bulletin de l'association des

professeurs de mathématiques

de l'enseignement public

“de la Maternelle aux Facultés”

Connecteurs logiques • Des cours d'arithmétique • La continuité • Expérience en Quatrième • RAPPORT DE LA COMMISSION MINISTÉRIELLE • Programmes pour les classes élémentaires • Vive Euclide ! • Les collègues écrivent • L'Assemblée générale

bimestriel - 46e année - mai-septembre 1967

n° 258

L'allure du graphique conduit à chercher les couples fautifs dans les voisinages des points où la dérivée prend de grandes valeurs absolues (on sait que ce n'est pas suffisant *a priori*, mais c'est une indication).

Prenons

$$\begin{cases} x' = n\pi + h \ (n \in \mathbb{N}) & \text{d'où } y' - y'' = \pm (n\pi + h) \sin h \\ x'' = n\pi \end{cases}$$

alors quel que soit h pris dans $]0, \frac{\pi}{2}]$, $|y' - y''|$ prend des valeurs arbitrairement grandes pour n suffisamment grand.

Le lecteur ne manquera pas de nous demander à quel niveau nous pensons que de tels exercices puissent être faits. Nous pourrons le préciser relativement : c'est dès que l'on parlera de la continuité avec l'intention honorable de la faire comprendre.

Si nous avons la curiosité (honorable aussi) de consulter les programmes nous constatons que les barrages familiers sont là : toujours « on admettra sans démonstration... » (on peut dire que les mathématiques sont une « discipline » !). Mais peu importe, nous venons seulement de donner des exemples destinés à illustrer les définitions.

Effectivement il est difficile, dans un enseignement d'initiation, de démontrer, par exemple, l'uniforme continuité d'une application continue sur un segment.

Mais qu'on nous permette cependant — et pour terminer — la remarque suivante : les fonctions qu'on rencontre dans l'enseignement élémentaire sont le plus souvent monotones par morceaux, de plus, les ensembles de départ et image sont des réunions finies d'intervalles alors il est intéressant de démontrer la propriété suivante, qui est d'ailleurs bien banale :

f étant définie sur $[a, b]$ et monotone (croissante, par exemple), si l'image de $[a, b]$ par f est le segment $[f(a), f(b)]$, f est uniformément continue.

C'est intéressant parce que c'est simple, et plus fort, en un sens, que la propriété énoncée plus haut, car il n'y a aucune propriété de continuité dans l'hypothèse.

Donnons brièvement la démonstration :

à une partition de $[f(a), f(b)]$ en n intervalles égaux tels que $\dfrac{f(b) - f(a)}{n} < \varepsilon$ (ε étant positif arbitraire, n en résulte) correspond une partition (une seule si f est strictement croissante) de $[a, b]$ par des points

$$x_0 = a, x_1, \ldots, x_i \ldots, x_n = b\ ; \ \textit{en prenant}$$
$$h = \inf(x_{i+1} - x_i),$$

pour tout couple $x'x''$ tel que $0 < x' - x'' < h$ on a

$f(x_i) - f(x'') < \varepsilon$ ou $\ldots < 2\varepsilon$ selon que x' et x'' appartiennent à un même intervalle ou à deux intervalles adjacents de la partition qu'on a formée sur $[a, b]$.

On remarquera que cette propriété entraîne immédiatement la continuité uniforme de f^{-1} définie pour f strictement monotone et continue sur un segment.

Sur l'utilité des barycentres

R. Estève,

professeur honoraire au lycée J.-Decour.

Plan. — Dans un ouvrage de Mathématiques pour la classe de Première, il est proposé un exercice dont voici une partie seulement : I *étant le barycentre des points massifs* (A, α), (B, β), (C, γ), ($\alpha + \beta + \gamma \neq 0$), *à quoi est égal* $(\alpha\,\overrightarrow{IA} + \beta\,\overrightarrow{IB} + \gamma\,\overrightarrow{IC})^2$? *Montrer que l'on peut en déduire*

$$\alpha\,IA^2 + \beta\,IB^2 + \gamma\,IC^2$$

en fonction de α, β, γ *et des côtés a, b, c du triangle* ABC.

