bulletin de l'association des

professeurs de mathématiques

de l'enseignement public

“de la Maternelle aux Facultés”

Connecteurs logiques • Des cours d'arithmétique • La continuité • Expérience en Quatrième • RAPPORT DE LA COMMISSION MINISTÉRIELLE • Programmes pour les classes élémentaires • Vive Euclide ! • Les collègues écrivent • L'Assemblée générale

bimestriel - 46e année - mai-septembre 1967 n° 258

Retour au plan. Transformation isogonale. — Ceci pour mieux souligner encore l'utilité des barycentres. Etant donné un triangle ABC, soit deux points D et D' situés sur la droite BC : les coordonnées barycentriques de D sont de la forme 0, β, γ et celles de D' de la forme 0, β', γ'. Supposons que les droites AD, AD' soient antiparallèles pour le couple de droites AB, AC (on dit aussi *isogonales* pour ce couple) : il existe donc une relation entre les quatre scalaires β, γ, β', γ' ; cherchons-la. Par symétrie pour une bissectrice des droites AB, AC, AD et AD' s'échangent. Si nous prenons la bissectrice qui traverse le triangle, alors les demi-droites AB et AC s'échangent, ainsi que les demi-droites AD, AD'. Par symétrie pour cette bissectrice, $\overrightarrow{AB}$ devient $\frac{c}{b}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC}$ devient $\frac{b}{c}\overrightarrow{AB}$ et $\beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}$ devient $\beta\frac{c}{b}\overrightarrow{AC} + \gamma\frac{b}{c}\overrightarrow{AB}$. Comme $\beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} = (\beta + \gamma)\overrightarrow{AD}$, d'après la théorie des barycentres, $\beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}$ est un vecteur de AD ; par suite, $\gamma\frac{b}{c}\overrightarrow{AB} + \beta\frac{c}{b}\overrightarrow{AC}$ est un vecteur de AD' ; $\beta'\overrightarrow{AB} + \gamma'\overrightarrow{AC}$ en étant un autre (même raison que pour $\beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}$), il existe donc un scalaire λ tel que $\beta' = \lambda\gamma\frac{b}{c}$ et $\gamma' = \lambda\beta\frac{c}{b}$, d'où, en éliminant λ :

$$\frac{\beta'}{\gamma'} = \frac{\beta}{\gamma} \times \frac{b^2}{c^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\beta\beta'}{b^2} = \frac{\gamma\gamma'}{c^2}.$$

Telle est la relation cherchée. On voit qu'elle est suffisante pour entraîner l'antiparallélisme des couples (AB, AC) et (AD, AD').

Cela étant, soit M un point de coordonnées barycentriques α, β, γ pour le triangle ABC. Soit M' le point où les antiparallèles de AM pour (AB, AC) et de BM pour (BC, BA) se coupent. En désignant par α', β', γ' les coordonnées barycentriques de M', on a donc :

$$\frac{\beta\beta'}{b^2} = \frac{\gamma\gamma'}{c^2} \quad \text{et} \quad \frac{\gamma\gamma'}{c^2} = \frac{\alpha\alpha'}{a^2}.$$

D'où $\frac{\alpha\alpha'}{a^2} = \frac{\beta\beta'}{b^2}$: par suite, CM' est l'anti-parallèle de CM pour (CA, CB). Autrement dit, les anti-parallèles de trois céviennes pour un triangle ABC sont encore trois céviennes. Les points correspondants sont dits *isogonaux.* Si les coordonnées de l'un sont α, β, γ, les coordonnées de l'autre sont a^2/α, b^2/β, c^2/γ. Naturellement, il y a réciprocité entre les deux points. Centre de gravité et point symédian sont isogonaux ; de même orthocentre et centre du cercle circonscrit ; le centre du cercle inscrit (ou d'un cercle exinscrit) est à lui-même son isogonal. La transformation qui fait passer de M à M', donc du point (α, β, γ) au point (a^2/α, b^2/β, c^2/γ), est dite *transformation isogonale.* A une droite ($A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$) elle fait correspondre une conique ($A\,a^2\beta\gamma + B\,b^2\gamma\alpha + C\,c^2\alpha\beta = 0$). En particulier, à la droite de l'infini ($\alpha + \beta + \gamma = 0$), elle fait correspondre le cercle ($a^2\beta\gamma + b^2\gamma\alpha + c^2\alpha\beta = 0$) qui est le cercle circonscrit au triangle de référence.

