Achille, la tortue et des pliages.

Dans *Mathematics Teaching*, n° 36, D. B. Sawyer, de l'Université de Waikato, à Hamilton, Nouvelle-Zélande, signale, à propos de la construction des « hexaflexagones » proposée par Martin Gardner (dans *Mathematical Puzzles and Diversions*) une curieuse construction qui peut servir d'exemple pour introduire le concept de convergence. Il s'agit du pliage d'une bande de papier dans le but de la subdiviser en une suite de triangles équilatéraux deux à deux adjacents.

Prenez une bande de papier de quelques centimètres de large (par exemple, un rouleau d'une machine à calculer) ; numérotez 1 et 2 ses deux bords. Tracez un segment A_1A_2 du bord 1 au bord 2 *de façon quelconque*. Par un premier pliage vous amenez A_1A_2 sur le bord 2, A_2 restant fixe ; le pli est un segment A_2A_3. Par un second pliage, vous amenez A_2A_3 sur le bord 1, A_3 restant fixe ; le pli est un segment A_3A_4 ; et ainsi de suite. Si vous désignez par α_1 l'angle aigu de A_1A_2 avec le bord 1, α_2 l'angle aigu de A_2A_3 avec le bord 2, α_i l'angle aigu de A_iA_{i+1} avec le bord 1 ou 2 (selon que i est impair ou pair), alors la limite de α_i pour i infini est $\frac{\pi}{3}$.

La réalisation matérielle de cette suite de pliages est facile et, si l'on pratique avec soin, on peut apprécier la rapidité de la convergence : moins de dix pliages et l'on voit apparaître des triangles équilatéraux (ou presque).

Pour faire la démonstration, on remarque :

$$\alpha_{i+1} = \frac{\pi - \alpha_i}{2} .$$

Donnons alors, de façon plus générale, un nombre réel $a > 0$ et définissons la suite de réels positifs :

$$x_1 < a, \; x_2 = \frac{a - x_1}{2} , \qquad x_{i+1} = \frac{a - x_i}{2}$$

soit $x_3 = \frac{a}{2} - \frac{a}{4} + \frac{x_1}{4}$

$$x_4 = \frac{a}{2} - \frac{a}{4} + \frac{a}{8} - \frac{x_1}{8}$$

$$x_{i+1} = \frac{a}{2} - \frac{a}{4} + \frac{a}{8} \ldots - \frac{a}{2^i} + \frac{x_1}{(-2)^i}$$

Les coefficients de a dans la dernière expression sont les termes d'une progression géométrique de raison $-\frac{1}{2}$

$$x_{i+1} = \frac{a}{3}\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^i\right] + \frac{x_1}{(-2)^i}$$

La limite de x_{i+1} pour i infini est $\frac{a}{3}$, limite indépendante de x_1. Dans le cas du pliage, $a = \pi$, vous pouvez même répondre à la question : à partir de quel rang i l'angle différera-t-il de $\pi/3$ de moins d'une quantité b donnée ?

Une objection vient à l'esprit quant à l'exploitation pédagogique de cet exemple : faudra-t-il donc que ce soit toujours à partir de la série géométrique que l'on trouve les premiers exemples de série convergente ? A quoi vous pourrez répondre que depuis des siècles le « paradoxe » d'Achille et de la tortue n'a pas fini d'étonner le monde, y compris celui des mathématiciens. Reportez-vous plutôt au texte « ce que se dirent Achille et la tortue » de notre maître Carroll.

W. MOUNTEBANK.