Comme $\alpha\,\overrightarrow{IA} + \beta\,\overrightarrow{IB} + \gamma\,\overrightarrow{IC} = \vec{0}$, il s'agit de montrer que le carré scalaire d'un vecteur nul est le scalaire 0. Dans presque tous les ouvrages où se trouve exposé le produit scalaire de deux vecteurs, on oublie de signaler ceci (que l'on utilise tout de même constamment) que le produit scalaire de deux vecteurs est nul dans deux cas et deux seulement, le cas où l'un au moins des vecteurs est nul (c'est ce cas qui est surtout oublié) et le cas où les deux vecteurs sont rectangulaires. Si le produit scalaire des deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ (nous les prenons de même origine pour mieux nous expliquer) est défini par l'égalité $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos\theta$ (ce qui est courant, à condition de connaître déjà le cosinus), le produit qui figure au second membre de cette égalité a son troisième facteur qui dépend évidemment des deux vecteurs et qui n'a aucun sens lorsque l'un au moins de ceux-ci est nul, par exemple $\overrightarrow{OA}$. La seule ressource est alors un passage à la limite : pour cela, on prend deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ faisant l'angle θ et l'on imagine que A se déplace sur la demi-droite OA et tend vers O ; OA devient nul, OB reste le même ainsi que $\cos\theta$, et $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ tend vers 0. Dans le cas particulier où $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$, donc $\theta = 0$, ceci conduit à dire que $(\vec{0})^2 = 0$. Si le produit scalaire $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ est défini par $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OI^2 - IA^2$, où I est le milieu de AB (on ne connaît pas encore le cosinus et c'est ce que nous avons fait dans notre article du n° 238), les précautions précédentes sont inutiles : par exemple, si $\overrightarrow{OA} = 0$, I est au milieu de OB et $OI^2 - IA^2$ ou $OI^2 - IB^2 = 0$.

Si nous nous sommes décidé à faire ces quelques remarques, c'est qu'il nous a semblé que, dans une première mise en contact des élèves avec le produit scalaire, la rigueur doit s'imposer. Peut-être même (nous allons sans doute un peu trop loin), faut-il aussi souligner que la relation

$$(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) . \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} . \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} . \overrightarrow{OC}$$

est bien vraie quand, des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, un au moins est nul.

Cela étant, profitons de la question posée dans ledit exercice pour en tirer, si possible, des conséquences intéressantes. En développant le carré scalaire $(\alpha\,\overrightarrow{IA} + \beta\,\overrightarrow{IB} + \gamma\,\overrightarrow{IC})^2$, on obtient :

$$\alpha^2 IA^2 + \beta^2 IB^2 + \gamma^2 IC^2 + 2\,\beta\gamma \overrightarrow{IB} . \overrightarrow{IC} + 2\,\gamma\alpha \overrightarrow{IC} . \overrightarrow{IA} + 2\,\alpha\beta \overrightarrow{IA} . \overrightarrow{IB} = 0.$$

En remarquant que $2\,\overrightarrow{IB} . \overrightarrow{IC} = IB^2 + IC^2 - a^2$,

$$2\,\overrightarrow{IC} . \overrightarrow{IA} = IC^2 + IA^2 - b^2, \quad 2\,\overrightarrow{IA} . \overrightarrow{IB} = IA^2 + IB^2 - c^2,$$

ceci conduit, tous calculs faits, à :

$$\alpha\, IA^2 + \beta\, IB^2 + \gamma\, IC^2 = \frac{\beta\gamma\, a^2 + \gamma\alpha\, b^2 + \alpha\beta\, c^2}{\alpha + \beta + \gamma}$$

Le résultat obtenu paie largement le petit effort fait pour l'obtenir, car il permet d'avoir $\alpha\, IA^2 + \beta\, IB^2 + \gamma\, IC^2$ avec α, β, γ quelconques pourvu que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

Les exemples à signaler ne manquent pas.