R. E.

L'enseignement de la géométrie

A. Doneddu,
Mathématiques Supérieures, lycée Lavoisier, Paris.

1. *Pour un exposé géométrique de la Géométrie !*

A l'heure actuelle, il semble qu'une certaine confusion règne encore sur l'art d'enseigner la Géométrie et que quelques-uns aient une fâcheuse tendance à vouloir l'exposer d'une façon purement algébrique, se servant du tableau ponctuel pour faire des figures géométriques qui illustrent leurs raisonnements algébriques et qui sont indispensables aux élèves pour comprendre. Ils ne voudraient pas expliquer aux élèves comment et pourquoi le modèle géométrique dont ils se servent dans leurs illustrations correspond bien à celui dont ils parlent en Algèbre. En d'autres termes, ils veulent passer sous silence la manière de mathématiser l'espace qui nous entoure, c'est-à-dire ce qu'il est convenu d'appeler jusqu'ici la Géométrie. Au point de vue pédagogique, ce procédé est désastreux car il élimine à ce propos le principal intérêt de l'éducation mathématique : l'analyse logique par l'élève d'une situation agissant directement sur ses sens.

C'est pourquoi j'estime qu'il est plus sage et plus efficace de donner un exposé géométrique de la Géométrie !

Dans l' « Exposé élémentaire des principes de la géométrie euclidienne » (Gauthier-Villars, 1955), Robert Brisac avait donné une axiomatique basée sur le groupe des déplacements de l'espace.

Dans ma « Géométrie euclidienne plane » (Dunod, 1965), j'ai transposé cette axiomatique à la Géométrie plane grâce à la remarque suivante : les restrictions à un plan P des déplacements de l'espace constituent le groupe des isométries planes (positives et négatives).

Une théorie rigoureuse de la Géométrie est alors bâtie sur des axiomes d'origine géométrique et permet de donner un enseignement de cette discipline sur des bases mathématiques et logiques irréprochables. Une importante contribution est ainsi apportée, d'une part à l'édification d'une théorie axiomatique de la géométrie euclidienne et par conséquent à la Logique Mathématique, d'autre part à l'enseignement de la Géométrie qui peut être dispensé sur des fondements rigoureux et accessibles aux élèves.

L'exposé géométrique que je propose ici est non seulement rigoureux sur le plan mathématique mais encore colle étroitement à la réalité physique ; il est par conséquent profondément pédagogique.

On distingue au départ l'Espace d'une part (le plan ponctuel) et d'autre part le groupe de transformations qui opère sur cet espace. Le plan P est un ensemble de points dans lequel sont données des parties fondamentales : droites, demi-droites, demi-plans, dont les propriétés sont précisées par le système des *axiomes de l'espace.*

Le groupe G de transformations, nommées isométries, est précisé par le système des *axiomes du groupe.* La notion de groupe est liée étroitement à la notion d' « égalité » des figures. On dira que deux figures F et F' sont « isométriques » (au lieu d'égales) s'il existe une transformation du groupe G qui envoie F sur F'. La relation « F est isométrique à F' » est une équivalence dans l'ensemble des parties de P parce que précisément G est un groupe. L'antique notion d' « égalité » des figures est ainsi clarifiée et actualisée par l'idée très moderne de groupe qui opère sur un ensemble.

