement additive et ouvre ainsi la voie à une méthode axiomatique dans les classes à venir pour toutes les questions de longueur, de surface et de volume.

Nous pensons donc qu'il pourra apporter une aide considérable aux maîtres de bonne volonté, soucieux de traiter scrupuleusement le nouveau programme, tout en désirant faire de cette réforme une expérience pédagogique précise, vivante, nuancée et efficace.

A. CHEVALIER.
J. CHACRON.

(1) *Bulletin de l'A.P.E.M.P.*, n° 263-264, p. 361.

(2) *idem.* (1^o Relations, 1^{er} ligne).

(3) *idem.* (2^e paragraphe).

(4) *Mathématiques sixième* (O.C.D.L.). Diffusion Hatier, 65, rue Claude-Bernard, Paris-5^e.

Textes à relire

Le charabia des mathématiques modernes.

La *Revue de l'Enseignement Philosophique*, éditée par nos Collègues de l'Association des Professeurs de Philosophie, dans son numéro d'avril-mai 1967, donnait une intéressante étude de Lenis Blanche sur « L'emploi des modèles en psychologie ». Prenant le problème dans son ensemble, l'auteur considérait l'emploi du modèle en cosmologie, y puisant des exemples pour l'essentiel de son sujet. Ainsi fut-il amené à étudier les géométries non euclidiennes et, au cours de ses lectures, dans les *Matériaux pour une Biographie de N. I. Lobatchevsky*, rassemblés par L. B. Modzalevsky (Éditions de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S., Moscou, 1948), il trouva le texte suivant, écrit en français :

Rapport de l'Académicien V. M. Ostrogradsky à l'Académie impériale des Sciences de Russie : L'Académie m'a chargé d'examiner un ouvrage de géométrie par M. Lobatchevsky, Recteur de l'Université de Kasan, et d'en rendre un compte verbal.

Il semble que l'auteur s'est proposé d'écrire afin qu'on ne le comprenne pas. Il a atteint ce but ; la plus grande partie de son livre m'est restée aussi inconnue, que si je ne l'avais jamais vu. Je n'y ai compris que ce qui suit.

On peut admettre que la somme des angles dans un triangle est plus petite que deux angles droits. La Géométrie qui résulte de cette hypothèse est plus difficile et plus étendue que celle que nous connaissons, et peut être d'un grand secours dans l'Analyse pure, et surtout dans la théorie des Intégrales définies, car elle a déjà servi pour trouver la valeur de deux Intégrales définies, que personne n'avait encore obtenues, et qu'il serait encore difficile d'obtenir par d'autres moyens.

Sur ce que je viens de lire, je crois devoir rapporter à l'Académie :

1° Des deux intégrales définies que M. Lobatchevsky croit avoir trouvées, une est connue. On peut la déduire des principes les plus élémentaires du calcul intégral. La valeur de l'autre donnée à la page 120 est à la vérité nouvelle, elle est due à M. le Recteur de Kasan. Malheureusement elle est fautive.

2° Tout ce que j'ai compris dans la Géométrie de M. Lobatchevsky est au dessous du médiocre.

3° Tout ce que je n'y comprends pas, doit être mal rédigé, par cela même qu'il est difficile de le comprendre.

J'en conclus que le livre de M. le Recteur Lobatchevsky est entaché d'une erreur, qu'il est rédigé sans soin, et qu'en conséquence il ne mérite pas l'attention de l'Académie.

« Lu le 7 novembre 1832. »

Paris en 1791 vu par Lagrange.

Mirabeau, alors chargé à Berlin d'une mission diplomatique secrète, avait beaucoup contribué, en 1787, à la venue à Paris de Lagrange.

Mais ce dernier a toujours conservé avec les autorités berlinoises des relations au moins courtoises.

Voici ce qu'il écrit à Von Hertzberg, Ministre des Affaires étrangères, le 14 avril 1791.

« ... Mirabeau vient de mourir, je n'ai eu depuis que je suis ici aucune liaison ni directe ni indirecte avec lui, j'estimais son talent, mais je n'aimais ni son caractère ni

sa conduite, et la mienne m'éloignant des Clubs et des tourbillons, je n'avais aucune occasion de le voir ni de le rencontrer ; à l'égard des deux autres [on ne sait qui ils sont, mais le ministre prussien voulait se renseigner sur eux] je ne les connais en aucune manière, mais à en juger par leurs écrits qui me tombent quelquefois sous les yeux il me semble que l'un est un peu fou, et l'autre enragé, et je ne crois pas que les rôles qu'ils jouent ici puissent mériter l'attention de Votre Excellence. D'ailleurs la foule des papiers, dont on est inondé journellement, la liberté que l'on a de tout dire et de raisonner à son aise, de calomnier même si l'on veut, fait qu'on n'y attache aucune importance et qu'on ne les lit que pour les oublier. L'assemblée nationale absorbe tous les intérêts ; on ne s'occupe que de ses opérations, les uns pour les vanter et les soutenir, les autres pour les décrier et les contrarier, mais le premier parti est toujours de beaucoup le plus fort. Ce qui se passe dans les pays étrangers n'attire l'attention qu'autant qu'on croit y voir quelque rapport à la contre-révolution que les uns craignent et les autres désirent, on est très indifférent pour tout autre objet... »

Communiqué par J. I.

Réflexions sur la notion de méthode active.

Extrait d'un article de Guy PALMADE in « Pédagogie et Psychologie des groupes » (Association pour la Recherche et l'Innovation en Pédagogie, p. 256).

« Notons tout d'abord qu'il convient de se garder des confusions auxquelles a prêté la notion de méthode active. Confusions dues tout d'abord à sa généralité d'usage. On englobe alors sous ce terme par exemple : individualisation de l'enseignement, travail en équipe, auto-discipline, usage de moyens audio-visuels..., etc. Une autre confusion fréquente consiste à considérer comme active toute méthode qui est accompagnée d'une action concrète, manuelle, extérieure. D'autre part, certains ramènent parfois méthode active au recours au concret et à l'intuition ? Enfin bien des critiques ont été faites à la méthode active dans la mesure où elle était confondue entièrement avec la notion de méthode attrayante. Sans doute, l'activité de jeu doit normalement tenir une part importante dans le processus de formation de l'enfant, mais ceci ne correspond pas à la notion même de méthode active. Une pédagogie de l'effort, se réalisant sur des sujets austères peut être très authentiquement active.

Si l'on veut spécifiquement définir les méthodes actives, il faut souligner que celles-ci doivent impliquer une activité interne dans l'acte même par lequel on apprend certaines connaissances en les découvrant. On peut alors voir en quoi la méthode interrogative n'est pas véritablement active. Le fait pour les élèves de répondre à des questions séparées ne peut amener ceux-ci à découvrir la structure d'ensemble qui devrait constituer l'essentiel de la découverte. Par la nature et l'ordre des questions posées on donne en fait le plus important de ce que l'on prétend, d'autre part, faire découvrir. Ainsi la méthode strictement interrogative n'est en quelque sorte qu'une méthode expositive « en creux », dans laquelle à l'extrême les différentes propositions sont simplement données sous forme de question. L'activité constructive essentielle de la pensée n'y est jamais véritablement suscitée.

On ne débouchera dans la perspective actuellement présentée sur une véritable méthode active que si l'on remet aux élèves les problèmes à résoudre dans leur totalité, de manière que ceux-ci aient à élaborer l'ensemble de la structure de la connaissance. Si l'on parvient à ce que l'enfant construise un ensemble d'opérations à partir d'un problème complet et qui lui est entièrement remis, alors on peut penser qu'il a aussi bien trouvé la structure d'ensemble que tous les éléments du nouvel acte intellectuel.

La notion de problème est ainsi une notion centrale pour les méthodes actives. Le problème, s'il est bien vivant dans la pensée de l'élève, constitue un agent directeur de

recherche ; et c'est en découvrant la solution du problème que l'acquisition d'une connaissance donnée se réalise. Les problèmes ne sont plus simplement des occasions de vérifier et renforcer l'acquisition des connaissances, ni d'introduire à l'application de celles-ci, mais ils constituent le moteur même de cette acquisition. Les méthodes actives sont ainsi essentiellement des pédagogies « par » l'étude des problèmes. »

Communiqué par M.-A. T.

Carnet de lecture

— *Sur les vecteurs* : il m'a plu de retrouver, sous la plume de notre Collègue Gourret (*Bulletin* 262, p. 254), une idée que j'avais déjà appréciée dans un exercice du recueil publié par J. Chastenet de Géry au Centre de Documentation Universitaire, même si la forme était différente, le public auquel s'adressait ce dernier n'étant pas celui auquel pensait le premier. Il ne s'agit pas, à mon avis, d'une querelle de priorité : les bonnes idées sont à tout le monde et en premier lieu à tous les bons pédagogues. Mais j'admire la convergence, l'un travaillant à Paris, l'autre à Lyon et moi, je lis, à Stratford!

— *La manie des statistiques* : en France, on aime bien noter, les élèves comme les professeurs; une fois la note attribuée, il y a toujours quelqu'un pour y croire, en tirer un classement, attribuer à celui-ci une valeur. Cette maladie n'est pas spécifiquement française. Dans *Economist* du 19 octobre, je lis que le Pr P. M. S. Blackett vante le haut niveau, l'éminence de la science britannique; j'en conviens sans modestie. Mais je me demande ce que vaut la preuve donnée par l'article en question : aux U.S.A., il y a eu 0,37 prix Nobel par million d'habitants, en Grande-Bretagne, 0,85 prix Nobel par million d'habitants.

J'en connais qui en déduiront : en moyenne, un Anglais est deux fois plus savant qu'un Américain!

— *Loin de Grenelle* : ici, au fond du Staffordshire, c'est une distraction de lire le Bulletin Officiel de l'Éducation Nationale. Ainsi suis-je étonné, dans une note sur le programme de l'agrégation (une de ces choses que l'Angleterre envie à la France), qu'à côté de la droite de Simson, on ait omis celle de Steiner, que le point de Lemoine soit oublié. Et le théorème de Feuerbach?

Les modifications apportées aux programmes de Sixième et Cinquième par rapport au texte du *Bulletin* 263 paraissent plus anodines. En les lisant de plus près, on s'aperçoit de l'adjonction en Sixième du « parallépipède rectangle » alors que dans le programme de Cinquième on a maintenu, sans changement, l'expression « pavé oblique ». Je ne serais pas étonné d'apprendre qu'un « enragé » s'est glissé dans les bureaux de votre Ministère!

— *Autres pavés*. Les amateurs de parallépipèdes rectangles auront beau faire, il y aura eu, en mai et juin 68, des déplacements de pavés qui resteront dans notre mémoire. Ou bien, si nous nous méfions de l'infidélité de celle-ci, nous garderons dans notre bibliothèque des témoignages de cette période agitée.

Sous le titre significatif « *Des lycéens vous parlent* », le n° 76 (septembre 1968) des *Cahiers pédagogiques* nous propose un choix très significatif ou de témoignages d'élèves (des enthousiastes, des réalistes, des horrifiés...) ou de rapports établis par des commissions composées d'élèves, de parents et de professeurs. J'ai été très étonné d'apprendre que certains professeurs aient été scandalisés que des élèves contestassent. Il aurait été plus sage de s'inquiéter qu'ils ne se rebifassent jamais. Au risque de

scandaliser à mon tour, après lecture de ce *Cahier Pédagogique*, je m'inquiéterai encore si je n'entends plus parler de contestation.

A côté de ces paroles de lycéens, je place un recueil exceptionnel de documents rassemblés par une équipe d'historiens de la Faculté des Lettres de Paris : « *La Sorbonne par elle-même, mai-juin 1968* », documents rassemblés et présentés par M^{mes} Perrot et Rebérioux et M. Jean Maitron. Loin de moi l'envie de m'enfermer dans le culte des archives pour ne plus penser à ce qu'il faudrait faire aujourd'hui. Mais j'apprécie l'ouvrage de ces spécialistes du document qui s'efforcent par ailleurs de retrouver la signification des révolutions du passé et qui, pris dans le mouvement qui pouvait amorcer une révolution, ont eu la bonne idée d'en faire un tableau précis. Or ce mouvement partait de la Sorbonne : comment des éducateurs ne seraient-ils pas intéressés par ce qui s'y est passé, par ce qui s'y passe?

W. MOUNTEBANK.

Nouveaux livres.

— Œuvres de Jacques Hadamard, 4 tomes reliés, 2334 pages in-8°, prix 160 F. Éditions du C.N.R.S.

— Jacques DIXMIER : *Cours de mathématiques du premier cycle*. 1. Première année, 472 p., 1967, 44 F ; 2. Deuxième année, 370 p., 1968, 33 F. Cahiers Scientifiques XXX et XXXII, Gauthier-Villars, éditeur.

— Robert FERON : *Modèles statiques de l'Econométrie*, 144 p., 1968, 36 F. Éditions Eyrolles.

— G. MATHERON : *Éléments pour une théorie des milieux poreux*, 166 p., 1968, 38 F. Masson, éditeur.

— Béla Sz NAGY et Ciprian FOIAS : *Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert*, trad. du hongrois, 374 p., 1968, 85 F. Masson, éditeur.

— J. NECAS : *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, traduit du tchèque, 352 p., 1968, 70 F. Masson, éditeur.

— R. LATTÈS et J.-L. LIONS : *Méthode de quasi-réversibilité et applications*, 382 p., 1967, 76 F. Dunod, éditeur.

— G. POITOU : *Cohomologie galoisienne des modules finis*. Séminaire de Lille, 298 p., 1967, 68 F. Dunod, éditeur.

Page 420,

- vous relirez les conditions de vente des publications de l'APMEP ;
- vous simplifierez les tâches de notre secrétariat en vous informant aux recommandations pour les versements
- vous limiterez vos commandes aux seules publications de l'APMEP qui, elles, ne sont pas en vente dans les librairies, alors que les ouvrages des autres éditeurs y sont vendus.

MATHÉMATIQUES

NOUVEAUTÉS

par **M. MONGE**

Ancien élève de l'École Normale Supérieure
Agrégré de l'université

M. GUINCHAN

Licencié ès sciences
Professeur de Collège d'Enseignement général

J.P. PELLE

Agrégré de l'Université

J. MONGE

Licenciée ès sciences

G. PELLE

Professeur certifié

Classe de **Sixième**

NOUVEAU PROGRAMME

Arrêté du 29-7-68 (B.O. du 31-10-68)

Un volume totalement nouveau

En préparation, à paraître PRINTEMPS 69

Belin

8, rue Férou, - Tél. : 326.89-45 - PARIS-VI^e

Programme pour les classes de Seconde A, C, T.

N.D.L.R. — Comme nous l'avions annoncé dans le Bulletin 263-4, nous publions ici le texte des programmes des classes de Seconde qui résultent des travaux de la Commission Lichnerowicz. Ce texte (arrêté du 26 juillet 1968, publié au B.O. n° 29 du 29-08-68) précise que la mise en application aura lieu à la rentrée 1969.

Avertissement aux professeurs.

Les professeurs ne se laisseront pas obnubiler par la longueur (ou la brièveté) du libellé de certaines parties des programmes. En effet lorsqu'il s'agit de sujets non traditionnels et qu'il est nécessaire de bien préciser les limites de ce qui doit être traité, le programme est nettement plus explicite que sur des sujets classiques. Il a parfois paru utile aux auteurs des programmes de bien préciser la terminologie et les notations ; il en résulte alors un libellé assez long, nullement proportionnel au nombre de séances de cours.

Dans les classes de Seconde, la partie du programme intitulée « langage des ensembles » ne doit pas faire l'objet d'exposés dogmatiques, surtout pas en début d'année. Il s'agit de notions à acquérir en cours d'année, à propos d'exemples de préférence. Chaque fois qu'une partie de ce lexique de notions aura été assimilée par les élèves, on s'en servira, sans sophistication mais sans ambages.

Le programme ne contient que le schéma déductif du cours. Il va de soi que l'enseignement doit donner une grande place aux exercices, et en particulier dans les sections C et T à la recherche de « lieux géométriques ». Pour cette recherche, il sera commode que les élèves connaissent certains de ces « lieux ». (Médiatrice, bissectrice de deux demi-droites, ensemble des points dont le rapport des distances à deux droites données est donné).

Seconde A (3 heures).

1. Langage des ensembles.

Emploi du vocabulaire de la logique : négation, conjonction, disjonction, implication, équivalence ; réciproques de certaines assertions. Quantificateurs « quel que soit » et « il existe » ; négation d'assertions comportant éventuellement des quantificateurs.

Ensembles ; appartenance, inclusion, sous-ensemble, ensemble vide ; réunion intersection ; sous-ensembles complémentaires, lien avec la logique. Produit cartésien de deux ensembles.

Application d'un ensemble (de départ) dans un ensemble (d'arrivée). Graphe de cette application dans l'ensemble produit. Définition du mot « équation ».

Relation d'équivalence dans un ensemble : classes d'équivalence ; exemples.

2. Nombres réels (notation $\mathbb{R}$).

1. — Inventaire (sans démonstration) des propriétés de l'addition des nombres réels. Définition de la locution « groupe commutatif ». Muni de la loi d'addition, l'ensemble des nombres réels est un groupe commutatif. Le sous-groupe $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

2. — Inventaire (sans démonstration) des propriétés de la multiplication des nombres réels. Muni de la loi de multiplication, l'ensemble des nombres réels non-nuls est un groupe commutatif. Puissances entières (exposants positif, nul, négatif) ; produits et quotients de puissances entières.

3. — Maniement de la règle à calculs (sans aucune théorie).

4. — Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Conséquences. Identités concernant

$$(x+y)^2, (x-y)^2 \text{ et } x^2-y^2$$

5. — Relation d'ordre total sur l'ensemble des nombres réels ; règles de calcul concernant cette relation. Intervalle ouvert, intervalle fermé. Valeur absolue. Notion d'approximation, d'erreur, d'ordre de grandeur.

3. Fonctions numériques d'une variable réelle.

1. — Fonction numérique d'une variable réelle conçue comme application d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Distinction entre les notations f et $f(x)$. Fonction constante sur un intervalle ; fonction croissante, fonction décroissante sur un intervalle.

2. — Représentation graphique. Exemples de fonctions en escalier.

3. — Étude de la fonction linéaire f définie par $f(x) = ax$, et de la fonction affine g définie par $g(x) = ax + b$. Sens de variation de g , signe de $g(x)$. Représentation graphique. Exemples de fonctions affines par intervalles, en particulier $f(x) = |x|$.

4. — Fonction f définie par $f(x) = a/x$. Sens de variation. Étude pour les « petites » et les « grandes » valeurs de $|x|$. Représentation graphique.

5. — Équations et inéquations à une inconnue ; position et signification du problème ; sa notation. Exemples simples.

4. Vecteurs.

1. — Application d'une droite sur $\mathbb{R}$, les points (distincts) d'images respectives 0 et 1 étant choisis. Abscisse d'un point. Mesure algébrique d'un segment orienté sur une droite orientée (ou axe) ; formule de Chasles. Segment défini par les abscisses des points qui les limitent ; mesure algébrique (segment orienté), longueur, abscisse du milieu.

2. — Bipoints (c'est-à-dire couples (A, B) de points du plan). Équipollence. Vecteurs ; notation $\overrightarrow{AB}$ pour le vecteur dont le bipoint (A, B) est un représentant.

Addition des vecteurs ; ils forment un groupe commutatif (ici, et dans la suite, on pourra s'appuyer sur les résultats décrits dans le premier cycle).

Application de l'ensemble des vecteurs sur le plan pointé par la donnée d'une origine.

Multiplication d'un vecteur par un nombre réel.

3. — Introduction de la locution « espace vectoriel ». Exemples : $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, fonctions affines, fonctions en escalier, fonctions affines par morceaux.

4. — Définition d'une application linéaire d'un espace vectoriel dans lui-même ou dans un autre. Exemples : formes linéaires, homothéties vectorielles, projections vectorielles.

5. — Translations dans le plan. Homothéties dans le plan.

Projection (de direction donnée) du plan ou d'une droite sur une droite de ce plan ; théorème de Thalès.

Seconde C (5 heures).