Si I est le centre de gravité du triangle ABC, on a :

$$IA^2 + IB^2 + IC^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$$

Si I est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC, on a :

$$a\, IA^2 + b\, IB^2 + c\, IC^2 = abc.$$

Si I est le centre du cercle exinscrit dans l'angle A, on a :

$$a\, IA^2 - b\, IB^2 - c\, IC^2 = abc.$$

On a une formule analogue pour le centre de chacun des deux autres cercles exinscrits.

Si I est le point symédian, on a :

$$a^2 IA^2 + b^2 IB^2 + c^2 IC^2 = \frac{3\,a^2b^2c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Si I est l'orthocentre, on obtient aisément :

$$\operatorname{tg} A\, IA^2 + \operatorname{tg} B\, IB^2 + \operatorname{tg} C\, IC^2 = a^2 \operatorname{cotg} A + b^2 \operatorname{cotg} B + c^2 \operatorname{cotg} C.$$

Etc., etc...

Si l'on pose $IA = a'$, $IB = b'$, $IC = c'$, la relation trouvée dans le cas général (α, β, γ quelconques mais de somme non nulle) s'écrit :

$$\alpha\, a'^2 + \beta\, b'^2 + \gamma\, c'^2 = \frac{\beta\gamma\, a^2 + \gamma\alpha\, b^2 + \alpha\beta\, c^2}{\alpha + \beta + \gamma}$$

Cette relation est une conséquence de la relation $\alpha\,\overrightarrow{IA} + \beta\,\overrightarrow{IB} + \gamma\,\overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Mais entraîne-t-elle cette dernière ? Oui, car les relations

$$\alpha\,\overrightarrow{IA} + \beta\,\overrightarrow{IB} + \gamma\,\overrightarrow{IC} = \vec{0} \quad \text{et} \quad (\alpha\,\overrightarrow{IA} + \beta\,\overrightarrow{IB} + \gamma\,\overrightarrow{IC})^2 = 0$$

sont équivalentes, le carré scalaire d'un vecteur ne pouvant être nul que si ce vecteur est nul.

Il en résulte que, avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, la relation

$$(\alpha + \beta + \gamma) \quad (\alpha\, a'^2 + \beta\, b'^2 + \gamma\, c'^2) = \beta\gamma\, a^2 + \gamma\alpha\, b^2 + \alpha\beta\, c^2$$

constitue une condition nécessaire et suffisante pour que le point dont les distances à A, B, C sont respectivement a', b', c' ait pour coordonnées barycentriques α, β, γ pour le triangle ABC dont les côtés sont a, b, c.

En particulier, pour que I soit le centre du cercle inscrit dans ABC, il faut et il suffit que l'on ait :

$$a\, a'^2 + b\, b'^2 + c\, c'^2 - abc = 0$$

et, pour que I soit le centre du cercle exinscrit dans l'angle A, il faut et il suffit que l'on ait :

$$a\, a'^2 - b\, b'^2 - c\, c'^2 - abc = 0.$$

On trouve des conditions analogues avec les deux autres cercles exinscrits.

Nous répondons ainsi à la question 247 - E 11 (1) posée par notre collègue A. Adler, professeur de Spéciales à Condorcet, dans le *Bulletin* n° 247, p. 257, mais avec quatre réponses. Si la relation demandée doit être unique, c'est-à-dire s'appliquer à la fois aux quatre cercles tangents aux côtés du triangle, nous voyons bien la relation $R\,R'\,R''\,R''' = 0$, où R, R', R'', R''' sont les premiers membres des quatre relations trouvées, mais elle nous paraît compliquée. On peut remarquer que cette relation est bien nécessaire et suffisante pour que le point I distancé de A, B, C par a', b', c' respectivement soit le centre d'un des cercles tangents aux côtés du triangle ABC : nécessaire car, si I est l'un des quatre centres, un seul des facteurs R, R', R'', R''' est nul et leur produit est donc nul ; suffisante, car, si I satisfait à la relation $R\,R'\,R''\,R''' = 0$, l'un seulement des facteurs est nul (deux ne peuvent être nuls) et I est donc l'un des quatre centres.