Dans des travaux récents, j'ai étudié l'indépendance du système d'axiomes de ma « Géométrie euclidienne plane » et j'ai pu notamment établir que les deux axiomes d'échange (« Pour tout couple de points il existe une isométrie qui les échange » et « Pour tout couple de demi-droites de même origine, il existe une isométrie qui les échange ») dépendaient du reste du système d'axiomes. Je vais exposer ici le système amélioré d'axiomes qui résulte de ces travaux.

2. *Axiomatique de la Géométrie euclidienne plane.*

1) *Axiomes de l'espace.*

Le plan P est un ensemble de points dans lequel sont données des parties fondamentales nommées droites, demi-droites, demi-plans.
AXIOME 1 ou *Axiome de la droite : Pour tout couple de points distincts, il existe une droite et une seule contenant ces deux points.*

Demi-droites : Pour toute droite D et tout point *a* de D est donné un partage de $D - \{a\}$ en deux parties non vides, appelées demi-droites opposées d'origine *a*.

Définition : On dira que « *a* est entre *b* et *c* », si *b* et *c* appartiennent à des demi-droites opposées d'origine *a*.

On peut alors énoncer l'axiome suivant, dit *axiome d'ordre :*

AXIOME 2 : *Dans tout triplet de points alignés distincts, il existe un point et un seul qui soit entre les deux autres.*

Cet axiome équivaut à la réunion des deux énoncés suivants :

(i) : Toute droite est un ensemble totalement ordonné.
(ii) : Toute droite est un ensemble au moins infini dénombrable.

Il est aussi à remarquer que pour toute droite et tout point de cette droite, le partage en demi-droites vérifiant l'axiome 2 est unique.
On peut alors définir les ensembles convexes de la manière habituelle.

Demi-plans : Pour toute droite D du plan P est donné un partage de P — D en deux parties non vides appelées demi-plans opposés de bord D vérifiant les axiomes suivants :

Axiomes des demi-plans.

AXIOME 3 (i) : *Tout demi-plan est convexe.*

AXIOME 3 (ii) : *Si a et b appartiennent à des demi-plans opposés de bord* D, *il existe un point de* D *entre a et b.*

Il est à remarquer que, pour toute droite D, le partage vérifiant ces deux axiomes est unique.

Drapeaux : Un drapeau est la réunion d'un demi-plan ouvert et d'une demi-droite incluse dans son bord (fig. 1). Pour l'exposer à des élèves, il sera avantageux de schématiser un drapeau comme sur la figure 2. On pourra même en découper dans un morceau de carton, pour illustrer, par une véritable expérience physique, le fait que l'axiome 7 qui les utilise correspond à la réalité sensible.

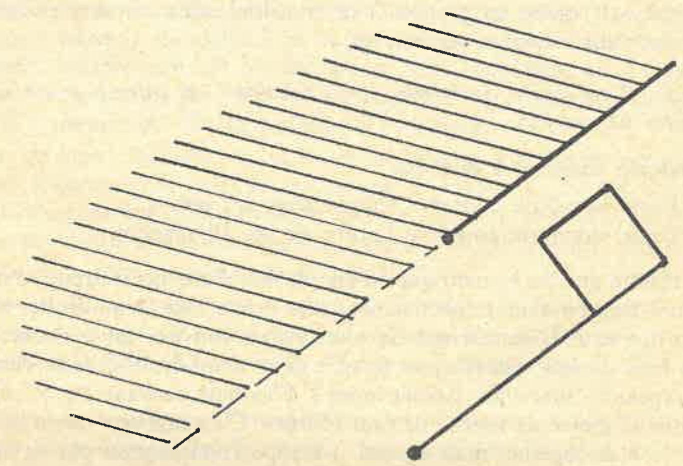

FIG. 1 Drapeaux FIG. 2

Dans les axiomes de l'espace, il faut encore placer l'axiome d'Euclide et aussi l'axiome de la borne supérieure.

Axiome d'Euclide.