1. Langage des ensembles.

1. — Emploi du vocabulaire de la logique : négation, conjonction, disjonction, implication, équivalence ; réciproques de certaines assertions. Quantificateurs « quel que soit » et « il existe » ; négation d'une assertion comportant éventuellement des quantificateurs.

2. — Ensembles : appartenance, inclusion ; sous-ensemble, ensemble vide ; intersection, réunion ; sous-ensembles complémentaires. Lien avec la logique. Produit cartésien de deux ensembles.

3. — Application d'un ensemble (de départ) dans un ensemble (d'arrivée). Graphe de cette application dans l'ensemble produit. Composition de deux applications. Application bijective ; exemples. Application réciproque d'une application bijective. Définition du mot « équation ».

4. — Relation d'équivalence dans un ensemble ; classes d'équivalence ; ensemble-quotient. Exemples.

5. — Exemples de relations d'ordre (en particulier : inclusions ; ordre total sur $\mathbb{R}$).

2. Nombres réels (Notation $\mathbb{R}$).

1. — Inventaire (sans démonstration) des propriétés de l'addition des nombres réels. Définition de la locution « groupe commutatif. » Muni de la loi d'addition, l'ensemble des nombres réels est un groupe commutatif. Le sous-groupe $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

2. — Inventaire (sans démonstration) des propriétés de la multiplication des nombres réels. Muni de la loi de multiplication, l'ensemble des nombres réels non nuls est un groupe commutatif. Puissances entières (exposants positif, nul, négatif) ; produits et quotients de puissances entières.

3. — Comparaison des calculs dans le groupe $\mathbb{Z}$ et dans le groupe des a^n (a réel non nul donné, $n \in \mathbb{Z}$).

Maniement de la règle à calculs (sans aucune théorie).

4. — Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Définition de la locution « corps commutatif ». Conséquences de la distributivité. Identités concernant $(x+y)^2$, $(x-y)^2$, x^2-y^2 ; les identités analogues pour l'exposant 3 feront l'objet d'exercices.

Les nombres rationnels forment un corps commutatif $\mathcal{Q}$.

5. — Équation du premier degré à une inconnue dans les corps $\mathbb{R}$ et $\mathcal{Q}$. Système de deux équations du premier degré à deux inconnues ; déterminant.

6. — Relation d'ordre total sur l'ensemble des nombres réels ; règles de calcul concernant cette relation. Intervalle ouvert, intervalle fermé, intervalle borné. Valeur absolue, valeur absolue d'un produit, d'un quotient, d'une somme, d'une différence. Calcul de valeurs approchées par encadrement. Notion d'approximation et d'erreur. Chiffres significatifs, ordre de grandeur d'un résultat.

Étude de problèmes pouvant faire appel à l'ensemble des connaissances des élèves, et dont la résolution conduit à des équations ou inéquations du premier degré. Ces problèmes devront souvent comporter des questions de calcul numérique.

7. — Racine carrée (positive ou nulle) d'un nombre réel positif ou nul (on admettra son existence) notation $\sqrt{a}$ et $a^{1/2}$. Équation du second degré à une inconnue dans $\mathbb{R}$, dans $\mathcal{Q}$. Somme et produit des racines d'une équation de second degré.

8. — Usage de tables numériques, et d'une machine à calculer de bureau.

3. Fonctions numériques d'une variable réelle.

1. — Fonction numérique d'une variable réelle conçue comme application d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Distinction entre les notations f et $f(x)$.

Fonction constante sur un intervalle ; fonction croissante, fonction décroissante sur un intervalle.

2. — Représentation graphique. Exemples de fonctions en escalier.

3. — Étude de la fonction linéaire f définie par $f(x) = ax$, et de la fonction affine g définie par $g(x) = ax + b$. Sens de variation de g , signe de $g(x)$. Représentation graphique. Exemples de fonctions affines par intervalles [en particulier $f(x) = |x|$].

4. — Étude de la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$. Sens de variation. maximum ou minimum, signe. Étude pour les « grandes » valeurs de $|x|$. Représentation graphique.

5. — Étude de la fonction f définie par $f(x) = a/x$. Sens de variation. Étude pour les « petites » et les « grandes » valeurs de $|x|$. Représentation graphique.

4. Géométrie plane et espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

1. — Application d'une droite sur $\mathbb{R}$, les points (distincts) d'images respectives 0 et 1 étant choisis. Abscisse d'un point. Mesure algébrique d'un segment orienté sur une droite orientée (ou axe) ; formule de Chasles. Segment défini par les abscisses des points qui le limitent ; mesure algébrique (segment orienté), longueur, abscisse du milieu. Changement de repère.

2. — Rappel de certaines propriétés affines du plan : la droite dans le plan ; détermination par deux points. Droites parallèles ; le parallélisme est une relation d'équivalence ; notion de direction ; milieu de deux points ; le parallélogramme et ses caractéristiques.

3. — Bipoints [c'est-à-dire couples (A, B) de points du plan]. Équipollence. Vecteurs du plan ; notation $\overrightarrow{AB}$ pour le vecteur dont le bipoint (A, B) est un représentant. Addition des vecteurs du plan ; ils forment un groupe commutatif. Bijection de l'ensemble des vecteurs du plan sur le plan pointé par la donnée d'une origine.

Multiplication d'un vecteur du plan par un nombre réel, définition d'une droite vectorielle.

4. — Introduction de la locution « espace vectoriel ». Exemples : $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, fonctions affines, fonctions en escalier, fonctions affines par intervalles.

Combinaison linéaire de vecteurs du plan ; définition de l'indépendance et de la dépendance linéaire.

Définition d'une base du plan vectoriel.

5. — Coordonnées d'un vecteur du plan vectoriel dans une base déterminée ; coordonnées d'une somme, du produit par un nombre. Condition de dépendance de deux vecteurs. Interprétation vectorielle d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues.

6. — Application linéaire d'un espace vectoriel dans lui-même ou dans un autre.

Exemples : forme linéaire ; homothétie vectorielle, projection vectorielle du plan sur une droite, d'une droite sur une autre.

7. — Application affine du plan vectoriel dans lui-même. Translation ; définition d'une droite affine du plan vectoriel. Représentation paramétrique d'une telle droite.

Définition d'un segment du plan vectoriel. Ensemble convexe : définition, exemples, intersection d'ensembles convexes.

8. — Groupe des dilatations du plan vectoriel

définies par $h(\vec{x}) = a\vec{x} + \vec{b}$ avec $a \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Exemples de sous-groupes remarquables.

9. — Repère cartésien (affine) dans le plan. Coordonnées d'un point. Changement de coordonnées par translation.

Équation cartésienne d'une droite ; équation d'une droite définie par un point et un vecteur, par deux points. Interprétation géométrique du signe d'un polynôme du premier degré à deux variables. Résolution géométrique des systèmes d'équations et inéquations du premier degré à deux inconnues.

5. Géométrie métrique plane.

1. — Rappel de certaines propriétés métriques du plan :

a) Orthogonalité de deux droites ; c'est une relation symétrique, compatible avec le parallélisme.

b) Distance de deux points ; invariance par translation ; longueur d'un vecteur ; vecteur unitaire ; cercle.

c) Projection orthogonale sur une droite.

d) Rapport de projection orthogonale d'une demi-droite sur une autre ; sa symétrie.

2. — Produit scalaire de deux vecteurs ; symétrie, bilinéarité. Carré scalaire d'un vecteur.

Carrés scalaires de la somme et de la différence de deux vecteurs ; théorème de Pythagore. Somme et différence de ces deux produits scalaires. Problèmes géométriques associés.

3. — Inégalité de Cauchy-Schwarz ; inégalité triangulaire.

4. — Cercle et disque. Positions relatives d'une droite et d'un cercle, de deux cercles, de deux disques.

5. — Repère orthonormé. Expressions du produit scalaire et de la distance dans un tel repère. Condition analytique d'orthogonalité de deux vecteurs, de deux droites. Équation d'une droite dont on connaît un point et un vecteur normal (unitaire ou non). Distance d'un point à une droite.

Seconde T (5 heures).

1. Langage des ensembles.

Ensembles ; appartenance, inclusion, sous-ensemble, ensemble vide ; réunion, intersection ; sous-ensemble complémentaires. Produit cartésien de deux ensembles. Application d'un ensemble (de départ) dans un ensemble (d'arrivée) ; graphe de cette application dans l'ensemble produit. Définition du mot « équation ». Relation d'équivalence dans un ensemble ; classes d'équivalence : exemples.

Exemples de relations d'ordre (en particulier : inclusion, ordre total sur $\mathbb{R}$).

2. Nombres réels (Notation $\mathbb{R}$).

1. — Inventaire (sans démonstrations) des propriétés de l'addition des nombres réels. Définition de la locution « groupe commutatif ». Muni de la loi d'addition, l'ensemble des nombres réels est un groupe commutatif. Le sous-groupe $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

2. — Inventaire (sans démonstrations) des propriétés de la multiplication des nombres réels ; muni de la loi de multiplication, l'ensemble des nombres réels non nuls est un groupe commutatif. Puissances entières (exposants positifs, nuls, négatifs) ; produit et quotient de puissances entières.

3. — Comparaison des calculs dans le groupe $\mathbb{Z}$ et dans le groupe a^n [a réel non nul donné, $n \in \mathbb{Z}$].

Lien avec le maniement de la règle à calculs.

4. — Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Conséquences.

Identités concernant $(x+y)^2$, $(x-y)^2$, x^2-y^2 , les identités analogues pour l'exposant 3 feront l'objet d'exercices.

5. — Équation du premier degré à une inconnue. Système de deux équations du premier degré à deux inconnues ; déterminant.

6. — Relation d'ordre total sur l'ensemble des nombres réels ; règles de calcul concernant cette relation ; intervalle ouvert, intervalle fermé, intervalle borné. Valeur absolue ; valeur absolue d'un produit, d'un quotient, d'une somme et d'une différence.

Étude de problèmes pouvant faire appel à l'ensemble des connaissances des élèves, et dont la résolution conduit à des équations ou inéquations du premier degré.

7. — Racine carrée (positive ou nulle) d'un nombre réel positif ou nul (on admettra son existence) ; notations $\sqrt{a}$ et $a^{1/2}$. Équation du second degré à une inconnue dans $\mathbb{R}$. Somme et produit des racines d'une équation du second degré.

3. Fonctions numériques d'une variable réelle.

1. — Fonction numérique d'une variable réelle conçue comme application d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Distinction entre les notations f et $f(x)$. Fonction constante sur un intervalle ; fonction croissante, fonction décroissante sur un intervalle.

2. — Représentation graphique. Exemple des fonctions en escalier.

3. — Étude de la fonction linéaire f définie par $f(x) = ax$, et de la fonction affine g définie par $g(x) = ax + b$. Sens de variation de g , signe de $g(x)$. Représentation graphique. Exemples de fonctions affines par intervalles [en particulier $f(x) = |x|$].

4. — Étude de la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$. Sens de variation, maximum ou minimum, signe. Étude pour les « grandes » valeurs de x . Représentation graphique.

5. — Étude de la fonction f définie par $f(x) = a/x$. Sens de variation. Étude pour les « petites » et les « grandes » valeurs de $|x|$.

Représentation graphique.

4. Pratique du calcul numérique.

Calcul de valeurs approchées par encadrement. Notion d'approximation et d'erreur. Chiffres significatifs, ordre de grandeur d'un résultat.

Valeurs approchées de $(1+x)^2$ pour $a = -1, 2, -2, 1/2, -1/2$, et $|x|$ petit.

Progressions arithmétiques et géométriques : application aux séries Renard et aux nombres normaux. Erreur absolue et erreur relative. Logarithmes décimaux (toutes les propriétés seront admises).

Usage des tables de valeurs numériques : carrés, cubes, racines carrées et cubiques, inverses, fonctions trigonométriques, logarithmes. Pratique de l'interpolation linéaire.

Maniement d'une machine à calculer de bureau et d'une règle à calculs.

N.B. — Ce paragraphe ne doit donner lieu à aucun développement magistral systématique. Les problèmes traités en classe ou en séances de travail dirigé, ou proposés en recherche personnelle, devront en général comporter des questions de calcul numérique. Ces problèmes pourront porter sur toutes les matières des divers programmes de la classe ou des classes antérieures, et s'appuyer sur des exemples concrets de mathématiques, physique, technologie et autres branches de la vie courante.

5. Géométrie et calcul vectoriel.

1. — Application d'une droite sur $\mathbb{R}$, les points (distincts) d'images respectives 0 et 1 étant choisis. Abscisse d'un point. Mesure algébrique d'un segment orienté sur une droite orientée (ou axe) : formule de Chasles. Segment défini par les abscisses des points qui le limitent ; mesure algébrique (segment orienté), longueur, abscisse du milieu. Changement de repère.

2. — Plan et droite dans l'espace. Leurs déterminations ; leurs positions relatives. Parallélisme de droites et de plans ; notion de direction de droite, de direction de plan. Le parallélogramme et ses caractéristiques (il s'agit dans ce numéro, de dégager un langage correct à partir de constatations expérimentales).

3. — Bipoints [c'est-à-dire couples (A, B) de points de l'espace]. Equipollence.

Vecteurs : notation $\overrightarrow{AB}$ pour le vecteur dont le bipoint (A, B) est un représentant. Addition des vecteurs ; ils forment un groupe commutatif.

Application de l'ensemble des vecteurs sur l'espace pointé par la donnée d'une origine.

Multiplication d'un vecteur par un nombre réel ; définition d'une droite vectorielle.

4. — Introduction de la notion d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Exemples ($\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, fonctions affines, fonctions en escalier, fonctions affines par intervalles).

Application linéaire d'un espace vectoriel dans lui-même ou dans un autre. Exemples (formes linéaires, homothéties vectorielles, projections vectorielles).

Dans ce qui suit, on se bornera aux espaces vectoriels des vecteurs du plan et de l'espace.

5. — Application affine d'un espace vectoriel dans lui-même ou dans un autre. Translations. Définition et représentations paramétriques des droites (vectorielles et affines) et des segments d'un espace vectoriel.

Ensemble convexe ; définition, exemples, intersection d'ensembles convexes.

6. — Coordonnées d'un vecteur dans une base déterminée (plan et espace); coordonnées d'une somme, du produit par un nombre. Condition de dépendance de deux vecteurs (plan et espace). Interprétation vectorielle d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues.

7. — Repère cartésien dans le plan. Coordonnées d'un point. Changement de coordonnées par translation des axes.

Équation cartésienne d'une droite ; droite définie par deux points, par un point et un vecteur. Interprétation géométrique du signe d'un polynôme du premier degré à deux variables. Résolution géométrique des systèmes d'équations et inéquations du premier degré à deux inconnues.

8. — A partir des notions expérimentales (dans l'espace) de distance, d'orthogonalité et de projection orthogonale sur une droite, on dégagera la notion de produit scalaire de deux vecteurs. Bilinearité, symétrie, carré scalaire (espace).

Application à la relation $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ dans un triangle, et au théorème de Pythagore.

Cercle et disque. Positions relatives d'une droite et d'un cercle, de deux cercles, de deux disques.

9. — Notions très simples de géométrie descriptive : épures du point, de la droite, de deux droites concourantes, de deux droites parallèles, du plan, de deux plans perpendiculaires.

En lisant le B. O.

— Les *allègements de programme* en vue du baccalauréat 1969 ont paru, pour les mathématiques en Terminale A (3 ou 4), B, C, D, E, dans le B. O. n° 35 du 10 octobre 1968. Aux Collègues qui jugeraient avec juste raison que cette publication fut tardive, faisons remarquer que les allègements pour la physique, les sciences naturelles et la philosophie n'ont paru que le 17 octobre, que pour d'autres disciplines aucun texte n'est paru et que, pour le baccalauréat lui-même, organisation, nature des épreuves, les textes n'ont paru que le 28 novembre;

— Le B. O. n° 38 du 31 octobre 1968 publie l'Arrêté du 29 juillet 1968 sur le programme de Sixième et de Cinquième applicables respectivement à la rentrée 1969 et 1970. Le *Bulletin* 263/4 a publié ce texte (p. 361) ; nous nous étions étonnés alors

du retard de la publication officielle. Celle-ci comporte, par rapport au texte que nous avons publié les modifications suivantes :

1° dans le programme de Sixième, remplacer 3, d, « Mesure des volumes et des masses. Masse volumique », par : « Solides : cubes, parallélépipèdes rectangles, prismes droits, cylindres de révolution, pyramides, cônes de révolution ; volumes, masses, masses volumiques » ;

2° dans le programme de Cinquième, remplacer dans 1, c, « sens de l'article défini *le*, différents sens de l'article indéfini *un* ; sens de la conjonction *et* ; les deux sens de la conjonction *ou* ; sens du mot *tout* » par : « diverses significations des mots suivants : l'article défini *le*, l'article indéfini *un*, la conjonction *et*, la conjonction *ou*, l'adjectif *tout* ; leur emploi en mathématiques ».

Dans 3, b, « Puissances entières positives, négatives, nulle d'un même nombre » le mot « négatives » a été supprimé.

Dans 4, la parenthèse a été augmentée : « (Il s'agit d'une simple description ; on révisera d'abord les notions correspondantes dans le plan) ».

— Le B. O. n° 38 du 31-10-68 publie une Note du 24 octobre 1968 sur les programmes des épreuves écrites et orales des agrégations de Mathématiques pour la session de 1969. Il est prévu, à l'écrit trois épreuves : 1) Mathématiques générales ; 2) Analyse ; 3) Mathématiques appliquées (avec trois options exclusives les unes des autres portant sur l'analyse numérique, la mécanique générale, les probabilités et la statistique. Pour cette dernière option, le programme est complètement précisé.

N.D.L.R. — A propos du programme relatif à la première épreuve, nous avons reçu la note suivante.

Fossiles mathématiques.

Depuis dix ou quinze ans, il m'arrivait assez souvent d'avoir besoin de décrire les fossiles qui encombrant la mathématique enseignée chez nous : je parlais à mes collègues professeurs de mathématiques, ou bien à des ingénieurs ayant été jadis élèves de Spéciales ou des Grandes Écoles. Voici qui m'ôte tout souci : le Ministère de l'Éducation Nationale prend soin lui-même de dresser le syllabus : désormais je m'y référerai scrupuleusement.

B.O.E.N. N° 38 (31-10-68), p. 2886 :

« Programme des épreuves des agrégations de mathématiques en 1969...

Note : un certain nombre de définitions et de propriétés non mentionnées explicitement dans les programmes, mais qui sont en liaison directe avec les théories classiques, sont naturellement supposées connues des candidats. Il en est ainsi en particulier : des théorèmes de Menelaus et de Jean de Ceva, du théorème de Leibniz sur le barycentre et de la formule de Stewart, des définitions et propriétés élémentaires des droites de Simson et du cercle d'Euler d'un triangle, des cubiques circulaires unicursales, des conchoïdes de droites et de cercles, des ovales de Descartes et de Cassini, des cycloïdes, épicycloïdes, hypocycloïdes, des hélices, du tore, du conoïde de Plucker. »

Je n'en croyais pas mes yeux, j'en pleurais presque, c'était trop beau. Évidemment ce texte (sans signature) aurait pu être l'œuvre d'un mauvais plaisant : j'ai pensé un instant alerter l'Inspection Générale (j'y ai quelques amis) mais, ces temps-ci, elle a bien des soucis, et peut-être n'avait-elle rien vu. Ne valait-il pas mieux en appeler au peuple mathématicien ?

Il y a plus de trente ans que j'ai passé l'agrégation : dans trente ans (ce sera quasiment l'an deux mille) il y a peu de chances que je voie, non pas ce que sera devenu, mais ce que sera demeuré l'enseignement des mathématiques dans notre pays. Camarades agrégatifs, gardiens des conoïdes et du cercle des neuf points, si au printemps prochain vous reprenez l'action pour votre libération, faites donc signe aux vieilles gens de mon espèce : fossiles contre fossiles, on verra qui rira le dernier !

G. Th. GUILBAUD.

Agrégation 1968

Mathématiques élémentaires et mathématiques spéciales.