En effectuant les calculs [il suffit d'utiliser plusieurs fois l'identité $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$], la relation s'écrit :

$$[a^2(a'^4 + b^2c^2) - (b^2b'^4 + c^2c'^4)]^2 - 4b^2c^2(a^2a'^2 + b'^2c'^2)^2 = 0.$$

Peut-on la ramener à une forme plus simple ? En tout cas, si l'on développe le premier membre, on constate qu'il ne change pas par permutation circulaire sur les triplets a, b, c et a', b', c' (on pouvait aussi le constater sur la forme $R\,R'\,R''\,R'''$ non développée), comme il se doit. Nous n'avons pas poussé plus loin, n'ayant saisi qu'au passage le problème posé par notre collègue. Nous espérons que d'autres collègues trouveront mieux.

Revenons au sujet choisi. Si l'on combine la relation donnant

$$\alpha\, IA^2 + \beta\, IB^2 + \gamma\, IC^2$$

avec la relation de Leibniz, on est conduit à des résultats intéressants ; cette dernière relation s'écrit alors, avec M quelconque :

$$\alpha\, MA^2 + \beta\, MB^2 + \gamma\, MC^2 = (\alpha + \beta + \gamma)\, MI^2 + \frac{\beta\gamma a^2 + \gamma\alpha b^2 + \alpha\beta c^2}{\alpha + \beta + \gamma}$$

---

(1) Trouver une relation aussi simple que possible entre les six nombres a, b, c, a', b', c' pour que I soit le centre de l'un des cercles tangents aux trois côtés du triangle.

Dans le cas particulier où M est en O, centre du cercle circonscrit à ABC, ceci donne, en désignant par R le rayon du cercle et par d la distance OI :

$$R^2 - d^2 = \frac{\beta\gamma a^2 + \gamma\alpha b^2 + \alpha\beta c^2}{(\alpha + \beta + \gamma)^2}$$

Si $\overline{\mathrm{I}}_{(0)}$ désigne la puissance de I pour le cercle (O), on en déduit :

$$\overline{\mathrm{I}}_{(0)} = -\frac{\beta\gamma a^2 + \gamma\alpha b^2 + \alpha\beta c^2}{(\alpha + \beta + \gamma)^2}$$

I étant le centre du cercle inscrit, dont le rayon est désigné par r, on trouve alors assez facilement $d^2 = R^2 - 2Rr$, c'est-à-dire une des relations d'Euler. On peut avoir de même les trois autres avec les cercles exinscrits.

Au surplus, en écrivant $\overline{\mathrm{I}}_{(0)} = 0$, on obtient l'équation du cercle circonscrit en coordonnées barycentriques avec ABC comme triangle de référence, à savoir $a^2\beta\gamma + b^2\gamma\alpha + c^2\alpha\beta = 0$.

Tout ce qui précède ne met-il pas trop en vedette le triangle à une époque où celui-ci a vraiment mauvaise presse, avec la Géométrie pure tout entière ? Il est certainement vrai que le cri de guerre de M. le Professeur Dieudonné n'est qu'une boutade pour stigmatiser certaines formes plus ou moins malsaines (uniquement parce que démodées actuellement) de trigonite, car il nous est bien difficile de croire à une élimination totale possible du triangle de certaines structures générales où il peut intervenir avec intérêt. Peut-on vraiment parler de coordonnées barycentriques dans le plan sans le triangle, pas plus que dans l'espace sans le tétraèdre ?

Espace. — Il est fort probable que tout ce qui précède, transposé dans l'espace, peut donner des résultats intéressants. Nous signalerons simplement ces résultats sans insister sur leur établissement, entièrement analogue à celui utilisé pour le plan.