AXIOME 4 : *Pour tout point a et pour toute droite* D, *il passe par a une parallèle et une seule à* D.
Il est à noter qu'un tel énoncé n'est pas indépendant du reste du système ; l'existence de la parallèle résulte, en effet, des axiomes du groupe. Seule

l'unicité de cette parallèle est indépendante du reste des axiomes. Mais pour un exposé didactique, il est bon de classer cet axiome dans le système de l'espace et d'étudier, de la manière habituelle, les propriétés élémentaires des parallèles qui en résultent, notamment l'équivalence dans l'ensemble des droites d'où se dégage la notion de direction.

Axiome de la borne supérieure.

AXIOME 5 : *Sur toute droite* D, *toute partie majorée admet un plus petit majorant.*

Cet axiome concerne uniquement une propriété d'ordre sur la droite et pourtant ses conséquences sont d'une importance capitale. Il équivaut à la réunion de l'axiome d'Archimède et celui de l'absence de lacunes. Mais l'axiome d'Archimède est un axiome du Groupe, puisqu'il implique la connaissance d'une addition de longueurs, donc une comparaison des segments par isométrie. En énonçant l'axiome de la borne supérieure, on fait donc économie d'un énoncé tout en ne faisant pas encore intervenir le groupe. Cet axiome concerne les propriétés topologiques de l'espace et introduit notamment la continuité de la droite, les nombres réels et les notions de mesure.

2) *Axiomes du groupe.*

Sur le plan P, opère un groupe G de transformations, nommées isométries, régi par les deux axiomes qui suivent.

AXIOME 6 : *Pour toute isométrie f, la relation « a entre b et c » entraîne « f(a) entre f(b) et f(c) ».*

Cet axiome équivaut à dire que :

(i) : Toute isométrie conserve l'alignement des points.
(ii) : Toute isométrie conserve l'ordre de cet alignement.

Il en résulte que les isométriques d'une droite, d'une demi-droite, d'un demi-plan, d'un drapeau sont respectivement une droite, une demi-droite, un demi-plan, un drapeau. L'isométrique de toute figure convexe est convexe.

Mais deux droites quelconques (resp. : deux demi-droites, deux demi-plans, deux drapeaux) sont-elles isométriques ? L'axiome suivant va y répondre ; il constitue la pierre de touche de tout l'édifice. C'est non seulement un axiome fort sur le plan logique, mais encore il frappe l'imagination par sa simplicité et son efficacité, sur le plan pédagogique.

AXIOME 7 : *Pour tout couple de deux drapeaux, il existe une isométrie et une seule qui applique le premier sur le second.*

En d'autres termes, le groupe G des isométries opère de façon *transitive* dans l'ensemble des drapeaux et par conséquent aussi dans l'ensemble des droites et dans le plan P lui-même. Il y a plus : l'unicité appartient uniquement au groupe des isométries !

Il est remarquable que les sept axiomes énoncés caractérisent entièrement la Géométrie euclidienne plane. On peut en dégager toutes les structures du plan, aussi bien algébriques que topologiques : structure de demi-groupe

ordonné des longueurs et théorie de leur mesure, translations et espace vectoriel, produit scalaire et métrique du plan, structure d'espace vectoriel normé complet (espace de Banach), structures angulaires du plan et théorie de la mesure des angles, rotations et mesure des rotations.

On peut alors définir rigoureusement les fonctions sinus et cosinus comme applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, sans faire intervenir les nombres complexes et aussi sans perdre son temps à définir le cosinus d'un angle géométrique (même en le notant Cos) parce que l'on ne veut pas savoir mesurer l'angle en question !

On peut tout de même énoncer, sans le démontrer, le théorème sur la mesure des angles ! Sinon, l'élève serait en droit de se demander ce qu'il pouvait bien faire lorsqu'il s'exerçait sur des tables trigonométriques !