I. — A toute partie non vide E du plan euclidien, on associe, pour chaque entier n strictement supérieur à un, son *diamètre d'ordre n* , noté $d_n(E)$, défini comme suit : $A_1, A_2, \dots, A_n$ désignant n points de E , et $\delta(A_1, \dots, A_n)$ la moyenne géométrique.

$$\left[\prod_{i < j \leq n} A_i A_j \right]^{\frac{2}{n(n-1)}}$$

de leurs distances mutuelles, $d_n(E)$ est la borne supérieure, finie ou non, des nombres $\delta(A_1, \dots, A_n)$, lorsque les n points $A_1, A_2, \dots, A_n$ varient arbitrairement dans E .

Ainsi $d_2(E)$ est le diamètre de E au sens usuel.

1° a) Démontrer que, si E est non borné, $d_n(E)$ est infini.

b) Démontrer que, si E est inclus dans E' , on a $d_n(E) \leq d_n(E')$.

2° Calculer $d_3(E)$ dans les cas suivants :

a) E est un segment de longueur a ;

b) E est un cercle de rayon r ; un arc de cercle de rayon r et de longueur θr (discuter);

c) E est un disque fermé de rayon r ; un disque ouvert de rayon r ;

d) E est la réunion des trois côtés d'un triangle équilatéral.

3° E étant supposé borné, démontrer, pour tout n , l'inégalité

$$d_{n+1}(E) \leq d_n(E).$$

En déduire que $d_n(E)$ a une limite positive ou nulle lorsque n augmente indéfiniment ; cette limite sera appelée *diamètre transfini* de E , noté $d(E)$.

Dans la suite, $d_n(E)$ et $d(E)$ seront abrégés en d_n et d lorsqu'il n'y aura pas de risque de confusion pour l'ensemble E .

II. — On se propose de calculer d_n et d dans le cas où E est un cercle de rayon unité.

1° $A_1, A_2, \dots, A_n$ étant n points du cercle rangés dans cet ordre, on pose

$$A_{n+1} = A_1, \quad A_{n+2} = A_2, \quad \text{etc.}$$

et l'on considère les produits $p_k = \prod_{i=1}^{i=n} A_i A_{i+k}$, où k est un entier naturel.

Démontrer, pour tout k inférieur ou égal à $\frac{n}{2}$, l'inégalité $p_k \leq \left(2 \sin \frac{k\pi}{n} \right)^n$.

(On pourra, pour cela, utiliser la propriété de la fonction $x \mapsto -\text{Log} \sin x$ d'être convexe sur $]0, \pi[$.)

2° Dédire de ce qui précède que le produit des distances mutuelles de n points du cercle est maximal dans le cas d'une disposition régulière de ces points.

3° Calculer d_n et d .

(On pourra, en désignant par $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ les racines du polynôme $z^n - 1$, introduire les produits

$$U_h = \prod_j (\alpha_h - \alpha_j),$$

où h est fixé et j décrit l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\} - \{h\}$, et montrer que U_h est égal à $n \alpha_h^{n-1}$.)

III. — Dans cette partie III, on étudie une méthode de détermination du diamètre transfini d'une partie E bornée du plan.

A tout point du plan on associe son affixe (complexe) dans un repère ortho-normé donné.

P étant un polynôme unitaire (c'est-à-dire dont le terme de plus haut degré a pour coefficient un), on désigne par $\mu(P)$ la borne supérieure de $|P(z)|$ lorsque le point d'affixe z décrit E . Soit μ_n la borne inférieure des $\mu(P)$ lorsque P décrit l'ensem-

ble des polynômes unitaires de degré n . On pose $m_n = \frac{1}{\mu_n}$.

1° a) Démontrer que $\mu(P)$ est fini.

b) Démontrer que m_n ne dépend que de E et de n et non du repère choisi.

c) Comparer m_n et d_n .

2° Démontrer l'inégalité

$$m_{p+q} \leq m_p^{\frac{p}{p+q}} m_q^{\frac{q}{p+q}}$$

pour tout couple d'entiers p, q .

Soit m la borne inférieure des nombres m_n ; démontrer que m_n tend vers m lorsque n augmente indéfiniment.

3° A tout système de $n+1$ points $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ de E , d'affixes respectives $z_1, z_2, \dots, z_{n+1}$, on associe le déterminant :

$$V(z_1, z_2, \dots, z_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{n-1} & z_2^{n-1} & \dots & z_{n+1}^{n-1} \\ z_1^n & z_2^n & \dots & z_{n+1}^n \end{vmatrix}.$$

Démontrer que, quel que soit le polynôme P unitaire de degré n , on a l'égalité

$$V(z_1, z_2, \dots, z_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{n-1} & z_2^{n-1} & \dots & z_{n+1}^{n-1} \\ P(z_1) & P(z_2) & \dots & P(z_{n+1}) \end{vmatrix}.$$

En utilisant le développement de ce dernier déterminant et éventuellement un polynôme P convenablement choisi en fonction des points, établir les inégalités

$$\frac{(n-1)}{d_n^2} (m_n)^n \leq \frac{n(n+1)}{d_{n+1}^2} \leq (n+1) \frac{n(n-1)}{d_n^2} (m_n)^n.$$

4° Dédurre de ce qui précède :

a) l'inégalité $d_{n+1} \geq m_n$;

b) une majoration de d_{n+1} faisant intervenir $m_1, m_2, \dots, m_n$ et n ;

c) l'égalité $m = d$. (On rappelle que, si une suite u_n admet la limite u , la suite $\frac{u_1 + 2u_2 + \dots + nu_n}{n^2}$ admet la limite $\frac{u}{2}$.)

IV. — On se propose de calculer le diamètre transfini d'un segment par la méthode précédente.

E désigne le segment $[-1, +1]$ de l'axe réel et x une variable décrivant E.

1° Étant donné un entier naturel n , démontrer que la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \operatorname{Arc} \cos x)$$

est la restriction à E d'un polynôme T unique, de degré n , unitaire et à coefficients réels. Quelle est la borne supérieure de son module sur E?

2° Démontrer, en considérant la différence $P - T$, que, si le polynôme unitaire P est de degré n et à coefficients réels, la borne supérieure sur E du module de P ne peut être strictement inférieure à $\frac{1}{2^{n-1}}$.

3° Quels sont pour E les nombres μ_n définis dans la partie III?

En déduire la valeur de $d(E)$ et, plus généralement, le diamètre transfini d'un segment de longueur a .

4° Démontrer qu'une condition suffisante pour que le diamètre transfini d'une partie bornée E du plan soit non nul est que E contienne un arc de courbe continu.

Donner un exemple d'ensemble dénombrable borné dont le diamètre transfini est non nul.

V. — 1° E étant une partie bornée du plan complexe et H un polynôme fixé, unitaire, de degré q , on note E_1 l'ensemble $H^{-1}(E)$ ainsi défini : le point d'affixe z appartient à E_1 si, et seulement si, le point d'affixe $H(z)$ appartient à E.

Établir la formule $d(E) = [d(E_1)]^q$.

2° A l'aide de cette formule, retrouver les valeurs des diamètres transfinis d'un segment et d'un cercle en supposant que ces diamètres sont non nuls.

3° Calculer les diamètres transfinis :

a) d'un disque;

b) d'un ovale de Cassini.

Analyse.

On désigne par $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels, par $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls. On rappelle que le support d'une application de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ est le plus petit ensemble fermé dans le complémentaire duquel la restriction de cette application est nulle. Le corps des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$; la distance de deux points, z et z' , de $\mathbb{C}$ est le module de $z - z'$ noté $|z - z'|$. Dans un espace topologique, on désigne l'adhérence d'une partie X par $\bar{X}$.

Dans tout le texte on note $z = x + iy$. ($z \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.)

I. — 1° Soit $t \mapsto \gamma_1(t)$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\gamma_1(t) = 0 \quad \text{si } t \leq 0, \quad \gamma_1(t) = \exp\left(-\frac{1}{t^2}\right) \quad \text{si } t > 0.$$

Montrer qu'elle est indéfiniment dérivable.

En déduire que la fonction γ définie dans le plan complexe par

$$\gamma(z) = \gamma_1\left(\frac{1}{2} + |z|\right) \gamma_1\left(\frac{1}{2} - |z|\right),$$

dont le support est la boule fermée de centre zéro et de rayon $\frac{1}{2}$, est indéfiniment dérivable en tant qu'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

2° On note

$$\varphi(z) = \frac{\gamma(z)}{a} \quad \text{avec} \quad a = \iint_{\mathbb{R}^2} \gamma(z) dx dy$$

et, pour

$$m \in \mathbb{R}^+, \quad \varphi_m(z) = m^2 \varphi(mz).$$

Soit Ω un ouvert borné du plan complexe et Ω_1 un ouvert relativement compact de Ω . On désigne par α un nombre strictement positif, par d la borne inférieure de $|z - u|$ pour z élément de Ω_1 et u élément du complémentaire de Ω dans $\mathbb{C}$, par $\Omega_{1,\alpha}$ la réunion des boules ouvertes de rayon αd et de centre dans Ω_1 , enfin par $\chi_{1,\alpha}$ la fonction caractéristique de $\Omega_{1,\alpha}$.

Montrer que la fonction

$$\zeta \mapsto \chi(\zeta) = \iint_{\mathbb{R}^2} \chi_{1,\alpha}(z) \varphi_{(\alpha d)^{-1}}(\zeta - z) dx dy$$

est indéfiniment dérivable en tant qu'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, à support compact dans Ω pour $\alpha < \frac{2}{3}$ et égale à 1 sur Ω_1 .

3° Soit g une fonction holomorphe dans Ω ; démontrer que, pour tout $z \in \Omega_1$, on a

$$(1) \quad g(z) = \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial \chi}{\partial \bar{u}} g(u) \frac{dv dw}{z - u}, \quad \text{avec} \quad u = v + iw, \quad v \in \mathbb{R}, \quad w \in \mathbb{R}$$

[on rappelle la notation $\frac{\partial \chi}{\partial \bar{u}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \chi}{\partial v} + i \frac{\partial \chi}{\partial w} \right)$].

On pourra appliquer la formule de Stokes dans l'ouvert défini par $|z - u| > r$, où r est un nombre strictement positif assez petit.

II. — Soit Ω un ouvert, borné ou non, du plan complexe. On note $H^2(\Omega)$ l'espace vectoriel normé des fonctions f holomorphes dans Ω et de carré sommable dans Ω , c'est-à-dire telles que

$$\|f\|_{\Omega} = \left(\iint_{\Omega} |f(z)|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}}$$

soit fini.

1° Évaluer $\|f\|_{\Omega}^2$ à l'aide des coefficients du développement de Taylor à l'origine de la fonction f , dans le cas où Ω est une boule de centre zéro et de rayon R .

2° Démontrer que $H^2(\mathbb{C})$ est réduit à 0.

Soit $z_0 \in \Omega$; on note par $\Omega - \{z_0\}$ l'ensemble des points de Ω distincts de z_0 . Montrer que toute fonction de $H^2(\Omega - \{z_0\})$ est la restriction à $\Omega - \{z_0\}$ d'une fonction de $H^2(\Omega)$.

3° Démontrer que, si Ω est le demi-plan $y > 0$, alors $H^2(\Omega)$ est de dimension infinie.

4° On se propose de prouver que $H^2(\Omega)$ est un espace complet pour la norme $f \mapsto \|f\|_{\Omega}$ donc qu'on peut lui appliquer les résultats de la théorie des espaces de Hilbert.

a) Soit Ω_1 un ouvert relativement compact de Ω et δ un nombre réel strictement positif. On note par Ω_1^δ l'ensemble des points de Ω_1 dont la distance à la frontière de Ω_1 est supérieure ou égale à δ . Démontrer, en utilisant la représentation intégrale (1) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que pour tout couple (φ, ψ) d'éléments de $H^2(\Omega)$ on a une inégalité de la forme

$$\sup_{z \in \Omega_1^\delta} |\varphi(z) - \psi(z)| \leq C(\varphi - \psi)_\Omega,$$

où le nombre positif C est indépendant de φ et de ψ .

b) En déduire que, si (f_n) est une suite de Cauchy dans $H^2(\Omega)$, (f_n) converge uniformément sur tout compact de Ω vers une fonction holomorphe f .

c) Démontrer que cette fonction f appartient à $H^2(\Omega)$ et qu'elle est limite de la suite (f_n) pour la norme de $H^2(\Omega)$.

III. — Dans cette partie l'ouvert Ω est supposé borné. On se propose d'étudier sous quelles conditions les polynômes sont denses dans $H^2(\Omega)$.

1° Soit K un compact de la sphère de Riemann (c'est-à-dire du plan complexe compactifié par l'adjonction d'un point noté ∞), une fonction définie dans un voisinage V de ∞ et holomorphe étant une fonction continue sur V , qui est holomorphe au sens habituel dans le complémentaire de ∞ dans V). On considère l'ensemble $\mathcal{H}(K)$ formé des couples (ω, f) , où ω est un voisinage ouvert de K et f une fonction holomorphe dans ω . On introduit dans $\mathcal{H}(K)$ la relation suivante :

$$(\omega, f) \mathcal{R} (\omega', f')$$

s'il existe ω'' voisinage ouvert de K inclus dans $\omega \cap \omega'$ tel que la restriction de f à ω'' soit égale à celle de f' à ω'' .

a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. On notera par $f^\sim$, ou $(\omega, f)^\sim$, la classe d'équivalence de (ω, f) . Le quotient de $\mathcal{H}(K)$ par $\mathcal{R}$ sera noté $H(K)$.

b) Soit (ω_1, f_1) un élément de $f_1^\sim$, (ω_2, f_2) un élément de $f_2^\sim$.

Montrer que, pour tout λ et tout μ appartenant à $\mathbb{C}$, on peut définir $\lambda f_1^\sim + \mu f_2^\sim$ en posant

$$\lambda f_1^\sim + \mu f_2^\sim = (\omega_1 \cap \omega_2, \lambda f_1 + \mu f_2)^\sim,$$

$\lambda f_1 + \mu f_2$ étant définie dans $\omega_1 \cap \omega_2$; $H(K)$ est ainsi muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

Démontrer aussi que la valeur de $f^\sim$ est définie en tout point k de K par $f^\sim(k) = f(k)$ si (ω, f) est un élément de $f^\sim$.

2° Dans cette question, K est le complémentaire de Ω dans la sphère de Riemann. Soit $f^\sim$ un élément de $H(K)$ et (ω, f) un élément de $f^\sim$. On considère un ouvert Ω_1 , voisinage du complémentaire de ω et relativement compact dans Ω .

Soit χ une fonction indéfiniment dérivable (en tant qu'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$), égale à 1 sur Ω_1 et à support compact dans Ω . Soit g une fonction holomorphe dans Ω . On pose

$$F(g) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(z) g(z) \frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}} dx dy.$$

Démontrer que le nombre $F(g)$ ne dépend pas du choix de la fonction χ ; en déduire que $F(g)$ ne dépend pas du choix de l'élément (ω, f) de $f^\sim$.

Vérifier que l'application $g \mapsto F(g)$, restreinte à $H^2(\Omega)$, est une forme linéaire continue.

3° Calculer $F(g)$ pour (ω, f) défini comme suit :

ω est le complémentaire de z dans la sphère de Riemann et f est la fonction $s \mapsto \frac{1}{z-s}$, ($s \in \omega$).

En conclure que l'ensemble des formes linéaires $F, f^{\sim}$ parcourant $H(K)$, est dense dans le dual de $H^2(\Omega)$.

4° Soit l une forme linéaire continue sur $H^2(\Omega)$ et soit u un élément du complémentaire Π de $\bar{\Omega}$. On considère la fonction Φ_u définie dans Ω par $z \mapsto \frac{1}{z-u}$ et qui appartient à $H^2(\Omega)$. On pose $\mathcal{J}_l(u) = l(\Phi_u)$. Démontrer que la fonction $u \mapsto \mathcal{J}_l(u)$ est holomorphe dans l'ouvert Π .

5° On désigne par $H_0^2(\Omega)$ le sous-espace fermé de $H^2(\Omega)$ engendré par les restrictions à Ω des fonctions holomorphes dans les voisinages ouverts de $\bar{\Omega}$. Soit l_0 une forme linéaire continue sur $H_0^2(\Omega)$. Démontrer que $\mathcal{J}_{l_0} = 0$ entraîne $l_0 = 0$.

On dit que Ω est étoilé par rapport à l'origine si, pour tout $z \in \Omega$, le segment $[0, z]$ est dans Ω .

Démontrer que, si Ω est étoilé par rapport à l'origine, et si de plus il est l'intérieur de son adhérence, on a

$$H_0^2(\Omega) = H^2(\Omega).$$

[Dans ce but on pourra montrer que, si f est un élément de $H^2(\Omega)$ et si l'on pose $f_\nu(z) = f(\nu z)$, on a

$$f_\nu \in H_0^2(\Omega) \quad \text{si} \quad \nu < 1, \quad \text{puis} \quad f = \lim_{\nu \rightarrow 1} f_\nu.]$$

6° Déterminer les coefficients du développement de $\mathcal{J}_l$ en série de puissances de $\frac{1}{u}$ au voisinage de ∞ .

7° Si Π n'est pas connexe, démontrer qu'il existe une forme linéaire continue, associée à un élément $f^{\sim}$ de $H(K)$, s'annulant sur les polynômes et non identiquement nulle.

En déduire que les polynômes sont denses dans $H_0^2(\Omega)$ si, et seulement si, Π est connexe, puis, qu'ils sont denses dans $H^2(\Omega)$ lorsque Ω est étoilé par rapport à l'origine et égal à l'intérieur de son adhérence.

IV. — A l'aide des résultats des trois premières questions, on se propose d'étudier une propriété d'approximation dans l'espace $H(\Omega)$ des fonctions holomorphes dans un ouvert Ω , borné ou non, de $\mathbb{C}$.

Soit (Ω_j) une suite d'ouverts relativement compacts de Ω , telle que tout compact de Ω soit inclus dans l'un des Ω_j ($j = 1, 2, \dots$).

1° Soit

$$p_j(f) = \left(\int \int_{\Omega_j} |f(z)|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Une suite (f_n) de $H(\Omega)$ sera dite convergente vers un élément f de $H(\Omega)$ si, pour tout j , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_j(f_n - f) = 0.$$

Montrer que, étant donné une série $\sum \alpha_j$ de termes tous strictement positifs, telle que $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j = 1$, la fonction

$$(g, h) \mapsto d(g, h) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \inf [p_j(h - g), 1]$$

est une distance sur $H(\Omega)$ et que les suites convergentes au sens précédent sont les suites convergentes pour la distance d .

2° Démontrer que la topologie introduite dans la question IV, 1° est la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de Ω .

3° Soit L un compact de Ω . On désigne par L^* la réunion de L et des composantes connexes relativement compactes de son complémentaire par rapport à Ω .

Démontrer que L^* est un compact de Ω .

4° Appliquant IV, 3°, aux $\overline{\Omega}_j^*$, déduire des résultats de la partie III que, si le complémentaire de Ω n'a pas de composante connexe compacte, les polynômes sont denses dans $H(\Omega)$.

Mécanique générale.

L'espace euclidien réel de dimension trois dans lequel seront étudiés les mouvements définis ci-dessous est supposé rapporté à un repère galiléen $O_1x_1y_1z_1$, considéré comme orthonormé et direct.

On désigne par « système H » tout système mécanique dont la position à tout instant t se déduit de la position initiale à l'instant t_0 par une similitude $S(t)$, produit d'un déplacement par une homothétie de rapport positif $k(t)$ [la fonction k sera supposée dans la suite pourvue de dérivées jusqu'à l'ordre 2 au moins, sauf dans la question II, 2°]. On notera que le fait pour un système mécanique d'être un système H est indépendant du choix de t_0 .

On appelle « point lié au système H » tout point mobile $M(t)$ dont la position à l'instant t se déduit de la position initiale $M(t_0)$ par la similitude $S(t)$. On appelle « repère associé au système H » tout repère orthonormé direct dont l'origine est un point lié au système H et dont les directions d'axes se déduisent par la similitude $S(t)$ de celles d'un repère orthonormé direct défini à l'instant t_0 .