I étant le barycentre des points massifs (A, α), (B, β), (C, γ), (D, δ) (donc $\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$), l'élévation au carré scalaire de l'égalité vectorielle $\alpha\,\overrightarrow{\mathrm{IA}} + \beta\,\overrightarrow{\mathrm{IB}} + \gamma\,\overrightarrow{\mathrm{IC}} + \delta\,\overrightarrow{\mathrm{ID}} = \vec{0}$ conduit à l'égalité scalaire :

$$\alpha \mathrm{IA}^2 + \beta \mathrm{IB}^2 + \gamma \mathrm{IC}^2 + \delta \mathrm{ID}^2 = \frac{\alpha\beta a^2 + \alpha\gamma a'^2 + \alpha\delta a''^2 + \beta\gamma d^2 + \beta\delta c^2 + \gamma\delta b^2}{\alpha + \beta + \gamma + \delta}$$

où $a = \mathrm{AB}$, $a' = \mathrm{AC}$, $a'' = \mathrm{AD}$, $b = \mathrm{CD}$, $c = \mathrm{DB}$, $d = \mathrm{BC}$.

Si $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$, I est le centre de gravité des points A, B, C, D, et l'on a alors :

$$\mathrm{IA}^2 + \mathrm{IB}^2 + \mathrm{IC}^2 + \mathrm{ID}^2 = \frac{a^2 + a'^2 + a''^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}$$

Si $\alpha = S_A$ (aire de BCD), $\beta = S_B$, $\gamma = S_C$, $\delta = S_D$, I est le centre de la sphère inscrite dans le tétraèdre ABCD, et l'on a alors :

$$S_A\,\mathrm{IA}^2 + S_B\,\mathrm{IB}^2 + S_C\,\mathrm{IC}^2 + S_D\,\mathrm{ID}^2 = \frac{S_A S_B\, a^2 + \ldots + S_C S_D\, b^2}{S_A + S_B + S_C + S_D}$$

Si $\alpha = S_A^2$, $\beta = S_B^2$, $\gamma = S_C^2$, $\delta = S_D^2$, I est le premier point de Lemoine du tétraèdre ABCD, et l'on a une égalité analogue à la précédente où les S sont remplacés par les S^2.

Etc., etc...

Par combinaison avec la relation de Leibniz, on obtient, avec un point M quelconque :

$$\alpha \mathrm{MA}^2 + \beta \mathrm{MB}^2 + \gamma \mathrm{MC}^2 + \delta \mathrm{MD}^2 = (\alpha + \beta + \gamma + \delta)\, \mathrm{MI}^2 + \frac{\alpha\beta a^2 + \alpha\gamma a'^2 + \alpha\delta a''^2 + \beta\gamma d^2 + \beta\delta c^2 + \gamma\delta b^2}{\alpha + \beta + \gamma + \delta}$$

Si M est le centre de O de la sphère circonscrite à ABCD, ceci conduit à, en désignant par R le rayon de la sphère et par d la distance OI :

$$d^2 - R^2 \ (\text{où } \overline{\mathrm{I}}_{(0)}) = -\frac{\alpha\beta a^2 + \alpha\gamma a'^2 + \alpha\delta a''^2 + \beta\gamma d^2 + \beta\delta c^2 + \gamma\delta b^2}{(\alpha + \beta + \gamma + \delta)^2}$$

Il est facile d'écrire les formules obtenues pour la puissance en prenant pour I le centre de gravité de ABCD et pour I le centre de la sphère inscrite dans ABCD. La deuxième peut se modifier en introduisant d'autres éléments de ABCD que les S, mais on n'a pas de formule aussi simple que dans le plan.

En écrivant $\overline{\mathrm{I}}_{(0)} = 0$ dans la relation générale, on trouve l'équation de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD en coordonnées barycentriques avec celui-ci comme tétraèdre de référence, à savoir :

$$a^2\alpha\beta + a'^2\alpha\gamma + a''^2\alpha\delta + d^2\beta\gamma + c^2\beta\delta + b^2\gamma\delta = 0.$$

Si l'on fait $\alpha = 0$, on trouve l'équation du cercle circonscrit au triangle BCD, relativement à ce triangle, à savoir $d^2\beta\gamma + c^2\beta\delta + b^2\gamma\delta = 0$, ce qui est conforme à un résultat donné plus haut.

