bulletin de l'association des

professeurs de mathématiques

de l'enseignement public

“de la Maternelle aux Facultés”

Connecteurs logiques • Des cours d'arithmétique • La continuité • Expérience en Quatrième • RAPPORT DE LA COMMISSION MINISTÉRIELLE • Programmes pour les classes élémentaires • Vive Euclide ! • Les collègues écrivent • L'Assemblée générale

bimestriel - 46e année - mai-septembre 1967

n° 258

Références

(1) G. Choquet, Sur l'enseignement de la géométrie élémentaire, chapitre V de *L'enseignement des Mathématiques,* Delachaux et Niestlé (1955).

(2) G. Choquet, Une axiomatique commode pour le premier enseignement de la géométrie élémentaire, *Bulletin de l'A.P.M.*, n° 209-213 (1960).

(3) G. Choquet, *L'enseignement de la géométrie,* Hermann (1964).

(4) C. Frasnay, Un développement de la géométrie plane élémentaire (des axiomes à la mesure des angles et au produit segmentaire), *Alger-Mathématiques* (déc. 1959).

(5) C. Frasnay, Deux structures équivalentes pour la géométrie plane, *Bulletin de l'A.P.M.*, n° 223 (1962).

(6) J. Lelong-Ferrand, Les axiomes de la géométrie élémentaire, chapitre XII de la *Géométrie différentielle,* Masson (1963).

Sur l'enseignement de l'analyse : la continuité

J. Siros,

Mathématiques Supérieures, Louis-le-Grand.

Dans une récente conférence à la Régionale de Paris, A. Revuz a montré qu'il est possible d'introduire « tôt et progressivement » des notions réputées difficiles, par exemple : fonctions *en escalier, linéaires par morceaux,* et leurs relations par *dérivation* et *intégration.* Sans les simplifier, Revuz a montré qu'elles étaient simples. L'élève de Seconde (par exemple) peut assimiler cela, il n'aura pas à corriger ces notions, si loin qu'il aille plus tard en Mathématiques.

Je ne sais si les mots soulignés se liront un jour dans le texte d'un programme de Seconde, mais, aujourd'hui, le professeur qui les ferait inscrire sur les cahiers de ses élèves serait sans doute mal vu. Cela montre que les dépassements du programme n'ont pas pour but d'assommer les élèves, mais au contraire d'introduire plus de clarté dans le programme lui-même, tout strict qu'il soit (grandeurs proportionnelles, variation d'une grandeur).

On peut se proposer, avant d'aborder l'idée de dérivation, d'éclaircir et de préciser celle de continuité. Car si la dérivation d'une application est en échec parce qu'il y a échec préalable de la continuité, il est ridicule de poser le problème de la dérivation. