VII. TEXTES OFFICIELS

Rapport sur le Concours général 1966 (classe de Mathématiques Elémentaires).

L'énoncé du problème a paru dans le *Bulletin* 253, p. 465.

Le jury était composé de M. Chazel, Inspecteur général, Président, M^me^ Berroir (lycée Fénelon), et M. M. Cuenat (St-Louis-Stanislas), Demengel (E.N.S.E.T), Mordelet (J. Decour), Warusfel (Henri-IV).

246 candidats ont pris part à cette épreuve. Après une première double correction, 14 copies furent retenues. L'examen approfondi de ces dernières a permis au jury de décerner les récompenses suivantes : deux prix et cinq accessits.

Observations.

Première partie. Contrairement à ce qu'on pouvait espérer, les connaissances sur les structures algébriques ne sont pas très au point. Pour trop de candidats les questions de fermeture, de structure de groupe ou d'anneau commutatif sont un obstacle sérieux. En particulier, l'invitation à l'économie que constitue la phrase entre parenthèses du 1° n'a pas eu beaucoup d'écho ; le fait que l'addition et multiplication dans Ω sont induites des opérations dans $\mathbb{C}$, que les propriétés d'associativité, de commutativité, de distributivité en résultent aussitôt, a été fort peu utilisé.

Dans le 3°, la condition $N(u) = 0$ équivaut à $(x + \rho y)(x + \rho^* y) = 0$, c'est-à-dire à $x + \rho y = 0$ ou bien $x + \rho^* y = 0$. Si y est nul, x l'est aussi, si y n'est pas nul, les égalités $\rho = -\frac{x}{y}$ ou bien $\rho^* = -\frac{x}{y}$ sont incompatibles avec le fait que n'est ρ pas rationnel.

Peu de candidats voient que $\frac{1}{u}$ appartient à Ω si et seulement si $|N(u)|$ est égal à 1 ; ceci tient à ce que $uv = 1$ implique $N(u)N(v) = 1$ et par suite $N(u) = \pm 1$.

Deuxième partie. Tous les candidats trouvent l'égalité

$$N(U) = \xi\xi^* x^2 + (\xi\eta^* + \xi^*\eta)xy + \eta\eta^* y^2$$

et en déduisent que :

$$N(u) = N(U) \implies \begin{cases} \xi\xi^* = 1 \\ \xi\eta^* + \xi^*\eta = p \\ \eta\eta^* = q \end{cases}$$

mais trop souvent sans un raisonnement suffisamment précis.

Puisque $\xi\eta^*$ et $\xi^*\eta$ sont solutions de l'équation $r^2 - pr + q = 0$ et qu'ainsi :

$$\begin{cases} \xi\eta^* = \varrho \\ \xi^*\eta = \varrho^* = p - \varrho \end{cases} \qquad \text{ou bien} \qquad \begin{cases} \xi\eta^* = \varrho^* = p - \varrho \\ \xi^*\eta = \varrho \end{cases}$$

on obtient ensuite, soit

$$\begin{cases} \beta = p\alpha + q\gamma \\ \delta + \alpha = 0 \end{cases} \qquad \text{avec } \alpha\delta - \beta\gamma = -1$$

soit

$$\begin{cases} \beta = -\gamma q \\ \delta = \alpha + \gamma p \end{cases} \qquad \text{avec } \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

et l'on trouve : $\dfrac{U}{u} = \xi$ dans le premier cas, $\dfrac{U}{u^*} = \xi$ dans le second.

Les conditions nécessaires pour que $T^2(m) = m$ quel que soit m sont généralement obtenues, mais peu de candidats aboutissent par équivalences successives à la seule égalité : $\alpha + \delta = 0$.

Troisième partie. Les majorations : $|x| \leqslant A$, $|y| \leqslant B$ s'obtiennent facilement. On trouve ensuite $\alpha = 3$, $\gamma = 1$, ce qui détermine les transformations T, et T_2 correspondantes. La chaîne M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, ($M_6 = M_0$), et la chaîne associée $\{ Pn \} = \{ M_{7-n} \}$ sont facilement mises en évidence ; les points ainsi déterminés sont tous tels que $N(U) = N(u)$ et puisque, pour M_0, $N(U_0) = 1$, tous ces points appartiennent à E. Il n'existe pas d'autres points à coordonnées entières sur E ; leurs coordonnées appartiennent en effet à l'intervalle $(-B, B)$, donc sont nécessairement l'un des nombres $-1, 0, 1$; on trouve ainsi 6 points au maximum, ce sont ceux précédemment trouvés. Les troisième et quatrième questions ne posent aucun problème délicat. Le rapprochement avec le calcul de $f(\beta, \delta)$ du II, 2°, *b*, peut avantageusement être utilisé.

Quatrième partie. Les transformations T_1 et T_2 s'écrivent presque aussitôt,

$$T_1 \quad \begin{cases} x = x + py \\ y = px + (1 + p^2)y \end{cases} \qquad T_2 \quad \begin{cases} x = x \\ y = px - y \end{cases}$$

ainsi que les égalités :

$$X_{n+1} = X_n + pY_n \qquad Y_{n+1} = pX_{n+1} + Y_n$$
$$X'_n = X_n \qquad Y'_n = -Y_{n-1}$$
$$P_{n-1} = T_1(P_n)$$

Un calcul très simple montre que la transformation $T_1 \circ T_2 \circ T_1 \circ T_2$ est l'identité. Comme M_1 et Po sont confondus, on obtient

$$T_1^{-n}(P_0) = T_1^{-n}(M_1)$$

d'où la notation : $P_n = M_{1-n}$.