On associe à toute « partie » d'un système H (ensemble de points liés à H) un scalaire positif ou nul qui est la masse de cette partie. La loi de conservation de la masse implique l'invariance de cette quantité par les transformations $S(t)$.

I. — CINÉMATIQUE ET CINÉTIQUE. — 1° Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système matériel soit un système H est que le champ des vitesses satisfasse, à tout instant t et pour tout couple de points M_1 et M_2 du système, à la condition

$$(1) \quad V(M_2) = V(M_1) + \Omega \wedge M_1M_2 + \lambda M_1M_2,$$

le vecteur Ω et le scalaire λ étant indépendants du couple M_1M_2 considéré, mais pouvant dépendre du temps. Exprimer λ à l'aide de $k(t)$ et de la dérivée $k'(t)$.

2° Déterminer, à un instant t donné, le lieu des points liés à un système H dont le vecteur vitesse est colinéaire à Ω . Montrer qu'il existe en général (on précisera sous quelle hypothèse) un point unique I dont la vitesse s'annule à cet instant (centre instantané de similitude à l'instant t).

3° Oxyz étant un repère associé au système H, on désigne par J le point déduit de I à chaque instant par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{k(t)}$. Soit C_1 la trajectoire de I relativement au repère $O_1z_1y_1x_1$ et soit C la trajectoire de J relativement au repère Oxyz. Comparer les directions des tangentes à C_1 et à C en deux points homologues I et J, ainsi que les différentielles ds_1 et ds des longueurs des arcs décrits respectivement par I sur C_1 et par J sur C.

4° Montrer que le centre des masses d'un système H est un point lié à ce système et que les axes principaux d'inertie en un point arbitraire O lié au système coïncident

au cours du temps avec les axes d'un repère associé au système. Exprimer le moment d'inertie du système par rapport à un tel axe en fonction de sa valeur à l'instant t_0 et de la fonction $k(t)$.

II. — DYNAMIQUE. — On se propose d'étudier ici, pour des systèmes H, différentes questions classiques en mécanique du solide. Dans toute cette étude, la condition pour qu'un système mécanique soit un système H est supposée réalisée uniquement par l'intervention de forces de liaison *intérieures* à ce système.

La position d'un système H quelconque est définie relativement au repère $O_1x_1y_1z_1$ par les coordonnées ξ, η, ζ de son centre des masses G, par les angles d'Euler ψ, θ, φ d'un repère central et principal d'inertie $Gxyz$ et par la valeur de k . On utilisera les composantes p, q, r sur $Gxyz$ du vecteur Ω défini dans la première partie. On désignera par m la masse du système et par A, B, C les moments principaux d'inertie du système en G à l'instant t_0 .

1° Sur un tel système H sont exercées des forces extérieures dont le torseur [E] a pour somme le vecteur S de composantes X, Y, Z sur $O_1x_1y_1z_1$ et pour moment en G le vecteur $\mathcal{M}_G$ de composantes $\mathcal{M}_x, \mathcal{M}_y, \mathcal{M}_z$ sur $Gxyz$.

Former les équations obtenues en appliquant les théorèmes généraux de la dynamique au système H.

Pour déterminer le mouvement de ce système, il faut avoir recours à une équation supplémentaire faisant intervenir les forces intérieures. On supposera que, pour un champ de vitesses virtuelles arbitraires du système satisfaisant à la condition (1) de la première partie et défini par des dérivées virtuelles $\xi'^*, \eta'^*, \zeta'^*, \psi'^*, \theta'^*, \varphi'^*, k'^*$ des paramètres, la puissance virtuelle des forces intérieures est de la forme $\mathcal{I}^* = P(k) k'^*$, où $P(k)$ est une fonction donnée du paramètre k , et l'on formera l'équation obtenue en appliquant le principe des puissances virtuelles au système H, lorsque le champ des vitesses virtuelles est défini par la seule dérivée virtuelle k'^* du paramètre k , les autres dérivées virtuelles étant nulles. On notera e la quantité :

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{GM}_i + \int_{\mathcal{D}} f(\mathbf{M}) \cdot \mathbf{GM} \, dv$$

en supposant que le système des forces extérieures comporte d'une part des forces $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$ appliquées respectivement aux points $M_1, M_2, \dots, M_n$ et, d'autre part, une répartition continue de densité $f(\mathbf{M})$ au point M; l'intégration est étendue au domaine $\mathcal{D}$, d'élément de volume dv , occupé par le système H.

2° On exerce sur un système H un ensemble de percussions extérieures $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$ appliquées respectivement aux points $M_1, M_2, \dots, M_n$ et l'on appelle [II] leur torseur (somme Π de composantes Π_x, Π_y, Π_z sur $O_1x_1y_1z_1$, moment μ en G de composantes μ_x, μ_y, μ_z sur $Gxyz$) et $\bar{\omega}$ la quantité $\sum_{i=1}^n \Pi_i \cdot \mathbf{GM}_i$.

On suppose que la puissance virtuelle du système des percussions intérieures est nulle pour tout champ de vitesses virtuelles satisfaisant à la condition (1) de la première partie.

En supposant donné l'état des vitesses du système H avant le choc par les valeurs des dérivées des différents paramètres, former les équations déterminant l'état des vitesses après le choc.

3° Étudier le mouvement d'un système H en l'absence de toute force extérieure, qu'elle soit donnée ou de liaison. On se placera uniquement ici dans l'hypothèse où la fonction $P(k)$ est égale à αk (α constant).

On étudiera, outre le cas général, les cas particuliers où le système H est sphérique ($A = B = C$) et celui où il est de révolution ($A = B \neq C$).

On recherchera s'il existe des mouvements dans lesquels k reste constant au cours du temps et l'on étudiera leur stabilité relativement aux variations de ce paramètre.

4° On suppose l'axe O_1z_1 vertical ascendant. On désigne par S un système H sphérique, homogène et de masse m , de rayon $R = kR_0$; S est soumis au champ de la pesanteur (son poids a pour composantes scalaires $0, 0, -mg$ sur $O_1x_1y_1z_1$) et S est astreint à rester en contact avec le plan horizontal $O_1x_1y_1$ du côté des points dont les cotes z_1 sont positives.

La fonction $P(k)$ est encore supposée égale à αk . Étudier le mouvement de S dans les deux hypothèses suivantes : le contact de S et de $O_1x_1y_1$ a lieu :

a) sans frottement;

b) sans glissement (le point lié à S qui est au contact avec le plan a une vitesse nulle par rapport à $O_1x_1y_1$).

Mathématiques appliquées.

N. B. — Deux feuilles de papier millimétré seront remises à chaque candidat.

Pour tous les tracés demandés l'unité graphique sera prise de 5 cm. Sur les deux feuilles l'origine des coordonnées sera le point situé à 5 cm du bord gauche et à 10 cm du bord inférieur de la feuille.

La qualité des constructions graphiques, la présentation, l'exactitude des valeurs numériques interviendront de façon importante dans la cotation des copies. Il est recommandé d'utiliser toutes les remarques géométriques susceptibles de simplifier les calculs.

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté, de dimension 2, et II un plan affine associé à E. Les points mobiles J, M, N, ... considérés dans le problème se déplacent tous dans II; leurs positions sont repérées par des fonctions $t \mapsto J(t)$, $t \mapsto M(t)$, $t \mapsto N(t)$... d'une même variable t , supposées continûment dérivables deux fois dans les intervalles où elles sont définies. Le mouvement du point J est une donnée du problème, la fonction $t \mapsto J(t)$ étant définie dans un intervalle contenant zéro. A tout mouvement d'un mobile M on associe celui du mobile N tel que, pour chaque valeur de t , la position $N(t)$ de N se déduise de la position $M(t)$ de M par la rotation d'angle $2t$ et de centre $J(t)$:

$$[(JM, JN) = 2t \pmod{2\pi}; JM = JN].$$

I. — Le plan II est rapporté à un repère orthonormé direct d'origine O, d'axes Ox et Oy . On appelle A le point de Oy d'ordonnée égale à un et (C) l'ellipse d'équation

$$x^2 + y^2 - xy\sqrt{2} + (\sqrt{2}-1)x - y = 0.$$

Le point J décrit (C); il passe en A pour $t = 0$ et, pour chaque valeur de t , sa position est telle qu'une détermination de l'angle de droites (OJ, OA) soit égale à $\frac{t}{2}$: $(OJ, OA) = \frac{t}{2} \pmod{\pi}$.

1° a) Sur une première feuille de papier millimétré, placer les points de (C) à coordonnées entières, le centre, dont on calculera les coordonnées, les axes et les sommets (unité graphique : 5 cm).

Construire la tangente en O et la tangente à (C) qui lui est parallèle. (On rappelle que $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$.)

b) Les coordonnées cartésiennes u et v de $J(t)$ peuvent s'écrire

$$u = r \sin \frac{t}{2}, \quad v = r \cos \frac{t}{2};$$

calculer r en fonction de t , puis u, v ($v-1$) en fonction de $\cos t$ et $\sin t$.

Montrer que les cordes $J(t)$ et $J(\pi-t)$ ont même direction; placer les tangentes à (C) parallèles à cette direction et leurs points de contact.

c) Graduer (C) en fonction de t en plaçant et marquant les points de paramètre $k\frac{\pi}{4}$, k étant entier. Calculer les paramètres t des sommets. Tracer (C) avec soin.

2° Soit O' le point mobile associé au point fixe O [$(JO, JO') = 2t \pmod{2\pi}$, $JO = JO'$ pour chaque valeur de t], et (Γ) sa trajectoire.

Calculer en fonction de t un système de coordonnées polaires de $O'(t)$, l'axe polaire étant Ox et le pôle O . En déduire :

- le rayon de courbure de (Γ) pour $t = 0$,
- la relation $\cotg \varphi + \cotg \psi = 2 \cotg t$, où φ est l'angle du rayon vecteur et de la tangente au point J de (C) et ψ celui du rayon vecteur et de la tangente au point O' de (Γ) pour une même valeur de t ,
- les positions des tangentes (T) et (T') perpendiculaires à l'axe d'angle polaire

$\frac{5\pi}{8}$, à l'aide d'une projection orthogonale sur cet axe.

Construire, sur la même feuille millimétrée que (C), les points O' correspondant aux points J graduant (C) et aux sommets de (C). Placer les tangentes en ces points ainsi que (T) et (T').

Tracer la courbe (Γ) par jonction des points en utilisant les éléments ainsi connus. (*L'étude des variations du rayon vecteur n'est pas demandée.*)

3° Soit (D) la droite d'équation $x + y = 1$. On se propose de rechercher un couple (m, n) de mobiles associés tel que, le point m se déplaçant sur (D), le point n varie sur Oy ,

a) Montrer géométriquement que, connaissant t , les positions de m et n sont en général déterminées; discuter.

b) Construire les positions de m et n correspondant aux positions de J graduant (C).

Cette construction sera effectuée sur la seconde feuille de papier millimétré et le milieu de chacun des segments mn ainsi obtenus sera désigné par la valeur de t correspondante.

c) Compléter la figure en construisant les segments mn correspondant aux valeurs $k\frac{\pi}{8}$ de t non encore rencontrées et leurs milieux.

Aucun calcul n'est exigé pour déterminer les nouveaux points J ; ils seront obtenus graphiquement sur la courbe (C) de la première figure et simplement reportés sur la seconde figure.

d) En appelant a l'abscisse de m et $1 + b$ l'ordonnée de n , qui dépendent de t , établir que les matrices $\begin{bmatrix} a\sqrt{2} \\ b \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} u \\ v-1 \end{bmatrix}$ sont liées par une relation de la forme

$$\begin{bmatrix} a\sqrt{2} \\ b \end{bmatrix} = K(t) \begin{bmatrix} \sin t & \cos t \\ \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) & -\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v-1 \end{bmatrix}$$

$K(t)$ étant un coefficient, que l'on calculera.

e) Soit (L) le lieu géométrique du milieu de mn .

Exprimer le rapport $\frac{b}{a\sqrt{2}}$ en fonction de t et du rapport $\frac{v-1}{u}$. En déduire l'étude de (L) au voisinage de A ainsi que les directions asymptotiques et les asymptotes de (L); pour ces calculs on utilisera, après les avoir évaluées directement sur le tracé de (C), les valeurs (approchées ou non) ou les limites de $\frac{v-1}{u}$, u et $v-1$ pour les valeurs étudiées de t .

f) A l'aide des éléments ainsi déterminés, donner un tracé approximatif de (L).

II. — Dans E on désigne par S_Δ la symétrie par rapport à la direction Δ , par R_v , la rotation d'angle v et, pour simplifier l'écriture, par R la rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$.

U et V étant des vecteurs quelconques de E, on note :

- $U \cdot V$ leur produit scalaire.
- $U \wedge V$ leur déterminant dans une base orthonormée directe,
- $R_v(U)$ et $S_\Delta(U)$ les images de U par R_v , et S_Δ .

On remarque que l'on a

$$U \wedge R(U) = U \cdot U \quad \text{et} \quad R_v(U) = \cos v \, U + \sin v \, R(U).$$

Exprimer $R(U) \wedge R(V)$, $U \wedge R(V)$ et $R(U) \wedge V$ en fonction de $U \wedge V$ ou $U \cdot V$.

Dans cette seconde partie, M et N désignent deux points mobiles associés assujettis à avoir des trajectoires rectilignes dont on donne seulement le point commun Ω ; pour $t = 0$, les deux mobiles sont en Ω . La fonction $t \mapsto J(t)$ est donnée.

1° Il existe un vecteur V de E, dépendant de t , tel que l'on a

$$\Omega M = \Omega J + R_{-t}(V), \quad \Omega N = \Omega J + R_t(V).$$

En notant $P = \Omega J = \cos t \, V$ et $Q = \sin t \, V$, les égalités précédentes deviennent :

$$\Omega M = P - R(Q) \quad \text{et} \quad \Omega N = P + R(Q).$$

Représenter géométriquement les vecteurs V, P et Q, connaissant Ω et les positions de J, M et N pour la valeur t de la variable.

Démontrer que, si M et N se déplacent sur des droites distinctes passant par Ω , P et Q satisfont :

— au système différentiel :

$$(1) \quad \begin{cases} X \wedge dX + Y \wedge dY = 0, \\ X \cdot dY - Y \cdot dX = 0 \end{cases}$$

— et à une condition qui les rattache à ΩJ .

2° Si X et Y sont deux variables de E, le système (1) est une condition nécessaire et suffisante pour que $X + R(Y)$ et $X - R(Y)$ aient des directions fixes. On se propose de montrer par intégration que, lorsque X n'a pas une direction fixe, le système (1) établit entre les variables X et Y non nulles une relation de la forme $Y = \mathcal{C}(X)$, $\mathcal{C}$ étant un opérateur linéaire qui ne dépend que des constantes d'intégration.

a) On décompose Y suivant X et $R(X)$:

$$Y = \alpha X + \beta R(X).$$

Démontrer que les scalaires α et β satisfont à une relation de la forme

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha \operatorname{tg} \lambda = 1,$$

où λ est une constante arbitraire.

Démontrer de plus que, si θ est l'angle polaire de X relativement à un vecteur fixe non nul de E , les différentielles $d\theta$ et $d\alpha$ sont liées à β par une relation simple.

Calculer α et β en fonction de θ , de λ et d'une seconde constante d'intégration.

b) En déduire que, si (X, Y) est solution de (1), les vecteurs X et Y sont liés par une relation de la forme

$$Y \cos \lambda - X \sin \lambda = S_{\Delta}(X), \quad \text{ou} \quad Y \sin \lambda + X \cos \lambda = S_{\Delta}(Y),$$

dans laquelle l'angle λ et la direction Δ sont arbitraires.

3° Revenant à l'étude proposée des couples (M, N) , démontrer qu'à tout angle μ non nul et à toute direction Δ on peut associer un vecteur unique W dépendant de t et un couple unique de mobiles (M, N) , tels que l'on ait

$$\Omega M = R_{-\mu}(W) + S_{\Delta}(W), \quad \Omega N = R_{\mu}(W) + S_{\Delta}(W).$$

Exprimer W en fonction de ΩJ , μ et Δ .

Quels sont les vecteurs propres et les valeurs propres des opérateurs $R_{\mu} + S_{\Delta}$ et $R_{-\mu} + S_{\Delta}$? Connaissant Ω , Δ , μ et W , placer sur une figure les supports des trajectoires de M et N et indiquer une construction géométrique des positions des mobiles pour une valeur quelconque de t .

Rechercher μ , Δ et W dans le cas des points m et n de I , 3°.

4° Caractériser dans l'ensemble des endomorphismes de E la famille des opérateurs $\mathcal{G}$ obtenus dans II, 2°.

Montrer que toute solution (X, Y) de (1) peut s'exprimer sous la forme :

$$\begin{cases} X = Z \cos \frac{\lambda}{2} - S_{\Delta}(Z) \sin \frac{\lambda}{2}, \\ Y = Z \sin \frac{\lambda}{2} + S_{\Delta}(Z) \cos \frac{\lambda}{2}, \end{cases}$$

où Z est un vecteur arbitraire et où λ et S_{Δ} ont mêmes significations qu'au II, 2° [on comparera à cet effet $X + S_{\Delta}(Y)$ et $Y - S_{\Delta}(X)$].

Pour vous détendre..., ou pour vous cultiver, après lecture des textes officiels ou des énoncés d'agrégation,

lisez les publications de l'APM.

Précisions sur celles-ci : p. 420, 571 et 572.

COURS DE MATHÉMATIQUES

Tome I : NOTIONS FONDAMENTALES D'ALGÈBRE ET D'ANALYSE

par **Lucien CHAMBADAL** et **Jean-Louis OVAERT**

Anciens élèves de l'École Normale Supérieure

Cet ouvrage s'adresse aux élèves des classes de mathématiques spéciales et aux étudiants du premier cycle de l'enseignement supérieur. Plus précisément, les matières traitées recouvrent le programme A'2 et le programme M.P.

Le plus grand soin a été apporté à la rigueur, à la terminologie et à la portée des hypothèses. Les énoncés sont rédigés de telle sorte qu'on puisse les utiliser sans avoir à référer au contexte. Bien évidemment, la lecture d'un texte mathématique ne saurait être dissociée de la pratique de très nombreux exercices : chaque chapitre est donc suivi d'exercices gradués.

in-8° (16 × 25), 704 pages, 1966 cartonné 59 F

Tome II : ALGÈBRE. APPLICATIONS A LA GÉOMÉTRIE, en préparation.

Tome III : ANALYSE. APPLICATIONS A LA GÉOMÉTRIE, en préparation.

Collection de MATHÉMATIQUES ÉCONOMIQUES

Fascicule V

LOGIQUE A TROIS VALEURS - LOGIQUE A SEUIL

par **Michel CARVALLO**

Chef de Travaux d'Économétrie

chargé d'un cours à la Faculté des Sciences de Paris

M. Carvallo a entrepris l'étude des fonctions à seuil, qui semblent jouer un rôle important dans la technologie des fonctions postiennes. La logique à seuil postienne est toute désignée pour servir d'instrument d'étude dans les questions de fiabilité et de décision en présence d'incertitude. Il est donc nécessaire d'avoir à sa disposition un ensemble de formules et de règles; parmi les ensembles possibles, celui sur lequel s'est arrêté le choix de M. Carvallo paraît heureux et capable d'ouvrir la voie à des recherches ultérieures.

In-8° (16 × 25), 152 pages, 1968 38 F

GAUTHIER-VILLARS - ÉDITEUR - PARIS

Réunions du Bureau et du Comité

Réunion du Bureau national, le 21 septembre 1968

Présents: M^{me} Touyarot, MM. Brousseau, Dumont, Colomb, Génestine, M^{me} Audin, MM. Ramis, Révuz, Vissio, Gilbert, Glaymann, Blanzin, Clopeau, Chevallier, Walusinski.

Excusés: MM. Dehame, Duvert, Gauthier, Gouret, Poly.

Étant donné les nombreuses commissions ou réunions ministérielles qui ont siégé durant l'été et dans lesquelles l'association a été représentée par divers collègues, il a paru opportun de réunir tous ceux qui assument des responsabilités au sein de l'A.P.M.E.P. : membres du Bureau, présidents et secrétaires des commissions. Cette réunion de Bureau « élargi » s'est tenue à l'I.P.N. le 21 septembre de 20 h 30 à 23 h 30.