Autres résultats (plan et espace). — Le point symédian d'un triangle ABC étant le centre de gravité de son triangle podaire XYZ, on a donc, en utilisant une formule trouvée plus haut :

$$\mathrm{MX}^2 + \mathrm{MY}^2 + \mathrm{MZ}^2 = \frac{\mathrm{XY}^2 + \mathrm{XZ}^2 + \mathrm{YZ}^2}{3}$$

on obtient ainsi le minimum de la somme des carrés des distances d'un point aux côtés d'un triangle en fonction de la somme des carrés des côtés du triangle podaire du point où a lieu ce minimum.

Le point symédian d'un tétraèdre ABCD étant le centre de gravité de son tétraèdre podaire XYZT, on a aussi, en utilisant une formule trouvée plus haut :

$$\mathrm{MX}^2 + \mathrm{MY}^2 + \mathrm{MZ}^2 + \mathrm{MT}^2 = \frac{\mathrm{XY}^2 + \mathrm{XZ}^2 + \mathrm{XT}^2 + \mathrm{YZ}^2 + \mathrm{YT}^2 + \mathrm{ZT}^2}{4}$$

on obtient ainsi le minimum de la somme des carrés des distances d'un point aux facettes d'un tétraèdre en fonction de la somme des carrés des arêtes du tétraèdre podaire du point où a lieu ce minimum.

Le deuxième point de Lemoine d'un tétraèdre ABCD (point dont la somme des carrés des distances aux arêtes est minimum, que nous avons étudié au n° 231), étant le centre de gravité de ses projections orthogonales X, Y, Z, T, U, V sur les arêtes, on obtient, en élevant au carré scalaire la relation $\overrightarrow{\mathrm{MX}} + \overrightarrow{\mathrm{MY}} + \overrightarrow{\mathrm{MZ}} + \overrightarrow{\mathrm{MT}} + \overrightarrow{\mathrm{MU}} + \overrightarrow{\mathrm{MV}} = \vec{0}$, le minimum en fonction de la somme des carrés des distances mutuelles des projections orthogonales sur les arêtes du point où a lieu ce minimum (le minimum est le 1/6^e de cette somme).

Retour au plan. Transformation isogonale. — Ceci pour mieux souligner encore l'utilité des barycentres. Etant donné un triangle ABC, soit deux points D et D' situés sur la droite BC : les coordonnées barycentriques de D sont de la forme 0, β, γ et celles de D' de la forme 0, β', γ'. Supposons que les droites AD, AD' soient antiparallèles pour le couple de droites AB, AC (on dit aussi *isogonales* pour ce couple) : il existe donc une relation entre les quatre scalaires β, γ, β', γ' ; cherchons-la. Par symétrie pour une bissectrice des droites AB, AC, AD et AD' s'échangent. Si nous prenons la bissectrice qui traverse le triangle, alors les demi-droites AB et AC s'échangent, ainsi que les demi-droites AD, AD'. Par symétrie pour cette bissectrice, $\overrightarrow{AB}$ devient $\frac{c}{b}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC}$ devient $\frac{b}{c}\overrightarrow{AB}$ et $\beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}$ devient $\beta\frac{c}{b}\overrightarrow{AC} + \gamma\frac{b}{c}\overrightarrow{AB}$. Comme $\beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} = (\beta + \gamma)\overrightarrow{AD}$, d'après la théorie des barycentres, $\beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}$ est un vecteur de AD ; par suite, $\gamma\frac{b}{c}\overrightarrow{AB} + \beta\frac{c}{b}\overrightarrow{AC}$ est un vecteur de AD' ; $\beta'\overrightarrow{AB} + \gamma'\overrightarrow{AC}$ en étant un autre (même raison que pour $\beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}$), il existe donc un scalaire λ tel que $\beta' = \lambda\gamma\frac{b}{c}$ et $\gamma' = \lambda\beta\frac{c}{b}$, d'où, en éliminant λ :

$$\frac{\beta'}{\gamma'} = \frac{\beta}{\gamma} \times \frac{b^2}{c^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\beta\beta'}{b^2} = \frac{\gamma\gamma'}{c^2}.$$

Telle est la relation cherchée. On voit qu'elle est suffisante pour entraîner l'antiparallélisme des couples (AB, AC) et (AD, AD').