En considérant des deux cas m pair, m impair, on aboutit à la même relation $Z_{m+2} = Z_m + pZ_{m+1}$.

On peut trouver ω en remarquant qu'il doit satisfaire à cette relation lorsque $m = 0$; il est imposé qu'il soit positif ; d'où la seule valeur possible :

$$\omega = \sqrt{1 + p^2/4}$$

Bien entendu, il faut montrer que cette valeur convient en toute généralité, ce qui peut se faire par récurrence.

Sur l'hyperbole H, on obtient les points à coordonnées entières M_n et P_n ainsi que leurs symétriques par rapport à O à partir du point M_0 ; les suites ainsi déterminées sont illimitées. Une symétrie par rapport à la première bissectrice des axes donne des suites analogues pour l'hyperbole H'.

Cinquième partie. C'était à coup sûr celle qui demandait le plus d'attention et la discussion la plus serrée.

La transformation T_1^k transforme $u = x + \varphi y$ en $U = \xi^k u$. Pour que T_1^k soit l'identité, il est donc nécessaire que ξ soit racine $k^{\text{ième}}$ de l'unité, ainsi que ξ^*, or $\xi + \xi^*$, égal à $2\alpha + p\gamma$, est un entier réel ;

l'inégalité $|\xi + \xi^*| \leqslant |\xi| + |\xi^*|$ entraîne donc : $|2\alpha + p\gamma| \leqslant 2$ c'est-à-dire soit $|2\alpha + p\gamma| = 2$, soit $|2\alpha + p\gamma| = 1$, soit $2\alpha + p\gamma = 0$.

Si $|2\alpha + p\gamma| = 2$, ξ est nécessairement réel ; $\xi = \pm 1$ et : $\alpha = \pm 1$, $\beta = \gamma = 0$, $\delta = \pm 1$.

Pour $\alpha = 1$, $\delta = 1$, T_1 est la transformation identique ; pour $\alpha = -1$, $\delta = -1$, T_1^2 est la transformation identique.

Si $2\alpha + p\gamma = \xi + \xi^* = 0$, $\xi = \pm i$ et $\frac{\gamma^2}{4}(4q - p^2) = 1$; d'où $\gamma = \pm 1$ et $4q - p^2 = 4$; p est donc pair : $p = 2p'$.

On trouve ainsi les transformations pour lesquelles k est égal à 4. Sur la courbe d'équation $f(x, y) = 1$ on obtient 4 points à coordonnées entières :

$$(1, 0),\ (-p', 1),\ (-1, 0) \text{ et } (p', -1) ;$$

ce sont les seuls, car $f(x, y) = 1$ impose : $y^2 \leqslant 1$.

Si $2x + p\gamma = \pm 1$, ξ est l'un des nombres complexes $-j$, $-j^2$, j, j^2, et $\xi^* = \bar{\xi}$; p est nécessairement impair : $p = 2p_1 + 1$;

$\gamma^2(4q - p^2) = 3$, donc $\gamma^2 = 1$ et $q = p_1^2 + p_1 + 1$.

Par ailleurs, la condition $f(x, y) = 1$ impose : $-3y^2 + 4 \geqslant 0$, c'est-à-dire $|y| \leqslant 2/\sqrt{3}$.

Au choix de p près, on trouve une distribution analogue à celle du III.

Quand $p^2 - 4q$ est négatif, les cas $p^2 - 4q = -4$ et $p^2 - 4q = -3$ sont en évidence dans les questions précédentes ; les cas $p^2 - 4q = -1$, $p^2 - 4q = -2$ ne peuvent être réalisés pour p et q entiers ; reste donc l'hypothèse : $p^2 - 4q \leqslant -5$. Alors :

$$f(x, y) = 1 \implies (p - 4q)y^2 \geqslant 4$$

et par suite : $y^2 \leqslant \frac{4}{5}$.

La courbe ne contient donc que les deux points, évidents a priori, (1, 0) et (— 1, 0) à coordonnées entières.

Conclusion.

Un examen attentif des questions posées dans les parties I et II permettrait de traiter sans beaucoup de peine les deux parties suivantes. Mais on sent généralement trop de hâte chez les candidats ; ils ne lisent pas l'énoncé avec assez de soin pour tirer parti des indications qui leur sont données d'une façon

qui, pour n'être pas aveuglante, est souvent facilement déchiffrable. Ils éviteraient ainsi bien des maladresses, s'épargneraient des calculs laborieux et lourds, des étourderies et même des erreurs graves. La partie V n'a été abordée que par de rares candidats.

Sa résolution supposait assurément une synthèse préalable des résultats précédemment acquis d'où soient dégagées quelques vues claires. Mais il reste entendu qu'un texte de concours général s'adresse à une élite de jeunes gens. Le sujet proposé demandait au total peu de connaissances, davantage de réflexion. Malgré quelques copies fort honorables, le Jury aurait souhaité qu'un plus grand nombre d'entre elles répondent à peu près à son attente.

Le Président du Jury,
Maurice CHAZEL.