1. Avant d'aborder l'ordre du jour très copieux, il est décidé sur la demande de Clopeau, trésorier, de régler des questions relatives à la gestion de l'A.P.M.E.P. : paiement de diverses factures, validation pour les chèques postaux ou bancaires des signatures des membres du Bureau responsables de ces questions. Le Bureau a appris que le trésorier administratif, M. Ferracci, était sérieusement malade; il lui a adressé ses vœux de prompt rétablissement (1).

2. La dernière réunion du Comité (9 juin 1968) ayant abouti à la rédaction d'une motion qui a été adressée à toutes les Régionales, le Bureau souhaite que celles-ci lui fassent parvenir en retour, comme certaines l'ont déjà fait, leurs remarques à ce sujet : critiques, suggestions,... voire approbations.

3. *Rentrée 68.* Les questions abordées sont les suivantes : vie dans les lycées, classes de Sixième, classes terminales secondaires, baccalauréat, classes de H.E.C.

Vie dans les lycées: Vissio a représenté l'A.P.M.E.P. à une réunion, tenue fin juin et à laquelle participèrent : les associations de spécialistes (telles l'A.P.M.E.P., l'Union des Physiciens, etc), les syndicats, les associations de parents d'élèves, D.J.S. Y furent débattus les principes à présenter en commun à la commission ministérielle alors en projet qui devait s'occuper de ces questions. Cette commission s'est effectivement réunie (fin juillet et début août); elle a déposé diverses conclusions reprises par la presse; le Conseil supérieur de l'Éducation nationale devrait ratifier ces propositions.

(1) Au moment où ce Bulletin est mis en composition, nous sommes heureux d'apprendre que notre Ami Ferracci est rentré chez lui et qu'il a repris toutes ses activités.

Classes de Sixième : Les problèmes posés par ces classes furent évoqués au cours de deux audiences accordées à l'A.P.M.E.P., le 2 août par M. Alliot, directeur du Cabinet du Ministre, le 26 août par M. Gauthier, directeur de la pédagogie, des enseignements scolaires et de l'orientation. Participèrent à ces audiences : M^{me} Touyart, MM. Clopeau, Blanzin, Glaymann et Walusinski. Au cours de ces entretiens furent acceptées les idées de « tronc commun » en Sixième et Cinquième comportant comme trois matières fondamentales le français, une langue vivante et les mathématiques. Il était entendu que pour les mathématiques l'horaire réglementaire de quatre heures devait être rétabli. C'est dire que la surprise fut grande pour le Bureau de l'A.P.M.E.P. d'apprendre au début de septembre que cet horaire était ramené à trois heures sur intervention, semble-t-il de l'Inspection générale de mathématiques. La réaction du Bureau fut immédiate sous la forme de l'envoi d'un télégramme au Ministre et d'une lettre explicative dont voici le texte :

Monsieur le Ministre,

Des informations nous apprennent qu'il ne serait pas envisagé, pour la rentrée 1968, de revenir, au moins, à l'horaire réglementaire de mathématiques en classe de sixième.

Nous ne pourrions comprendre que vos déclarations relatives au « tronc commun » et aux matières fondamentales « mathématique, français, une langue vivante », laissent à l'enseignement des mathématiques, en sixième, le rôle de parent pauvre (ce qui est d'ailleurs son triste privilège dans tout le premier cycle, contrairement à ce qui se passe dans de nombreux pays étrangers).

Dans ces conditions, notre Association ne pourrait pas ne pas protester, consciente qu'elle serait d'œuvrer dans l'intérêt général et ce, d'autant plus que des promesses faites ne seraient pas tenues.

Nous espérons encore que nos informations sont sans fondement et qu'il vous sera possible de nous donner tout apaisement, au cours d'une audience que nous sollicitons, en nous confirmant la promesse faite par M. Gauthier, le 26 août, aux représentants de notre Association.

Je vous prie de croire, Monsieur le Ministre, en mes sentiments respectueux.

Le secrétaire général de l'A.P.M.

Le 13 septembre, le Bureau était reçu par M. Prum, conseiller technique auprès du Cabinet du Ministre et spécialement chargé des affaires du premier cycle secondaire. L'entrevue aboutit au compromis suivant : le Ministre, par une circulaire adressée aux chefs d'établissement et par un communiqué diffusé dans la presse, précisait que l'horaire de quatre heures devait être appliqué *partout où c'était possible*. Voir le texte de ce communiqué dans notre *Bulletin* 263-4, p. 398.

De son côté, le Bureau de l'A.P.M.E.P. faisait appel à l'opinion publique par un communiqué aux journaux ainsi qu'à ses Régionales afin que tous les Collègues et les associations de parents d'élèves puissent agir localement auprès des chefs d'établissement pour faire rétablir ces quatre heures.

Classes terminales : Un des problèmes examinés dans le cadre de la vie des lycées en 68-69 a concerné l'allègement des programmes dans les classes terminales. Au nom de l'A.P.M.E.P., Vissio demanda que ces allègements concernent toutes les disciplines puis présenta, en accord avec M. Samuel au nom de D.J.S., ceux qui étaient souhaitables en mathématiques. Précisons que ces allègements concernent le baccalauréat non les classes correspondantes. Il fut demandé qu'en C et E les questions « allégées » puissent être étudiées de façon facultative par adjonction d'une heure à l'horaire de C et de deux heures à l'horaire de E. Il fut également demandé que toutes les décisions prises soient portées à la connaissance des élèves

et des professeurs avant la rentrée scolaire. L'avenir dira ce qu'il restera de tout ce travail accompli en juillet. A la date du 21 septembre, seul le principe des allègements est acquis; aucun texte n'est publié. (N.D.L.R. : le texte a enfin paru dans le *B.O.* du 10-10-68.)

Baccalauréat : Bien que la doctrine constante de l'A.P.M.E.P. ait toujours été de considérer ce problème comme mineur, — « nous aurons de bons examens quand nous aurons un bon enseignement » —, Vissio, chargé des relations avec les autres associations a suivi de près les propositions faites à la commission ministérielle, par D.J.S. en particulier. L'A.P.M.E.P. approuve le projet présenté, spécialement la suppression de la session de septembre.

Classes préparatoires à H.E.C. : De nombreux collègues enseignant dans ces classes ont attiré l'attention de l'A.P.M. (Cf. *Bulletin* n° 262, p. 273) sur la situation suivante : l'horaire (7 heures de cours, 3 heures de travail dirigé) et le programme avaient été choisis d'un commun accord par la direction de l'école, l'Inspection générale et les professeurs; or les textes officiels (après quelle intervention?) réduisent l'horaire à 7 heures + 1 heure. Une première démarche, en mars 68, pour obtenir 7 + 2, reste sans écho ainsi qu'une deuxième effectuée le 26 août. Aussi, le 13 septembre, le Bureau de l'A.P.M. s'adressa-t-il au conseiller technique du cabinet responsable de cette question. La promesse d'une réponse lui fut faite. Au 21 septembre, à deux jours de la rentrée, celle-ci n'étant pas parvenue, le Bureau mandate Vissio, secrétaire général, pour envisager avec les collègues intéressés l'action à entreprendre.

Concours de recrutement : Si, en définitive, les C.A.P.E.S. de mathématiques se passèrent sans trop d'incidents, Vissio, au nom de l'A.P.M., constata combien les conditions imposées par le Président du jury du C.A.P.E.S. féminin étaient abusives : contrôle policier, admission d'un seul auditeur par salle après contrôle de son identité par la police.

Pour les agrégations de mathématiques, sur 274 admissibles, 162 refusèrent de passer l'oral. L'A.P.M. représentée par Glaymann et Walusinski obtint qu'une commission comprenant des représentants des grévistes, des administrateurs du Ministère, des membres des Jurys, des responsables de l'A.P.M., règle, à la satisfaction générale, les deux questions suivantes : situation de ces jeunes collègues à la rentrée de 1968, situation de ceux mêmes à la fin de la présente année scolaire.

Sur ce deuxième point, aucune garantie n'a encore été obtenue. L'A.P.M. devra veiller à ce que la commission ministérielle sur la formation des maîtres étudie et résolve le problème. Sur le premier point il semble possible de régler tous les cas posés. L'A.P.M. fait appel à tous ses membres pour aider, par tous les moyens à leur disposition, nos jeunes collègues grévistes. En effet, que l'on approuve le mouvement de grève ou qu'on le désapprouve, il faut reconnaître aux « agrégibles » le rare mérite d'avoir sacrifié leur propre confort (avantages matériels et financiers) à l'obtention de la véritable formation pédagogique qui était l'objectif de leur mouvement.

I.R.E.M. : La création de trois I.R.E.M. (Paris, Lyon, Strasbourg) ayant été décidée par le Ministre, l'A.P.M. fut représentée par Revuz, Glaymann et Vissio dans les commissions (5 septembre, 20 septembre) chargées de prévoir les modalités de mise en place. Ces trois I.R.E.M. seront dirigés respectivement par Revuz, à Paris, Glaymann à Lyon, Frenkel à Strasbourg. La quadruple tâche des I.R.E.M. est : 1° participation à la formation initiale des maîtres; 2° contribuer à la formation permanente des maîtres; 3° diriger l'expérimentation et animer la recherche pédagogique; 4° rassembler et diffuser la documentation relative à l'enseignement des mathématiques. Cette année, il est convenu que le point 2 est considéré comme prioritaire, spécialement pour préparer la mise en application en septembre 69 des nouveaux

programmes de Sixième et de Seconde. Les collègues qui bénéficieront de cette formation permanente seront des volontaires; ils bénéficieront d'une décharge de service de trois heures.

Formation des maîtres : Une commission ministérielle chargée de cette question devait se réunir début septembre, puis mi-septembre; il semble qu'elle doive se réunir début octobre. Cette commission comprendra des représentants d'un très grand nombre d'associations diverses mais l'A.P.M. comme les autres associations de spécialistes semble exclue. Le Bureau demande à être représenté dans les sous-commissions de travail; il mandate M^{me} Touyarot, MM. Blanzin, Glaymann et Jacquemier pour le représenter.

Réforme pédagogique : Cette commission ministérielle se réunira le 25 septembre; l'A.P.M. non plus que les autres associations de spécialistes, n'y est invitée. Le Bureau de l'A.P.M. demande à participer aux sous-commissions de travail et il désigne pour l'y représenter : M^{me} Touyarot et M. Jacquemier pour l'enseignement élémentaire. Blanzin et Dumont pour le premier cycle secondaire, Chevallier et Vissio pour le deuxième cycle, Gilbert et Génestine pour le technique, Glaymann pour la sous-commission « examens et notations ».

4. Sur les publications. — Walusinski rend compte de la fabrication d'un *Bulletin* double 263-264 daté juillet-octobre qui devrait nous faire rattraper le retard pris en mai-juin; ce *Bulletin* sera aussi volumineux que le 261; il sera suivi par le 265, dernier *Bulletin* de l'année 68, daté novembre-décembre.

Entre temps, la brochure « *Charte de Chambéry* », considérée comme premier titre d'une nouvelle collection, la *Bibliothèque d'information sur l'enseignement mathématique*, sera adressée à tous les membres de l'A.P.M. et aux abonnés; elle sera tirée à 15 000 exemplaires et une large diffusion parmi les Collègues qui ne connaissent pas l'A.P.M.E.P., parmi les parents d'élèves et toutes les personnes intéressées par les problèmes de l'enseignement devra être envisagée; ce sera une tâche importante pour les Régionales.

Le livre de Guerber et Hennequin, *Initiation aux probabilités* est en bonne voie d'achèvement; livraison aux souscripteurs prévue pour novembre ou décembre.

Le travail d'imprimerie pour le premier recueil de fiches du dictionnaire est mis en route. Sous le titre « *La mathématique parlée par ceux qui l'enseignent* » un recueil d'environ 100 fiches parues avant 1968 sera réalisé dans le cadre de la bibliothèque d'enseignement mathématique. L'ouvrage sera mis en souscription dès que nous aurons une idée précise du prix de revient.

Walusinski a eu la visite des responsables de l'Imprimerie Alençonnaise et de Firmin-Didot qui ont fusionné. L'A.P.M.E.P. qui a pu apprécier les bons services de l'Alençonnaise, ne pourra que trouver des possibilités nouvelles pour ses publications dans cette concentration industrielle qui accroît les moyens techniques des usines d'ailleurs rénovées d'Alençon.

Les tâches relatives à nos publications sont cependant de plus en plus lourdes (avec la brochure, nos Collègues auront pratiquement reçu six bulletins dans l'année; par ailleurs, ils auront reçu les annales d'examen 67). Une réunion régulière du Comité de rédaction est indispensable pour examiner les articles et organiser le travail. Réunion prévue pour le 12 octobre.

Le Bureau fixe la prochaine réunion du Comité national au dimanche 13 octobre.

Le Secrétaire général : P. VISSIO.

Réunion du Comité du 13 octobre 1968

Étaient présents : M^{mes} ou M^{lles} Audin, Biard, Brénéol, Deroo, Lichau, Méténier, Touyarot; MM. Bernard, Blanzin, Chevallier, Clopeau, Colomb, Crépin, Crozes, Dehame, Des Cognets, Duceux, Dumont, Duvert, Fauquette, Gauthier, Génestine, Gilbert, Glaymann, Gouret, Hameau, Hennequin, Jacquemier, Klein, Revuz, Robbe, Roumanet, Vissio, Vogt.

Excusés : M^{lle} Félix, MM. Camy Peyret, Ramis, Thierus, Walusinski.

La séance est ouverte à 9 h 10 sous la présidence de M^{me} Touyarot.

Elle débute par un large exposé de Vissio qui apporte au Comité les informations concernant les développements de la situation depuis la dernière réunion du Comité et l'activité du Bureau de l'A.P.M. pendant cette période. Se reporter, pour ces informations, au compte rendu de la réunion du Bureau du 21 septembre.

La rentrée 1968.

Les difficultés de la rentrée 68 sont évoquées par différents collègues : pénurie de professeurs de mathématique dans certains secteurs, difficulté de l'application du nouvel horaire de quatre heures en Sixième... Dans l'enseignement supérieur, les I.U.T. offrent des places en nombre trop insuffisant par rapport aux demandes : 600 candidats pour 60 places dans une section grenobloise... et comment juger sur dossier? D'une façon générale les difficultés de passage d'un secteur d'enseignement théorique classique au secteur technique subsistent, si elles ne sont pas aggravées. Ces problèmes, pour être de chaque année, n'en sont pas pour autant moins irritants.

D'autres problèmes, posés par le « mois de mai » seront plus faciles à régler : des expériences sont signalées comme étant en cours en vue d'un nouveau style d'enseignement ou de contrôle de cet enseignement.

La formation initiale des maîtres.

C'est cependant le recrutement des enseignants par la voie de l'agrégation ou du C.A.P.E.S. qui représente le point chaud de la situation actuelle. On connaît la manière dont furent contestés ces concours; on sait que des commissions ministérielles veulent trouver des solutions en ce qui concerne la formation des maîtres, les programmes, la durée des études, les diplômes.

Le Comité souhaite la présence de ses membres dans les commissions ministérielles actuellement au travail : il faut être présent, mais il faut aussi savoir ce que l'on veut, ce qui nécessiterait des études approfondies. Il faut bien reconnaître que ce travail, déjà lourd pour un syndicat, présente de plus grandes difficultés encore pour notre Association où tous les animateurs sont bénévoles et ont ici et là des tâches absorbantes. Cependant, en raison de l'efficacité possible des travaux en commission ministérielle, l'A.P.M. y manifestera sa présence en tenant compte de certains principes sur lesquels il ne semble pas qu'il y ait de désaccord :

1° La formation de l'enseignant doit être comparable à celle des cadres du secteur privé : cinq années pour les professeurs du second degré, deux ou trois années au moins pour les enseignants du premier degré.

2° La maîtrise d'enseignement doit être accessible à une masse suffisante d'étudiants, en raison des immenses besoins du second degré en maîtres de mathématique. Cependant la licence est condamnée.

3° La notion de professeurs bivalents au niveau du premier cycle du second degré est condamnée. Au niveau élémentaire, les instituteurs pourraient spécialiser leurs enseignements, ce qui aurait en outre l'avantage d'habituer les enfants, dès le début, à la pluralité des maîtres.

4° Une formation unique des maîtres au niveau du premier cycle est sounaitable quelle que soit la disparité actuelle. La notion de promotion corporative actuellement liée au niveau de l'enseignement devant faire place à des possibilités de promotion « sur place », rien ne s'opposant à ce qu'un instituteur ait, pour certaines raisons, une situation matérielle supérieure à celle d'un professeur de même ancienneté.

5° L'horaire de l'enseignant devrait dépendre du niveau de son enseignement et non du diplôme universitaire qu'il a pu obtenir dans sa jeunesse.

La promotion interne peut se développer soit un un même niveau d'enseignement, soit par passage à un niveau supérieur (voire inférieur).

La formation continue des maîtres.

Le Comité se félicite de la création des I.R.E.M. et souhaite leur développement. Quelles seront les futures créations? Des noms sont avancés... Trois I.R.E.M. cette année, quatre autres l'an prochain... C'est beaucoup en regardant le passé; c'est bien peu face aux tâches immenses qui leur incombent et l'objectif du sixième plan prévoyant un I.R.E.M. par académie vers 1975 ne tient pas compte de la difficulté de mise en place des nouveaux programmes du cycle d'observation.

D'ici là, il est souhaitable qu'une action parallèle permette l'information comme l'A.P.M. l'a déjà fait en l'absence d'I.R.E.M. Toutefois, il ne faudra pas perdre de vue l'intérêt syndical et les droits de chaque enseignant; il faudra maintenir une pression pour que soient fournis aux enseignants les crédits et le personnel nécessaires à leur formation continue.

Il est signalé que certains secteurs géographiques sont particulièrement défavorisés et que les bonnes volontés ne trouvent pas suffisamment d'appui auprès des C.R.D.P. ou même des facultés. La solitude est un facteur démoralisant alors que le travail d'équipe est exaltant.

A la question posée d'une concertation entre les I.R.E.M. pour leur action, est opposée la notion de liberté qui doit être la plus large possible, au moins au départ. Il se peut que se dégagent ensuite des idées directrices. Les difficultés principales que l'on peut attendre viennent de la lenteur des décisions officielles en ce qui concerne la création des I.R.E.M. et de la réalisation effective des décharges d'horaire pour les participants. Il faut noter aussi que les I.R.E.M. n'ont pas actuellement de mission officielle auprès des instituteurs, mais que certains groupes d'enseignants pourront être constitués à ce niveau conformément aux idées précédemment émises par l'A.P.M. Ils devraient permettre d'aboutir à des conclusions précises à destination de nouveaux programmes dans l'enseignement primaire.

Questions diverses.

1° Le Congrès de la C.I.E.M., organisé par Glaymann, se tiendra à Lyon, du 24 au 30 août 1969. On lira des informations à ce sujet dans un prochain *Bulletin*.

2° Nos collègues de Grande-Bretagne nous convient à assister à des journées organisées à Exeter du 19 au 22 avril 1969 : la présence d'une vingtaine de collègues est souhaitée. Une autorisation d'absence leur serait indispensable. D'autre part les frais de voyage et de séjour... ne peuvent être pris en charge par l'A.P.M.

3° Les journées 1969 de l'A.P.M. ne sont pas encore définies, ni dans l'espace

(mais peut-être du côté de Clermont-Ferrand ou de sa banlieue), ni dans le temps (mais peut-être vers la Pentecôte), ni dans sa substance.

4° Les journées de Chambéry devaient donner lieu à certains remboursements de frais. De nouvelles démarches ont été entreprises auprès de la Direction des enseignements afin que les promesses se réalisent.

5° Les trésoriers des Régionales constituées pourront solliciter des fonds auprès de notre trésorier qui a mis sur pied, à leur intention, une application affine adéquate (et adoptée par le Comité).

6° Malgré l'absence de baccalauréat écrit, la maison Vuibert propose des annales. Le Comité est d'accord pour les acquérir en raison du contrat passé avec les adhérents de l'A.P.M. : « la cotisation normale comprend le service du *Bulletin* et des annales ».