Cela étant, soit M un point de coordonnées barycentriques α, β, γ pour le triangle ABC. Soit M' le point où les antiparallèles de AM pour (AB, AC) et de BM pour (BC, BA) se coupent. En désignant par α', β', γ' les coordonnées barycentriques de M', on a donc :

$$\frac{\beta\beta'}{b^2} = \frac{\gamma\gamma'}{c^2} \quad \text{et} \quad \frac{\gamma\gamma'}{c^2} = \frac{\alpha\alpha'}{a^2}.$$

D'où $\frac{\alpha\alpha'}{a^2} = \frac{\beta\beta'}{b^2}$: par suite, CM' est l'anti-parallèle de CM pour (CA, CB). Autrement dit, les anti-parallèles de trois céviennes pour un triangle ABC sont encore trois céviennes. Les points correspondants sont dits *isogonaux*. Si les coordonnées de l'un sont α, β, γ, les coordonnées de l'autre sont a^2/α, b^2/β, c^2/γ. Naturellement, il y a réciprocité entre les deux points. Centre de gravité et point symédian sont isogonaux ; de même orthocentre et centre du cercle circonscrit ; le centre du cercle inscrit (ou d'un cercle exinscrit) est à lui-même son isogonal. La transformation qui fait passer de M à M', donc du point (α, β, γ) au point (a^2/α, b^2/β, c^2/γ), est dite *transformation isogonale.* A une droite ($A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$) elle fait correspondre une conique ($A\,a^2\beta\gamma + B\,b^2\gamma\alpha + C\,c^2\alpha\beta = 0$). En particulier, à la droite de l'infini ($\alpha + \beta + \gamma = 0$), elle fait correspondre le cercle ($a^2\beta\gamma + b^2\gamma\alpha + c^2\alpha\beta = 0$) qui est le cercle circonscrit au triangle de référence.

R. E.

L'enseignement de la géométrie

A. Doneddu,
Mathématiques Supérieures, lycée Lavoisier, Paris.

1. *Pour un exposé géométrique de la Géométrie !*

A l'heure actuelle, il semble qu'une certaine confusion règne encore sur l'art d'enseigner la Géométrie et que quelques-uns aient une fâcheuse tendance à vouloir l'exposer d'une façon purement algébrique, se servant du tableau ponctuel pour faire des figures géométriques qui illustrent leurs raisonnements algébriques et qui sont indispensables aux élèves pour comprendre. Ils ne voudraient pas expliquer aux élèves comment et pourquoi le modèle géométrique dont ils se servent dans leurs illustrations correspond bien à celui dont ils parlent en Algèbre. En d'autres termes, ils veulent passer sous silence la manière de mathématiser l'espace qui nous entoure, c'est-à-dire ce qu'il est convenu d'appeler jusqu'ici la Géométrie. Au point de vue pédagogique, ce procédé est désastreux car il élimine à ce propos le principal intérêt de l'éducation mathématique : l'analyse logique par l'élève d'une situation agissant directement sur ses sens.

C'est pourquoi j'estime qu'il est plus sage et plus efficace de donner un exposé géométrique de la Géométrie !

Dans l' « Exposé élémentaire des principes de la géométrie euclidienne » (Gauthier-Villars, 1955), Robert Brisac avait donné une axiomatique basée sur le groupe des déplacements de l'espace.

Dans ma « Géométrie euclidienne plane » (Dunod, 1965), j'ai transposé cette axiomatique à la Géométrie plane grâce à la remarque suivante : les restrictions à un plan P des déplacements de l'espace constituent le groupe des isométries planes (positives et négatives).

Une théorie rigoureuse de la Géométrie est alors bâtie sur des axiomes d'origine géométrique et permet de donner un enseignement de cette discipline sur des bases mathématiques et logiques irréprochables. Une importante contribution est ainsi apportée, d'une part à l'édification d'une théorie axiomatique de la géométrie euclidienne et par conséquent à la Logique Mathématique, d'autre part à l'enseignement de la Géométrie qui peut être dispensé sur des fondements rigoureux et accessibles aux élèves.