3. *Présentation pédagogique aux élèves.*

En Terminale C, il est nécessaire d'exposer aux élèves les définitions et les propriétés premières sur lesquelles on s'appuie. On gagne en honnêteté et en efficacité si on leur donne loyalement les règles du jeu. Il faut reprendre avec soin les définitions précises des objets de la théorie qui sont d'ailleurs familiers. Les élèves reprennent confiance puisque l'on reprend devant eux les éléments à partir de zéro. J'estime qu'il ne faut pas plus d'une leçon d'une heure pour exposer les définitions et propriétés incluses dans l'axiomatique précédente, compte tenu de ce que savent déjà les élèves, en les avertissant que toute l'importance de l'axiome 7 du groupe des isométries va apparaître au fur et à mesure du développement de la théorie.

Dans une leçon suivante, on explique cet axiome aux élèves : on place deux drapeaux confectionnés avec des rectangles de carton à plat sur une table et l'on fait constater que l'on envoie le premier sur le second soit en le glissant sur la table (déplacement ou isométrie positive ou glissement), soit en le glissant puis en le retournant (isométrie négative).

Au cours de la théorie, on dégage de cet axiome fondamental, selon la disposition du couple de drapeaux, les pliages (les générateurs du groupe) (fig. 3), les symétries à centre (fig. 4), les translations (fig. 5), les rotations (fig. 6).

Les drapeaux frappent l'imagination des étudiants et sont d'un emploi commode pour dégager les propriétés des isométries. De plus, ils entraînent les élèves à la notion capitale d'application d'un ensemble dans un ensemble : le groupe des isométries opère transitivement dans l'ensemble des drapeaux, des morceaux entiers du plan.

Le sous-groupe commutatif des translations étant dégagé à partir de propriétés découlant de l'axiome 7 (appliqué à la figure 5), on enchaîne en dégageant la notion de vecteur et d'espace vectoriel.

A partir du projecteur orthogonal, on introduit le produit scalaire et la notion d'espace vectoriel normé.

Toujours à partir de l'axiome 7 (cette fois appliqué à la figure 6), on dégage le sous-groupe commutatif des rotations de centre fixé. On explique ensuite aux élèves la mesure des rotations en énonçant le théorème de l'isomorphie de ce groupe sur le groupe $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ des classes de nombres réels modulo 2π. Evidemment, il suffit d'expliquer la nécessité d'introduire les congruences modulo 2π ; les démonstrations ne sont pas au programme ; il suffit de savoir et de dire qu'elles existent ! A cet endroit, une définition claire et rigoureuse du sinus et du cosinus, puis un rappel des principales formules trigonométriques, ne feront certainement pas de mal !

On étudie enfin le déplacement le plus général du plan puis l'isométrie la plus générale, en notant qu'elle est composée de trois pliages au plus.

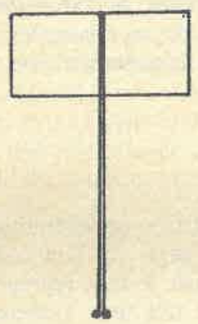

FIG. 3. — Pliage

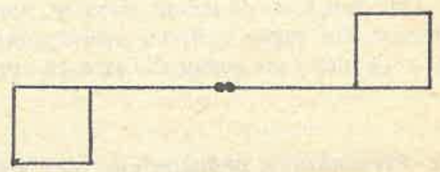

FIG. 4. — Symétrie à centre

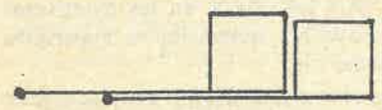

FIG. 5. — Translation

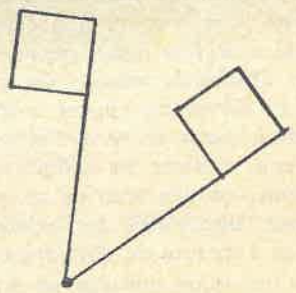

FIG. 6. — Rotation

En résumé, l'énoncé complet de ce système d'axiomes caractéristique de la Géométrie euclidienne permet de montrer aux élèves les règles du jeu et de leur enseigner une théorie basée sur des fondements logiques cohérents.

Cette axiomatique reprend les connaissances antérieures des élèves et les fait progresser vers les idées actuelles d'un espace ponctuel sur lequel opère un groupe de transformations.