Action future.

Une demande d'audience sera adressée à Monsieur le Ministre de l'Éducation Nationale afin d'étudier les problèmes posés par :

- les créations (?) d'I.R.E.M. et la formation permanente là où il n'est pas encore question d'I.R.E.M.;
- les horaires de mathématiques en Sixième et en Terminale E;
- la mise en application des nouveaux programmes;
- les expériences pédagogiques;
- les travaux des Commissions ministérielles;
- les C.A.P.E.S. et Agrégations 1969.

Une réunion de Bureau permettra la mise au point des questions abordées au cours de cette audience et fera le point du travail dans les Commissions ministérielles.

Ultérieurement, un travail d'information auprès du Public sera entrepris avec l'aide de la Presse.

Séance levée à 13 heures ... passées.

Régionalisons ...

Avant même que d'autres en parlent, l'A.P.M.E.P. avait décidé de donner la parole aux régions. Il reste encore beaucoup à faire pour que cette organisation nouvelle donne satisfaction aux uns et aux autres, pour qu'elle devienne vraiment efficace.

Après une année de rodage, voici le point sur la mise en place de vos régionales.

Le tableau (p. 419) donne un résumé des renseignements connus à la date du 1^{er} octobre 1968.

Il est possible que des erreurs ou des oublis subsistent : vous voudrez bien les signaler au secrétaire « qualifié »; comme tout secrétaire, il croule sous les papiers et n'est pas encore bien remis des vacances.

Au long de l'année, les « lacunes » seront comblées et, par exemple à « Nice » on pourra lire les noms de quelques audacieux individus qui oseront braver la tempête.

— *Si votre Régionale n'est pas organisée :*

Voir *Bulletin* n° 258, pages 312 et suivantes : renseignements et modèle de statuts.

— Si vous avez un numéro de C.C.P. : le faire connaître au trésorier qui vous fera parvenir 400 F.

N'oubliez pas que :

— le trésorier accepte de vous faire un virement à condition que le dépôt des statuts vous ait permis d'obtenir un C.C.P.

— si la somme de 400 F est insuffisante compte tenu de vos activités, vous pourrez obtenir une rallonge;

— à chaque réunion du comité national, un responsable de la régionale peut assister à cette réunion (voyage remboursé);

— il faut penser dès maintenant au renouvellement du comité et susciter des candidatures; chaque candidat sera tenu de présenter sa candidature par un article court;

— tout membre de l'association peut assister aux séances de l'une quelconque des commissions; il lui suffit de se faire connaître au secrétaire de la commission en question pour être convoqué;

— tout membre de l'association peut et doit proposer des articles à la rédaction du bulletin;

— des sections locales peuvent être organisées; elles reçoivent une aide financière de la régionale.

Certaines régionales ont déjà publié des fascicules sur des sujets divers; les demander au responsable de cette régionale. Voici les dernières publications connues :

— Rennes : bulletin n° 1 de la régionale (juillet 68);

— Nantes : fondements de l'analyse moderne (janvier 68);

— Amiens : sur la mesure des angles;

— Lyon : brochure d'information pour les parents (Fédération des associations de parents d'élèves, 12, rue Neuve, 69-Lyon-2^e).

Pour obtenir des *bulletins d'adhésion* :

M. Blondel, 154, avenue Marcel-Cachin, 92-Châtillon-sous-Bagneux.

Liste des adhérents: la liste par département, établie en 65-66 a été envoyée à toutes les régionales qui l'ont réclamée. Cette liste est bien sûr incomplète.

Elle comporte des erreurs du fait des mutations en particulier.

Dès que la nouvelle édition sera prête, chaque régionale recevra ce qui lui revient.

Dans chaque régionale, il sera bon que, dans chaque établissement se manifeste un « responsable A.P.M.E.P. » ce qui facilitera la liaison entre les collègues et le bureau de la régionale, et la collecte des cotisations.

Tout le courrier concernant les régionales est à envoyer à :

R. Gauthier, 11, boulevard des Brotteaux, 69-Lyon-6^e, tél. : 24-00-93.

Lyon, le 1^{er} octobre 68,

R.G.

La Régionale de Clermont.

Elle est en pleine réorganisation. Une Commission préparatoire, de collègues du second degré, a précisé cette réorganisation.

Elle a convoqué les collègues enseignant dans le Second Cycle, de l'Académie de Clermont, à suivre et discuter un exposé de M^{me} Hennequin, professeur à la Faculté des Sciences, le jeudi 9 mai 1968, sur « l'application des notions de boules et de voisinages, à l'étude de la continuité et des limites dans l'enseignement du second

degré, niveau Première et Terminale ». M. l'Inspecteur général Cagnac, en tournée d'inspection à Clermont, a bien voulu nous honorer de sa présence et nous faire part de ses observations.

A l'issue de cette réunion, a été constitué un bureau provisoire, groupant des collègues de l'Allier, de la Haute-Loire et du Puy-de-Dôme. Ce bureau s'est proposé l'organisation des activités de rentrée :

1^o Une Assemblée générale est proposée pour constituer légalement la Régionale de Clermont (présidence, trésorerie, bureau), le jeudi 10 octobre 1968.

2^o Le 14 novembre une série d'exposés, suivis de discussion, sur « l'organisation de l'activité mathématique au Lycée » (Planning cours et exercices, méthodes d'enseignement, clubs et bibliothèques mathématiques) sera ouverte à l'intention des stagiaires de l'Académie, avec la participation des collègues conseillers.

3^o Le 19 décembre un exposé sur « la programmation linéaire » sera donné par M. Guerber, professeur à la Faculté de Droit, suivi d'une discussion sur l'utilisation dans le second degré.

La suite des activités est laissée à l'initiative du bureau définitif.

Au Lycée Blaise Pascal, à Clermont, sont en outre prévues des séances de projection et discussion des émissions « chantiers mathématiques » consacrées aux « angles », et la rédaction de définitions communes aux professeurs de mathématiques du Lycée. Les collègues intéressés y sont cordialement invités.

Régionale de Lyon.

L'A.P.M.E.P. organise des Cercles de Mathématique moderne (C.M.M., Cercles de Mathématique, organisés à Lyon pour l'information des parents) ouverts à ceux qui désirent s'initier à la mathématique contemporaine et s'informer sur son introduction dans l'enseignement.

Aucune connaissance mathématique préalable n'est nécessaire.

En principe, les séances ont lieu tous les 15 jours.

Voici pour chaque C.M.M. l'adresse du local, le nom du responsable :

Lycée Ampère, 29, rue de la Bourse, Lyon-2^e : M. Louis DUVERT, 37-08-51, mercredi de 20 h 30 à 22 heures.

Lycée Jean-Moulin, 1, place des Minimes, Lyon-5^e : M. Louis DUVERT, 37-08-51, vendredi de 20 h 30 à 22 heures.

Lycée Charrial, 93, rue A. Charrial, Lyon-3^e : M. COLOMB, 51-93-17, mardi de 18 h 30 à 20 heures.

Maison des Jeunes et de la Culture, 101, boulevard des États-Unis, Lyon-8^e : se renseigner à la M.J.C.

Bron C.E.S. de Garçons, avenue Édouard-Herriot Bron : M. GAGNAIRE, au C.E.S., 70-83-47, mercredi de 20 h 30 à 22 heures.

Francheville-le-Haut : École primaire, 93, Grande-Rue : M. FABRE, 51-72-26, mercredi de 20 h 30 à 22 heures.

Oullins : Lycée municipal de Filles, Parc Chabrière, 44, Grande-Rue : M^{me} COLOMB, 51-93-17.

Crépieux-la-Pape : C.E.T., 10, route de Genève : M. BOUGAULT, 29-55-27, vendredi de 20 h 30 à 22 heures.

Neuville-sur-Saône : Ancienne Mairie ou M.J.C. : M^{me} BREVET, 47-87-53, vendredi de 20 h 30 à 22 heures.

Givors : Groupe scolaire Les Plaines, route de Chassagny : M^{lle} TERRAIL, 73-05-71, lundi de 20 heures à 21 h 30.

Lors de la première séance, toutes précisions complémentaires seront fournies. Les personnes intéressées sont invitées à s'y rendre, dans le C.M.M. de leur choix.

Pour l'équipe de l'A.P.M.
L. DUVERT.

Section locale de La Seyne-sur-Mer (Régionale de Nice).

Création d'une section locale à La Seyne-sur-Mer; secrétaire, M^{me} Papaziau, Colle d'Artaud, 83-La Seyne-sur-Mer. Section locale qui contribue aussitôt à l'action A.P.M. par la communication du texte suivant.

Pour un enseignement moderne des mathématiques au cours préparatoire.

Qu'est-ce que la mathématique? C'est une science comprenant la construction de concepts (le nombre par exemple), puis de techniques d'application (opérations sur ce nombre). Les techniques d'application n'intervenant qu'après l'assimilation des concepts mathématiques.

Au niveau de l'enseignement primaire, on se préoccupe plus, actuellement, de communiquer aux élèves des techniques que de construire des concepts mathématiques (le nombre n'est pas encore construit et compris que déjà l'on apprend l'addition). Le but de l'école primaire, selon les instructions officielles, est de calculer (rapidement et juste). Or le calcul n'est pas toujours numérique et ce n'est pas le but essentiel des mathématiques.

En France, à l'heure actuelle, l'étude des mathématiques ne commence vraiment qu'en cinquième, à l'âge de 12 ans.

Les psychologues et les mathématiciens s'accordent pour affirmer que la construction d'un concept mathématique doit précéder son analyse, celle-ci n'intervenant que vers l'âge de 12 ans.

N'ayant pas construit son édifice mathématique (les préoccupations de l'école primaire étant les techniques d'application) l'enfant de cinquième est dans l'obligation d'analyser la pensée du professeur. Il n'est pas possible en cinquième d'utiliser un matériel dans des activités ludiques pour construire un concept. Cet état de fait est la cause principale de l'échec constaté dans l'enseignement des mathématiques dans le Premier Cycle.

Par manque d'attention le plus souvent, l'élève ne reçoit pas toutes les informations dispensées par le professeur et, de ce fait, ne peut les analyser. Si ces informations sont indispensables pour la suite du cours, la compréhension manque et l'enfant marque une aversion pour tout ce qui est mathématique.

Jusqu'à l'âge de 12 ans, l'enfant doit accumuler des expériences mathématiques qu'il aura lui-même construites. Ensuite, il pourra analyser ses propres expériences.

Construction : Chaque notion mathématique pourra être construite en 3 étapes :

- activités ludiques,
- représentation,
- symbolisation.

1^o *Activités ludiques* : Le jeu est un lien indispensable entre la Maternelle et le Cours Préparatoire et, de plus, l'enfant est naturellement motivé par le jeu. Le jeu n'est pas gratuit et isolé du contexte mathématique, mais envisagé dans une pro-

gression : jeux avec des enfants comme éléments, jeux libres avec un matériel pour la familiarisation, puis des consignes seront données par le maître pour l'utilisation de ce matériel.

Le matériel utilisé pour ces jeux doit être varié et structuré; varié pour éviter un conditionnement au matériel, structuré pour placer l'enfant devant des contraintes qui ne viennent pas du maître, mais de la structure logique du matériel (jeux libres).

Deux principes seront toujours présents lors de l'expérience :

— variabilité mathématique : varier les expériences de façon à déterminer ce qui est invariant,

— variabilité perceptive : une même structure sera présentée sous diverses formes.

Ces activités ludiques s'effectuent par groupes de 4 ou 5 enfants. Un des avantages de cette activité par groupes est de développer la sociabilité de l'enfant.

2° Représentation : Actuellement le passage à l'abstraction et au symbolisme s'effectue à partir des objets. La représentation est une étape intermédiaire qui permet d'abstraire à partir des actions.

Par représentation, on entend l'utilisation des diagrammes (Venn-Euler), des graphes (représentation sagittale), des schémas.

Chaque élève travaille sur fiches ronéotypées. Ce travail permet de suivre la progression de chacun, de doser le nombre d'exercices, de supprimer les inégalités du niveau verbal pouvant exister entre enfants issus de milieux sociaux différents.

3° Symbolisation : Les symboles perdront leur caractère magique s'ils ne sont plus imposés d'une manière autoritaire par le maître, mais s'ils sont acceptés comme de simples conventions collectives. Un symbole (le chiffre par exemple) ne sera donné par le maître que si l'enfant en ressent la nécessité en vue de communiquer avec autrui et parler un langage commun.

Le nombre au Cours Préparatoire.

Pendant six ans, du Cours Préparatoire à la classe de Sixième, les enfants utilisent des nombres sans savoir ce qu'est un nombre, c'est-à-dire sans l'avoir construit.

Dans un but de mémorisation, on enseigne les nombres de 1 à 100 au C.P., de 100 à 1 000 au C.E. Ce découpage est purement artificiel et ne considère que la valeur ordinale d'un nombre. De plus, en lisant les instructions officielles, on s'aperçoit qu'il faut utiliser des nombres concrets (!) (3 pommes par exemple) de 1 à 1 000, puis « abstraits » au-delà de 1 000.

L'on croit rêver! Un nombre est un concept, c'est donc un être abstrait.

En simplifiant, un nombre est défini comme étant la propriété d'un ensemble.

Le mot « ensemble » ne peut pas être défini; c'est un terme primitif. Dans un dictionnaire, un mot est défini à partir d'autres mots qui, eux-mêmes, etc... Il faut donc que certains mots ne soient pas définis mais compris de d'une manière intuitive. Le mot « ensemble est de ceux-là. D'ailleurs l'enfant sait « mettre ensemble »...

A l'âge de 5 à 6 ans, l'enfant sait faire des classifications libres (jouets qui lui plaisent, par exemple), reconnaître une propriété dans un objet (sa couleur, sa forme...), faire des correspondances terme à terme (associer chaque objet à un autre). Suivant une progression on dégagera la notion d'ensemble, de propriété, puis de nombre.

Une des étapes de la construction étant la représentation, il s'agit de préparer l'enfant aux diagrammes et aux graphes. Il faut organiser l'espace dans lequel il vit. Mais il ne sera nullement question d'étudier la géométrie au Cours Préparatoire. La géométrie est métrique; c'est l'étude d'ensembles sur lesquels a été définie une mesure (distance) qui s'exprime avec un nombre...

Seules quelques notions topologiques pourront être envisagées : « intérieur », « extérieur », « frontière », « être entre », « voisin de » pour les diagrammes et « direction, départ, arrivée » pour les graphes.

Quelques mois seront consacrés à la construction du nombre : étude des ensembles, des relations, des applications... Tous ces concepts mathématiques sont nécessaires pour arriver au nombre et pourront ensuite être abordés d'une manière théorique vers 12 ans sans rencontrer les difficultés actuelles.

Le nombre sera ensuite utilisé pour les techniques d'application : les opérations. Au C.P. seront étudiées seulement l'addition et la soustraction. Afin d'appliquer le principe de variabilité mathématique, les enfants calculeront dans différentes bases, et non seulement en base 10.

Une remarque importante : cet enseignement des mathématiques ne peut se faire dans les structures actuelles de la classe sans rencontrer de sérieuses difficultés. Le travail en commun des maîtres est rendu nécessaire par l'abondance des exercices à imaginer. Une présentation originale ne doit plus être l'exclusive d'un seul, mais doit profiter à tous.

Il serait anormal de demander aux maîtres ce travail en plus des 30 heures de cours. Il faudrait que, pendant qu'une partie des maîtres se réunit, l'autre partie encadre les enfants dans des activités dirigées. Il est indispensable aussi que l'effectif de 25 élèves soit un maximum à ne jamais dépasser (5 groupes de 5 élèves pourraient permettre un travail efficace, mais que dire alors de 5 groupes de 4... Il est toujours permis de rêver).

Une modification de l'emploi du temps est souhaitable (activités théoriques le matin, activités d'éveil l'après-midi), ainsi qu'une réforme des autres disciplines et un décloisonnement entre elles.

M. CORFA,

Lycée mixte de La Seyne-sur-Mer.

Régionale de Nantes.

Rapport moral

Le bureau issu du vote de l'Assemblée générale constituante de la Régionale de l'Académie de Nantes s'était donné pour tâche, conformément aux directives du Bureau national, la réalisation d'un travail en équipes ouvertes à tous les collègues, quel que soit le niveau de leur enseignement. Ce travail, essentiellement pédagogique, pour être efficace, suppose un minimum d'organisation.

Envisageons d'abord cet aspect purement administratif de l'activité de la Régionale.

Des notes envoyées à « tous les professeurs de Mathématiques sous couvert de MM. et M^{mes} les Chefs d'Établissement » et des communiqués de presse ont annoncé les différentes activités de la Régionale. Pour améliorer la diffusion des informations, il s'est avéré souhaitable que, dans chaque établissement, un collègue se charge de la liaison entre ses collègues et le secrétariat de la Régionale. De nombreuses bonnes volontés se sont déjà manifestées et leur collaboration devrait donner plus de vigueur au travail de notre association.

Il reste à parler de l'aspect pédagogique de l'action de la Régionale. Deux types d'activité, d'ailleurs complémentaires, ont été prévues :

- des exposés, d'un niveau théorique élevé, sur les notions de base de l'analyse et du calcul tensoriel;

- des équipes de réflexion sur les problèmes posés par l'enseignement des mathématiques dans le premier cycle, par les nouveaux programmes des Terminale D et C.

Le 22 juin, a été étudiée une motion émanant du bureau national concernant

les problèmes de l'enseignement des mathématiques, et a été proposée l'expérimentation des nouveaux programmes de Sixième.

Toutes ces réunions ont donné lieu à des publications, grâce à l'active collaboration du Centre régional de Documentation pédagogique.

Notre Régionale devrait pouvoir jouer un rôle de plus en plus important, il faut donc que chacun fasse part de ses réflexions sur les problèmes concernant notre association.

Participez activement à l'étude et résolution de problèmes qui nous concernent tous!

La Secrétaire :
F. BANCEL.

Compte rendu d'une enquête sur l'enseignement dans le premier cycle, par H. Gremillon (C.E.G. de Nozay).

Cette enquête, menée par M. Gremillon dans le cadre des activités de la Régionale de Nantes de l'A.P.M.E.P., a bénéficié de l'intérêt de M. Jousseau, inspecteur d'Académie adjoint et de la collaboration de M. Boulard, directeur du C.R.D.P. qui s'est chargé du tirage, de la diffusion, de la réception des questionnaires.

Publication de la Régionale de Nantes de l'A.P.M.E.P. imprimée et diffusée par le C.R.D.P., 17, rue Gambetta, Nantes.

32 collègues étaient présents : Lycées (6), C.E.S. (14), C.E.G. (11), G.O.D. (1).
Le 14 mars 1968.

1. Compte rendu de l'enquête.

N.B. : Celle-ci a été adressée en au moins deux exemplaires à tous les C.E.G. et C.E.S. de l'Académie, sous contrôle de MM. les Chefs d'Établissements pour diffusion auprès de leurs adjoints chargés de l'enseignement des mathématiques.

Des collègues protestent de ne pas en avoir eu communication. Dans un même établissement des collègues ont répondu alors que d'autres n'en ont pas eu connaissance (c'est une des preuves de la non-coopération des enseignants qu'il est souhaitable de voir disparaître).

1° 67 collègues ont renvoyé le questionnaire :

Loire-Atlantique	Vendée	Maine-et-Loire	?
29	17	14	7

Un pointage a été effectué sur le plan départemental (Loire-Atlantique).

Ont répondu : 11 C.E.G. sur 29

4 C.E.S. sur 14.

(Ce qui ne veut pas dire que tous les collègues d'un même établissement ont répondu.)

2° Il était demandé de répondre par OUI ou par NON aux différentes questions :

a) Avez-vous lu des revues pédagogiques relatives à ce nouvel enseignement?

NON 9

b) Avez-vous été intéressé par cette nouvelle manière d'enseigner?

NON 0

c) Avez-vous tenté de l'introduire dans votre classe?

