Deux exercices très classiques.

La formalisation ensembliste donne une rédaction très rapide.

Dans le plan d'un cercle (A, R) *on donne un point fixe* J. *Deux droites* Jx, Jy *varient en restant perpendiculaires. Soit* $P \in (Jx) \cap (A)$ *et* $Q \in (Jy) \cap (A)$. *Quel est l'ensemble* E *des milieux* M *des cordes* PQ ?

Supposons $(Jx) \cap (A) \neq \emptyset$ et $(Jy) \cap (A) \neq \emptyset$.

M milieu d'une corde PQ $\iff MP^2 = MQ^2 = R^2 - MA^2$.

M milieu de l'hypoténuse PQ $\iff MJ^2 = MP^2$.

L'énoncé précise que M est milieu d'une corde PQ et milieu de l'hypoténuse PQ d'un triangle JPQ. Soit :

$M \in E \iff (MP^2 = MQ^2 = R^2 - MA^2)$ et $MJ^2 = MP^2$.

$M \in E \iff MJ^2 + MA^2 = R^2$.

Deux plans donnés (P) *et* (Q) *sont sécants,* $(P) \cap (Q) = (\Delta)$. *Un plan* (S) *coupe* (P) *selon* (E), *coupe* (Q) *selon* (F). *Condition vérifée si et seulement si* (E) *et* (F) *sont parallèles.*

(E) et (F) sont coplanaires.
$(E)//(F) \iff (E) \cap (F) = \emptyset$ ou $(E) = (F)$.

Etudions le cas $(E) = (F)$. $(E) = (F) \iff (E) = (\Delta) \iff (\Delta) \subset (S)$.

Etudions le cas $(E) \cap (F) = \phi$

$(E) \cap (F) = \emptyset \iff ((P) \cap (S)) \cap ((Q) \cap (S)) = \emptyset$.

La commutativité et l'associativité de l'intersection permettent d'écrire :

$$((P) \cap (Q)) \cap (S) = (\Delta) \cap (S) = \emptyset.$$

Conclusion : (E) et (F) sont parallèles si et seulement si (S) est parallèle à (Δ) ou (S) passe par (Δ).

SAUTEREAU, *Lycée Cosne.*