L'introduction des drapeaux permet de transformer des parties entières de l'espace et d'éviter l'emploi de repères rigides qui masquent la profondeur de ces transformations, en particulier dans les questions délicates d'orientation.

Dans un exposé simplifié, on peut éviter de donner, *in extenso,* l'axiomatique complète, si le niveau de la classe l'exige. On ne se sert alors pratiquement que de l'axiome 7, d'où sont dégagées les principales isométries : les pliages, générateurs du groupe, le sous-groupe commutatif des translations et celui des rotations de centre fixé.

Un tel développement de la Géométrie euclidienne allie élégamment les exigences actuelles de la logique et les nécessités pédagogiques ; l'exposé est non seulement profondément géométrique, mais encore il colle littéralement à notre espace sensible.

A. DONEDDU.

Matériaux pour un dictionnaire.

La publication des notices du dictionnaire sur fiches encartées ne doit pas tarir la rubrique « Matériaux pour un dictionnaire » où ces notices paraissaient jusqu'ici ; cette rubrique doit seulement évoluer vers une forme nouvelle permettant une consultation permanente des membres de l'A.P.M. au sujet des notations et du vocabulaire. Même si les « matériaux » ainsi rassemblés sont bruts au lieu d'être semi-finis, leur utilité ne sera pas moindre dans la construction générale, et quelques lettres reçues indiquent qu'un tel dialogue répondrait au souhait profond de plusieurs collègues.

Quelques remarques toutefois. D'abord, il n'est pas nécessaire que toutes les critiques ou suggestions soient entièrement neuves : tant qu'un problème n'est pas réglé par un large accord, il faut continuer à le poser. Dans l'état actuel de l'enseignement mathématique, état de transition, parfois d'incertitude et d'inquiétude, certaines routines doivent être dénoncées avec insistance, mais ne disparaîtront que si de meilleures solutions sont proposées et adoptées.

Corollaire : il ne faut pas avoir de fausse honte à proposer inlassablement de telles solutions, *ni même parfois à courir un risque d'erreur en les proposant.* Corrélativement : s'il arrive qu'un collègue se trompe — ou si la commission du dictionnaire se trompe, cela peut fort bien se produire — il n'est pas besoin d'adopter un ton sarcastique pour le signaler. De toute façon, la commission ne publiera aucun texte à caractère polémique ; à cette restriction près, elle veillera à ce que cette tribune soit parfaitement libre.

J. C.

Diverses lettres ont été reçues, parmi lesquelles celles de Sémah (Bordeaux), Sauser (Dijon), Chaye (Loudun), sans compter celles qui émanent de membres de la commission, dont le sous-ensemble lyonnais est particulièrement actif. Voici quelques points assez généraux :

Inégalité : La commission approuve la suggestion de réserver ce mot pour la relation symbolisée par $\neq$ et de le proscrire pour $<$, $\geqslant$, etc. Mais que faut-il dire pour ces dernières ? On a proposé *infériorité* — et, bien sûr, *supériorité* — ou encore *comparaison.* Le point délicat sera de rendre la nuance traditionnellement exprimée par *inégalité* et *inéquation.*

Graphe : Après un engouement excessif pour ce mot qui faisait « moderne », les protestations s'élèvent : un graphe, c'est une partie de $E \times F$, ce n'est pas un dessin ; qu'on dise *graphique, représentation graphique* (ou *géométrique*) ! Sur ce point la commission exprime son accord total ; aux opposants, s'il y en a, de défendre le « graphe ».

Relation : Une suggestion — qui n'est pas nouvelle, mais qu'il importerait de fixer — recommande : relation de E *vers* F. De même on rappelle que $x\mathrm{R}y$ est une *proposition,* mais non une relation : la relation, c'est R (l'égalité, le parallélisme, . . ., et non pas $x = y$, $D//D'$, etc.) ; il ne faut pas dissimuler toutefois qu'on se heurte là à de fortes habitudes de langage.