NON 13

d) Voulez-vous participer à des journées pédagogiques de « recyclage » dans un but :

a) d'information

b) d'application

NON 1

e) Même si au besoin il vous faut sacrifier quelques jours de vacances : à Pâques ou aux grandes vacances? NON 19

f) Voudrez-vous par la suite participer périodiquement à des journées ou demi-journées d'études pour échanger avec des collègues vos observations, les résultats des travaux effectués en classe. NON 2

g) Suggestions ou questions : elles sont reprises au cours des débats.

3° *Remarques sur les réponses :*

a) La grande majorité des collègues est sensibilisée par le mouvement.

b) Personne *a priori* n'est contre (est-ce à dire que tous sont pour... c'est autre chose).

c) Beaucoup (4/5) ont tenté de l'introduire dans leur classe, mais à la lumière des débats il apparaîtra que cela se borne à du symbolisme (nécessité de l'information).

d) A part un collègue tous aspirent dans un premier temps en la création de journées (ou de stage) d'information, puis ensuite en des journées d'application où ils verront « vivre une classe ».

e) Quant à « sacrifier » des journées de vacances cela semble impossible à nos collègues mères de famille et cela se conçoit.

2. *Conséquences des réponses.*

Les collègues sont avisés qu'au cours d'une deuxième audience accordée le 7 mars par M. l'Inspecteur d'Académie adjoint (la première avait eu lieu le 18 janvier au moment du démarrage de l'enquête) deux dates ont été retenues : *3 et 4 juillet pour des Journées d'Information.*

Une autorisation d'absence pourrait être accordée pour le mercredi 3.

Ces journées seront animées par quelques membres du Bureau de la Régionale qui ont donné leur accord.

Il reste trois mois pour organiser ces deux journées. N'ayez crainte vous serez avisé à temps.

N.B. — Dans le cadre de l'organisation de ces journées, une liste de mots, groupes de mots et symboles a été distribuée aux présents et ceux-ci ont été invités à rayer les mots pour lesquels ils ne sauraient donner :

une définition précise,

ou un exemple au moins à leurs élèves.

But : se rendre compte du degré d'information pour obtenir les 3 et 4 juillet le maximum d'efficacité.

3. *En réponse aux suggestions et questions* (dernier paragraphe de l'enquête).

1° *Livres d'information :*

Quelques brochures et livres sont mis en circulation sur les tables et les collègues sont invités à les consulter.

a) Bulletins de l'A.P.M. avec fiches d'inscription.

b) Apprentissage Mathématique : Ensembles, Relations, Nombres. Évariste Dupont. Sudel.

c) L'initiation mathématique au cycle élémentaire : Courrier de la recherche pédagogique, n° 27, mars 1966.

d) La Mathématique moderne dans l'enseignement primaire : Diénès. O.C.D.L., Paris.

e) L'Apprentissage de la Mathématique aujourd'hui : T.J. Fletcher, O.C.D.L., Paris.

f) Les notions de Mathématique de base dans l'enseignement du second degré : Jacqueline Lelong-Ferrand. Armand Colin.

g) La série « Mathématique moderne ». Papy. Didier.

h) Il est signalé que : M. Tournadre, professeur à l'E.N. d'Angers, termine une brochure que les collègues pourront se procurer gratuitement au C.R.D.P., 17, rue Gambetta, Nantes.

Ils sont invités à visiter la bibliothèque du C.R.D.P. Elle est ouverte à tous (pas le samedi après-midi) : consultation de livres sur place ou emprunt (gratuit et franchise postale) pour une durée de 15 jours.

2° *Sont évoqués les chantiers mathématiques de l'O.R.T.S.*

Lecture est faite du rapport de M. Gaston Bidet sur les journées nationales d'étude de la télévision scolaire sur les émissions de mathématiques qui ont eu lieu à Nantes les 7 et 8 février 1968.

3° *Manuels scolaires :*

En ce domaine, il convient d'être actuellement très prudent. Brédif et Queysanne sont cités.

Ils ont le mérite d'être parmi les premiers. Certains collègues sont effrayés du contenu du second. Il est bien évident qu'on ne peut le mettre brutalement entre les mains d'un élève qui ne connaît que l'enseignement traditionnel.

4° *Vient ensuite le problème qui fait et fera couler beaucoup d'encre :*

Des collègues de C.E.G. et de C.E.S. (section d'enseignement court) sont inquiets du niveau des élèves qu'ils reçoivent (ne parlons pas des classes de transition...). C'est précisément parce que les résultats de l'enseignement traditionnel devenaient alarmants qu'il s'est avéré urgent de le rénover.

Refuser à l'élève cette chance de survie c'est méconnaître l'esprit nouveau de la mathématique.

Il est bien évident qu'il ne prétend pas sauver tout le monde, et qu'il ne pourra obtenir son plein rendement que s'il accueille l'enfant dès son arrivée à l'école, c'est-à-dire à la Maternelle, là où l'enfant est le plus réceptif, où il cherche le « pourquoi des choses ».

En attendant qu'il en soit ainsi essayons dès la Sixième : à condition que les maîtres s'informent et qu'ils donnent l'exemple d'un travail d'équipe.

Et n'est-ce pas un bon début que cette journée du 14 mars et celles qui suivront.

En quoi consiste cette rénovation? En dehors de la conception nouvelle de l'édifice mathématique et de l'attention portée aux relations entre les êtres qui l'animent, il est recommandé de faire vivre sa classe, travail en équipe, large place aux *méthodes actives*.

Il est indispensable pour cela (et c'est le cri de tous) :

a) *retour aux quatre heures hebdomadaires en Sixième et Cinquième ;*

b) *un effectif maximum de 25 élèves pour que le maître puisse suivre et contrôler l'effort de chacun, rectifier immédiatement les erreurs.*

L'enfant doit pouvoir travailler à son rythme si nous voulons qu'il en tire le plus grand profit.

Avant de se quitter rendez-vous est pris (nous l'espérons) pour les 3 et 4 juillet 1968.

Compte rendu de la réunion du samedi 22 juin 1968.

La séance est ouverte à 15 h 30 par le Président des Cognets.

Le Président indique que l'ordre du jour est constitué par l'étude d'une motion émanant du bureau national de l'A.P.M.E.P. Cette motion a fait l'objet d'une étude approfondie de la part des professeurs de la ville d'Angers et le résultat du travail de ces collègues sera présenté par M. Tournadre.

La parole est donnée à M. Tournadre.

Celui-ci indique que le groupe de travail d'Angers s'est livré à une exégèse du texte proposé par le Bureau national et soumet à la Régionale de Nantes une refonte de ce texte en quatre points au lieu de sept.

I. — Le texte est inchangé jusqu'au 1° :

1° L'enseignement doit faire à la culture scientifique une place qui correspond à son importance dans le monde moderne. L'enseignement scientifique doit avoir pour base un enseignement mathématique rénové afin de permettre une utilisation raisonnée et critique.

Ceci implique pour tous une formation initiale suffisamment approfondie sur les plans général et professionnel. La rapidité de l'évolution des techniques implique que cette formation soit permanente et l'École doit rester pour tous un foyer d'éducation.

M. des Cognets propose alors la discussion de ce premier paragraphe. Une seule question est posée : qu'entend-t-on par formation professionnelle pour les enseignants?

Réponse du Président : Il faut revoir le *Bulletin* n° 261 de l'A.P.M.E.P. La formation des enseignants doit se faire dans les I.R.E.M. (culture mathématique, formation pédagogique continue, contrôle des expériences pédagogiques).

Le premier paragraphe est alors adopté à l'unanimité.

II. — Méthodes et Programmes :

a) *Principe :* tout enseignement doit obtenir l'adhésion des enseignants.

b) *Incidence sur les méthodes :* récusation de tout mode autoritaire de transmission du savoir. Recherche d'une participation maxima des élèves à l'élaboration de leur savoir, d'où emploi maximum des méthodes actives. Aspects particuliers possibles : travail en équipe (aussi bien des professeurs que des élèves). Collaboration entre maîtres d'une même classe et entre maîtres d'une même discipline aux différents niveaux.

c) *Incidence sur le contenu :*

α) L'adhésion souhaitée des élèves et des professeurs concerne-t-elle le contenu de l'enseignement? (choix des matières, contenu dans chaque matière).

β) Une méthode qui se veut active et éducative implique que l'équipe professeur-élèves puisse s'attarder sur certains aspects du contenu et les développer éventuellement. Donc le professeur doit jouir, vis-à-vis des programmes et des horaires, d'une certaine liberté (mise en cause de la notion de programme).

d) *L'expérimentation pédagogique :*

— droit de l'enseignant à l'expérimentation;

— vœu de prise en charge par l'Administration (horaires et coordination);

— vœu sur une information aussi large que possible au sujet des méthodes, des moyens d'enseignement et des recherches existant en France et à l'étranger.

Avant d'ouvrir la discussion sur ce deuxième paragraphe M. des Cognets fait part à l'assemblée d'une note de M. Taille, professeur de mathématiques supérieures au Lycée Clemenceau. Cette note comporte les cinq points suivants :

1° *Formation des élèves :* Il serait bon de prévoir des « colonnes » : faire suivre

un groupe d'élèves donnés par un même professeur dans une certaine discipline.

2° *Formation des maîtres*: Elle pourrait se faire grâce au D.U.E.S. suivi de deux années partagées entre une formation scientifique et pédagogique. A l'issue de ces études se situerait le C.A.P.E.S. et les C.P.R. Les inspections devraient être assez nombreuses pendant la première année de professorat.

3° *Maintien de l'Agrégation* avec une année de C.P.R.

4° *L'Inspection est indispensable*, l'Inspecteur ayant un rôle pédagogique plus important.

5° *Organisation de journées pédagogiques* à la prochaine rentrée scolaire.

La discussion s'ouvre alors au sujet du 2° point :

Dans le b) l'assemblée est d'accord pour : récusation de l'emploi exclusif de tout mode autoritaire de transmission du savoir. On tient à noter également que dans les aspects particuliers possibles le travail en équipe n'est pas la seule méthode, on peut ajouter : méthode heuristique.

c) α) Une majorité est d'accord pour préciser qu'un élève, ou un étudiant ne peut pas juger du contenu de l'enseignement.

Sur ce point (contenu de l'enseignement) une discussion s'engage d'où il ressort que les membres de la Régionale de Nantes souhaitent : que la composition des programmes ait l'adhésion des professeurs. Pour se faire il serait bon que les candidats aux élections du Comité national de l'A.P.M. fassent connaître leur position précise sur le contenu de l'enseignement et s'engagent à la défendre devant toute commission ministérielle chargée de l'élaboration des programmes.

β) L'assemblée souhaite avoir une plus grande liberté dans l'enseignement. On insiste sur le fait que la notion de programme n'est pas en cause. Il faut qu'il existe un noyau commun et des parties facultatives. On doit s'attacher plutôt à la qualité qu'à la quantité.

d) Ce point ne soulève pas d'objections.

III. — *Contrôle de la valeur des enseignants et des enseignés.*

Est contesté le principe actuellement en vigueur qui consiste à décider de l'avancement (enseignant) ou de la carrière (enseigné) d'un individu, en s'appuyant sur le jugement d'une personne, ou d'un groupe de personnes, officiellement désignés, du fait que ce principe est en contradiction avec le « besoin de l'individu de se juger lui-même ».

a) *Pour les enseignants*: récusation de l'Inspection, remplacement par l'auto-jugement.

b) *Pour les enseignés*: mise en question des modes de contrôle actuels (notes, classement, examens, concours).

M. Tournadre signale que ce paragraphe a été récusé à Angers, par une grande majorité. Cependant nos collègues d'Angers pensent que ce contrôle doit être modifié :

a) *Inspection trop rare et trop courte*: L'Inspecteur est trop coupé de l'enseignement, d'où la proposition d'un recyclage périodique des Inspecteurs par la prise en charge d'un service d'enseignement à tous les niveaux où ils inspectent. L'Inspecteur doit être plus un conseiller pédagogique qu'un contrôleur. Avancement : tout le monde avance à l'ancienneté sauf une queue de « fumistes ».

b) *Contrôle des enseignés*: Il est reconnu nécessaire mais critiquable sous sa forme actuelle. Il est souhaité des devoirs surveillés très fréquents.

A la Régionale de Nantes on souhaite également le maintien de l'Inspection mais en la réformant et en particulier en lui donnant un rôle pédagogique plus important. On est d'accord avec Angers pour la suppression de l'avancement aux choix, cependant on souhaite que les notes administratives et pédagogiques soient conservées en vue des mutations. On souhaite également que les Inspecteurs soient en contact

plus étroit avec les réalités de l'enseignement grâce à une participation active à toutes les expériences pédagogiques prévues, dans le cadre des I.R.E.M., par la Charte de Chambéry. Pour le contrôle permanent des enseignés la Régionale de Nantes préconise des devoirs surveillés fréquents alternant avec des devoirs libres. Suppression des compositions.

IV. — *Structure de l'Éducation Nationale :*

a) Nécessité d'une certaine souplesse de telle façon qu'un enseignant, dans la limite de ses compétences ne soit pas astreint à faire toute sa carrière dans le même ordre d'enseignement.

Un membre de l'assemblée pense qu'il serait bon de soulever le problème des traitements. L'ensemble des collègues s'y oppose. L'A.P.M. ne doit pas se pencher sur cet aspect de la question.

b) Cogestion des établissements et de l'Éducation Nationale :

Professeurs, parents, élèves doivent participer aux discussions relatives au fonctionnement, d'une part des établissements, d'autre part de l'Éducation Nationale.

Cet alinéa n'a pas fait l'objet d'une discussion par la Régionale de Nantes.

c) Recrutement des professeurs : le recrutement s'effectuera par concours mais il est nécessaire d'augmenter le nombre de places.

Des concours différents mènent à des fonctions différentes.

Après l'étude de la motion proposée par le Bureau national une discussion s'engage sur l'expérimentation des nouveaux programmes de Sixième.

Quelques collègues (voir les noms sur la liste ci-jointe) sont volontaires pour cette expérimentation. Cependant ils précisent que pour que l'expérience soit lavable elle doit être faite avec un horaire de quatre heures. Ils souhaitent travailler en équipe avec un animateur et demandent un allègement de leur service pour leur permettre de se consacrer plus totalement à ce travail.

Un vœu est également formulé concernant le retour aux quatre heures réglementaires en Sixième et Cinquième. Les membres de la Régionale de Nantes demandent en outre que cette mesure soit étendue également aux classes de Quatrième et de Troisième.

Les membres de la Régionale de Nantes demandent également qu'une heure de service soit prévue pour l'écoute et la discussion d'émissions de Radio-Télévision, telles que les « Chantiers mathématiques ».

Liste des volontaires pour une expérience pédagogique du nouveau programme de Sixième :

CROGUENNEC Roger, C.E.G. Nozay;
GRÉMILLON Henri, C.E.G. Nozay;
LEGAL Amédée, C.E.S. Victor-Hugo;
PERRAULT Jacqueline, G.O.D. Fellonneau;
ROUAULT Marie-Thérèse, C.E.S. Talence;
GUEGAN André, C.E.S. Gaston-Serpette.

Tout collègue intéressé par cette expérience est prié de se mettre en rapport avec le Président de la Régionale.

Le bloc notes de l'A.P.M.

In memoriam : M^{lle} M. DIONOT.

C'est par une coupure de presse que nous avons appris, avec retard, le décès, dans sa 81^e année, le 15 octobre 1968, de M^{lle} Dionot, présidente d'honneur de notre association, professeur honoraire au lycée de Sèvres, à Vinzelles (Saône-et-Loire), son village natal.

Nouvelle qui nous a tous douloureusement surpris car plusieurs collègues avaient pu rencontrer M^{lle} Dionot avant les vacances et constater que si sa santé n'était hélas pas parfaite, son intérêt pour les choses de notre enseignement restait aussi vif qu'il le fut toujours. Nous publierons prochainement un article qui rendra à notre présidente d'honneur l'hommage qui lui est dû.

Sans attendre, je veux personnellement témoigner qu'il y a quelques vingt années, alors que peu de groupes s'intéressaient à la pédagogie des mathématiques dans le premier cycle secondaire, M^{lle} Dionot avait pris l'initiative de réunir à Sèvres, le premier jeudi du mois, une équipe de collègues dont beaucoup participaient à l'expérience des classes nouvelles. L'atmosphère amicale et très libre de ces séances portait sa marque. Elle savait proposer des thèmes, renouveler les échanges et, par-dessus tout, donner à chacun le goût de l'enseignement, de la recherche pédagogique et du dialogue.

Sous la forme discrète qui seyait à son caractère, M^{lle} Dionot a eu une part très importante dans le développement de notre association et de ses activités. Beaucoup d'entre nous, nous lui devons une reconnaissance personnelle pour la part déterminante qu'elle a prise dans notre « formation continue » à une époque où la notion de formation permanente n'était pas encore populaire. Cette reconnaissance était nécessairement renforcée d'affection et d'estime; c'est pourquoi la disparition de M^{lle} Dionot nous laisse dans la peine.

G. W.

Rencontre anglo-française.

A l'invitation de nos collègues de A.T.M. (The Association of Teachers of Mathematics) une rencontre anglo-française est organisée les 19, 20 et 21 avril prochains à l'Université d'Exeter. Les collègues désirant prendre part à cette rencontre sont priés de prendre contact avec M. Glaymann.

Errata. Hamilton et les quaternions.

Signalons que, page 309, Nicolas Chuquet ne parle pas de nombre ront mais de nombre rout. On dira plus tard nombre rompu.

De même page 310 son erreur de calcul est la suivante :

$R^2.R^3 \text{ 81 m } R^2 \text{ 60}$ au lieu de $R^2.R^3 \text{ 81 m } R^2 \text{ 60}$.

Le trait souscrit qui joue chez lui le rôle de parenthèses doit aller sous R^3 et il l'avait arrêté trop tôt. Il a donc lu ensuite $\sqrt[2]{\sqrt[3]{(81 - \sqrt[2]{60})}}$ au lieu de lire $\sqrt[2]{\sqrt[3]{81 - \sqrt[2]{60}}}$. Il a alors simplifié en $\sqrt[2]{(81 - \sqrt[2]{60})}$ et tout a été faux.

On peut remarquer que la mauvaise habitude française d'écrire $\sqrt[3]{\sqrt[2]{81 - \sqrt[2]{60}}}$, habitude héritée de Descartes, est à la fois lourde et souvent malheureuse, car si l'on sait où le trait supérieur commence, on ne sait jamais trop où il finit. D'où bien des erreurs possibles. Les parenthèses, que Tartaglia utilisait déjà au xvi^e siècle, sont bien plus sûres.

J. I.

Un cours de mathématique moderne.

est organisé par l'Université Nouvelle, 12, rue du Renard, Paris-4^e. Les cours auront lieu le jeudi, de 18 heures à 21 heures et seront assurés par M^{me} F. Dreyfus, MM. J.-C. Meyer, Rossat-Mignod et B. Touchard, 12, rue de Navarin, Paris-9^e.

L'université nouvelle a ouvert un cours de mathématique moderne dont la séance inaugurale a eu lieu le jeudi 21 novembre 1968, 12, rue du Renard. Le succès en a été très grand et la modeste salle de 40 places ne pouvait contenir les nombreux auditeurs (une centaine environ). Aussi les cours auront lieu, 12, rue de Navarin, Paris-9^e le jeudi de 18 h 15 à 20 h 15.

Le public traditionnel de l'Université nouvelle comprend des ouvriers, des techniciens, des employés, des étudiants, des enseignants.

A la question posée par M. Beauvais qui présidait la séance : « Pourquoi êtes-vous ici ? Quelles sont les raisons pour lesquelles un cours de mathématique moderne vous intéresse », les réponses ont été très variées : « Je suis instituteur et je désire être au courant des nouvelles méthodes d'enseignement » ; « Je suis professeur de C.E.G., un recyclage m'est indispensable » ; « Je suis étudiant en langues ; la mathématique commence à jouer et jouera un rôle de plus en plus grand en linguistique » ; « Je suis technicien. Des connaissances de base en mathématique moderne me sont utiles pour mieux comprendre mon métier et être capable de suivre l'évolution de la technique » ; « Je suis ingénieur. J'ai fait mes études il y a quelques années. Les notions de base de la mathématique moderne m'ont été données très rapidement. J'éprouve le besoin d'y réfléchir pour les mieux assimiler ».

De nombreux parents d'élèves ont aussi exprimé la raison de leur présence : « Je suis père de famille. Je ne comprends rien à ce que font mes enfants en mathématique. Je désire les suivre, les guider dans leurs études. Je veux aussi m'instruire pour mieux comprendre le monde moderne et son évolution ».

Certains parents ajoutaient : « Je ne veux pas perdre mon prestige auprès de mes enfants ».

Nous avons eu le plaisir d'entendre M. Gilbert nous apporter le salut et les vœux de l'A.P.M. dont il est ancien président, et secrétaire général.

Nous n'oublions pas ce qu'a fait l'A.P.M., et ce qu'elle fait encore, pour réaliser l'unité de l'enseignement de la mathématique de l'école maternelle aux facultés ; aussi avons-nous été très touchés par les encouragements de M. Gilbert.

Le cours de l'U.N. touchera non seulement des enseignants et des étudiants, mais encore des ouvriers, des employés des techniciens, des parents d'élèves, et il est souhaitable qu'un public toujours plus large et plus varié soit tenu au courant de l'évolution de la mathématique.

ROSSAT-MIGNOD.

Les publications de l'A.P.M.

Avec ce *Bulletin* 265 s'achève la première année civile au cours de laquelle nous nous étions promis de paraître régulièrement tous les deux mois. La promesse n'a pas été tenue : le printemps a bousculé notre calendrier jusqu'à ce numéro de novembre-décembre encore en retard. Le n° 263-264 était double : en fait, nous n'aurons publié que cinq numéros ; mais nous promettons six numéros de 80 pages soit 480 pages et nous arrivons au total de 576 pages. De plus, tout adhérent ou abonné aura reçu la brochure *Charte de Chambéry*.

En 1969, nous essaierons de tenir plus exactement le rythme des deux mois. Au programme, quantité d'articles intéressants dont la conférence de notre ami Fletcher à Marly. Reste à passer à l'exécution : les lecteurs peuvent y aider en adressant leurs articles tapés à la machine, double interligne et recto seulement, en exécutant les figures à l'encre de chine sur bristol. Personne n'oublie que les tâches du Bureau et celles de la rédaction sont assurées par des collègues qui enseignent comme vous et moi.

— **Initiation au calcul des probabilités.** Le deuxième volume de nos collègues Guerber et Hennequin sera livré aux souscripteurs en décembre. Le nombre des souscriptions s'est élevé à 2 515 exemplaires. Succès qui montre aussi la conscience des collègues à bien s'informer.

— **La mathématique parlée par ceux qui l'enseignent.** Ce recueil des fiches de dictionnaire parues avant 1968 est en bonne voie de fabrication ; les premières épreuves sont corrigées. Dès que nous aurons une appréciation convenable des frais de fabrication, l'ouvrage sera mis en souscription.

— **Matériaux pour l'histoire des nombres complexes.** Une brochure de 32 pages est d'ores et déjà en cours de fabrication, n° 2 de la *Bibliothèque d'Information sur l'Enseignement Mathématique*. Elle comprend le texte intégral d'une conférence de notre ami Jean Itard et en annexes des textes anciens difficiles à consulter réunis et présentés par lui. Ouvrage spécialement important pour les collègues chargés de l'enseignement en Terminale A, mais qui ne sera pas moins instructif pour les autres.

— **La Charte de Chambéry.** a été adressée à tous les adhérents ou abonnés. Une plus large diffusion reste indispensable et tous les collègues sont invités à y participer. Commandes par dix exemplaires : 16 F ; prix de vente de la brochure : 2 F.

Publications des Régionales.

De Rennes, nous avons reçu un premier bulletin dont nous reprendrons bientôt un article.

La Régionale parisienne, aux prises avec l'organisation de ses Chantiers de Pédagogie mathématique, lance une publication nouvelle : *des cahiers pour la formation permanente*.

Cherchant à répondre aux demandes de plus en plus nombreuses formulées par des Collègues enseignant aux divers niveaux, en particulier en Maternelle, au premier degré et au premier cycle du second degré, aussi bien d'ailleurs que par des parents d'élèves, la Régionale parisienne de l'A.P.M.E.P. a pris l'initiative de publier, sous le titre « Chantiers de Pédagogie mathématique » une série de *six cahiers d'initiation à la mathématique de base*.

Chacun de ces cahiers de 32 pages comporte quatre fiches de travail semi-programmé pour permettre aux isolés ou aux équipes constituées en « chantiers » ou en « clubs mathématiques » d'acquérir les connaissances de base de la mathématique moderne.

Les six cahiers prévus s'échelonnant de décembre à mai traiteront les sujets suivants : ensembles, relations, opérations, nombres et ensembles numériques, algèbre du simplexe, algèbres de Boole, logique, groupes, informatique de base. Soit, sensiblement, les nouveaux sujets inscrits aux programmes de Sixième (devant entrer en vigueur en septembre 1969) et aux programmes expérimentaux des classes suivantes.

Conçus de manière que tout adulte sans connaissances mathématiques préalables puisse en assimiler le contenu moyennant quelque assiduité, *ces Cahiers serviront principalement aux maîtres du premier degré soucieux de préparer la modernisation inéluctable de l'enseignement mathématique dès les premières années de l'enseignement scolaire.*

Ces brochures intéresseront également les professeurs non mathématiciens mais soucieux d'élargir leur culture et en général tous les adultes, qu'ils enseignent ou n'enseignent pas, mais qui souhaitent ne pas se laisser trop distancer par l'évolution actuelle de la science.

Abonnement aux six fascicules : 10 F.

Dix abonnements groupés aux six fascicules : 80 F.

N.B. — Pour recevoir rapidement les fascicules parus :

1° Rédiger une formule de virement postal au compte de la Régionale parisienne de l'A.P.M.E.P., Paris 25-108-63;

2° Bien préciser au dos du virement la nature de la commande;

3° Envoyer les trois volets du virement sous enveloppe timbrée à 0,30 F au Secrétaire administratif de l'A.P.M.E.P., M. Blondel, 154, avenue Marcel-Cachin, 92-Cha-tillon-sous-Bagneux.

Addendum aux errata

et desiderata de la Rédaction

Aux errata signalés, p. 569, par Itard, ajoutons ceux-ci, toujours relatifs au *Bulletin* 263-264 :

- p. 373, 22^e ligne, au lieu de « pui di mono », lire « pui di meno ».
- p. 373, 14^e ligne à partir du bas, au lieu de « Argand 1816 », lire « Argand 1806 » (dix ans, ça compte, comme disait Napoléon).
- p. 374, 7^e ligne, au lieu de « D. E. Seith », lire « D. E. Smith ».

La Rédaction est coupable, elle le sait : ce *Bulletin* est trop gros il aurait fallu couper. Elle n'a malheureusement pas eu le temps de faire court.

Pour se défendre, la Rédaction fait remarquer qu'elle n'a pas rechigné à publier des lettres de critique. Autant l'avouer : elle aime ça ! Mais si, sur ce point précis, vous ne l'approuvez pas, vous pouvez le dire.

Collection **DEDRON**

Inspecteur Général
de l'Instruction Publique

NOUVEAUTÉ

COURS DE STATISTIQUE ÉLÉMENTAIRE

J. CUENAT. Agrégé de l'Université — Classes 1^{re} BD

■ **LES STATISTIQUES** bien que d'essence mathématique, ne doivent pas être abstraites. Aussi de nombreux exemples vivants sont-ils proposés dans cet ouvrage.

■ **LA STATISTIQUE** : pour être utile, doit être d'une lecture claire. Elle doit frapper l'Esprit. Aussi trouvera-t-on dans le livre de nombreuses figures.

■ **LE STATISTICIEN** pour être fécond, doit savoir calculer. Aussi ce cours n'hésite-t-il pas à proposer et développer des calculs en expliquant même la disposition matérielle des opérations.

Prix : 16,50 F

Spécimen sur demande à MM. les Professeurs.

UN COURS DYNAMIQUE,
DANS L'ESPRIT DES MATHÉMATIQUES MODERNES

P. LE BRETON
Agrégé de l'Université

P. DEDRON
Inspecteur général de l'Instruction Publique

■ LA MATHÉMATIQUE - Classe de 6^e

Les programmes viennent d'être modifiés et nos auteurs préparent une NOUVELLE ÉDITION. Collection LEBRETON-DEDRON

LA MATHÉMATIQUE. Classe de 6^e
Parution début 1969.

■ LA MATHÉMATIQUE - Classe de 5^e

Les programmes actuels seront encore valables au cours de la prochaine année scolaire 1969-1970. Les nouveaux programmes sont prévus pour l'année 1970-1971.

Le Manuel **LE BRETON-DEDRON**, classe de 5^e nouveaux programmes en cours de rédaction paraîtra début 1970 et sera nécessaire à la rentrée de septembre 1970.

COMPLÉMENT LOGIQUE DE TOUT MANUEL

CAHIERS DE TRAVAUX PRATIQUES DE MATHÉMATIQUES - ARNAUD - AUBRY

Manipulation concrète — Travaux et redécouverte
Acquisition du vocabulaire mathématique de base

Géométrie — Cl. de 6^e

Arithmétique et Algèbre — Cl. 5^e

Géométrie — Cl. de 5^e

Arithmétique-Algèbre Cl. 4^e

Géométrie Cl. de 4^e

Constructions-Fonctions-Graphes Cl. 3^e

Spécimens gratuits sur demande.

Corrigés réservés à MM. les Professeurs.

ÉDITIONS MAGNARD - 64, RUE DE RENNES, PARIS-6^e

Éditions WESMAEL-CHARLIER

28, rue Madame, PARIS-6^e - Tél. 548/16.61 - C.C.P. Paris 16.124.11

A. HUISMAN

Inspecteur de l'Académie de Paris

I. ITARD

Professeur agrégé au Lycée Henri-IV

COURS DE MATHÉMATIQUES

Déjà parus :

Classe de sixième , livre de l'élève, 210 pages, 225 figures, 9 illustrations hors-texte. Nouvelle édition . . .	8,50 F + T.V.A. 9,35 F
Livre du maître : à paraître.	
Classe de Cinquième , livre de l'élève, 256 pages, 157 figures, 10 illustrations hors-texte, 2 ^e édition, 1965	9,50 F + T.V.A. 10,45 F
Livre du maître, 48 pages	3,36 F + T.V.A. 3,70 F
Classe de Quatrième , livre de l'élève, 316 pages, 220 figures, 5 illustrations hors-texte	9,50 F + T.V.A. 10,45 F
Livre du maître, 70 pages	4,77 F + T.V.A. 5,25 F
Classe de Troisième , livre de l'élève, 304 pages, 167 figures, en couleurs	13,82 F + T.V.A. 15,20 F
Livre du maître, 94 pages	7,45 F + T.V.A. 8,20 F
Classe de Seconde A , 246 pages	14,23 F + T.V.A. 15,55 F
Classe de Seconde C , 440 pages, 260 figures . . .	28,27 F + T.V.A. 31,10 F

COLLECTION HERBIET-HORWART-DE VAERE

G. DELANDE & G. BOSTEELS

Disponibles :

MATHÉMATIQUE Tome I

3^e édition, 396 pages, texte et illustrations en couleurs **23,75 F + T.V.A. 26,10 F**
Prix spécial aux Professeurs (frais d'envoi compris). **19,60 F**

APPLICATIONS RÉSOLUES

Livre du maître (1^{re} partie) du manuel « Mathématique, tome I »

234 pages. **51,73 F + T.V.A. 56,90 F**
Prix spécial aux professeurs (frais d'envoi compris). **44,00 F**

A paraître incessamment

MATHÉMATIQUE Tome II, classe de 5^e

En préparation :

MATHÉMATIQUE Tome III, classe de 4^e

LIBRAIRIE ANDRÉ DESVIGNE - 17, rue Mulet - LYON

COURS COMPLET DE MATHÉMATIQUES

par

V. LESPINARD et R. PERNET

Classes TERMINALES — Programme 1966 — Édition ORANGE

Classes TERMINALES A_1 , A_2 et A_3 : Mathématiques	Broché	4,85
Classe de TERMINALE A : Mathématiques	Cart.	8,55
Classe de TERMINALE B : Mathématiques	Cart.	16,90
Classe de TERMINALE C : Géométrie	Cart.	22,80
Classe de TERMINALE C et T : Analyse, Cinématique	Cart.	17,65
Classe de TERMINALE C et T : Structures, Arithmétique	Cart.	18,40
Classe de TERMINALE D : Structures, analyse et Probabilités	Cart.	18,50
Classe de TERMINALE D : Géométrie et Cinématique	Cart.	18,50

Les ouvrages des anciens programmes resteront en vente jusqu'à épuisement, et notamment la « GÉOMÉTRIE, classe de Mathématiques », dont la structure correspond à celle des nouveaux programmes de « T ».

Programme du 8 juin 1966 - Édition ORANGE

Classe de PREMIÈRE A : Mathématiques	Cart.	13,10
Classe de PREMIÈRE B : Mathématiques	Cart.	28,95
Classe de PREMIÈRE C et D : Algèbre - Analyse - Trigonométrie - Cinématique (1 volume)	Cart.	15,60
Classe de PREMIÈRE C : Géométrie et Géométrie analytique	Cart.	14,45
Classe de PREMIÈRE D : Géométrie Analytique et Statistique	Cart.	11,65

Programme du 26 août 1965 - Édition ORANGE

Classe de SECONDE A : Mathématiques — 1 volume	Cart.	12,25
--	-------	-------

Classe de Seconde :

Algèbre, classe de Seconde C	Cart.	8,95
Géométrie, classe de Seconde C	Cart.	9,60

Cycle d'Orientation :

(Programme 1964 — Édition Orange) :

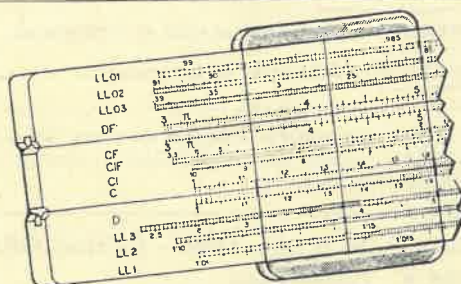
Mathématiques, classe de Troisième	Cart.	10,35
Mathématiques, classe de Quatrième	Cart.	12,50

Cycle d'Observation :

Mathématiques, classe de Cinquième (avec Astronomie)	Cart.	8,95
Mathématiques, classe de Sixième (avec Astronomie)	Cart.	7,60

Dans ce *Bulletin 265*, ne manquez pas de lire :

- p. 571 et 572, les informations sur les publications de l'APMEP ;
- p. 529, les nouveaux programmes de Seconde ;
- p. 489, l'article sur $\mathbb{Z}$ en Cinquième ;
- p. 417, le sommaire...



NEPERLOG

(Double-face)

Correspondances entre les échelles de chaque face assurée par un curseur double-face.

Echelles-Log-Log e^x et e^{-x} permettant les calculs des puissances et racines positives ou négatives des nombres compris entre : 1,01 à 10^5 et de 0,991 à $2 \cdot 10^{-5}$.

Echelles πx et $\frac{1}{\pi x}$ évitant les cas hors règle.

Possibilités de calculs étendues avec un minimum de manipulations.



21, Rue de Montsouris - PARIS (XIV^e)

Tél. : **POR 38-10**

CHEZ VOTRE FOURNISSEUR

Collection A. COMBES

NOUVEAUTÉ,

VIENT DE PARAÎTRE :

EXERCICES ET PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES

(avec leurs solutions)

CLASSES TERMINALES C et E

(nouveaux programmes)

par

A. COMBES

Professeur au lycée Voltaire

TOME I

Arithmétique, Algèbre et Notions d'Analyse

Volume 13,5 × 21 cm, de 448 pages **19,10 F (T.T.C.)**

Ce volume est strictement conforme aux derniers programmes. 362 exercices et problèmes, entièrement résolus, couvrent la totalité du cours. Chacun des dix chapitres est précédé, comme dans les autres volumes de la collection, du rappel des notions indispensables à la bonne compréhension des exercices. C'est, en plus, un véritable résumé du cours qui est ainsi entre les mains des élèves.

SOMMAIRE

Notions générales. — Arithmétique. — Analyse combinatoire. — Nombres complexes. — Fonctions numériques d'une variable réelle. — Étude de quelques fonctions numériques. — Fonctions vectorielles d'une variable réelle. — Équations différentielles. — Calcul numérique. — Problèmes de révision.

Le Tome II, Géométrie et Cinématique, est actuellement sous presse

Rappel :

Classes de Seconde A, C et E :

Tome I : **Algèbre** (249 exercices, 52 problèmes). **14,75 F (T.T.C.)**

Tome II : **Géométrie** (180 exercices, 45 problèmes). **14,75 F (T.T.C.)**

Classes de Première A, B, C, D et E :

Tome I : **Algèbre et Trigonométrie** (237 exercices, 14 problèmes). **15,80 F (T.T.C.)**

Tome II : **Géométrie et Cinématique** (236 exercices, 11 problèmes). **15,80 F (T.T.C.)**

Classe Terminale D (236 exercices et problèmes). **18,70 F (T.T.C.)**

Exercices de Probabilités et de Statistique, par COMBES et SAADA, Classes de Première et Terminales (208 exercices et problèmes). **16,40 F (T.T.C.)**

VUIBERT 63, bd SAINT-GERMAIN, 63, PARIS-V^e

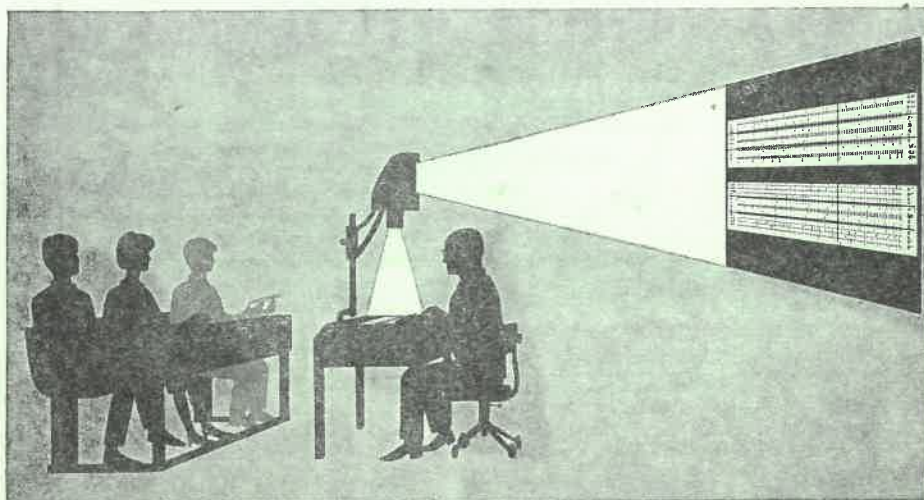
Printed in France

Le Directeur de la publication : G. WALUSINSKY

FD - Imp. Alençonnaise, B. P. 57, 61-Alençon - Dépôt légal 1968 : 8.479 - C.P.P.P. 35.996

ARISTO

REGLES A CALCUL MODELES DE PROJECTION



Maniables et de dimensions réduites (env. 17×38 cm), les règles de projection ARISTO en ARISTOPAL transparent, indéformable et incassable servent à la démonstration des principes de la règle à calcul au moyen d'un diascope. Grâce à la luminosité de ce genre de projecteurs, il est inutile d'obscurcir la salle: les élèves peuvent reproduire simultanément sur leur propre règle toutes les opérations présentées. Les graduations d'une grande clarté, chiffrées en rouge et en noir, sont parfaitement lisibles, même depuis le fond de la salle.

La règle de projection se pose simplement sur le plan de travail du projecteur, où elle est maintenue par des tampons mousse anti-dérappants.

Les échelles des faces avant et arrière sont disposées côte à côte et sont projetées simultanément.

Nous livrons des modèles de projection pour les règles à calcul ARISTO-Junior, ARISTO-Scholar, ARISTO-TriLog, ARISTO-Studio et ARISTO-MultiLog.

Agent Exclusif en France : MINERVA, Paris XIX^e

DENNERT & PAPE · ARISTO-WERKE KG · HAMBURG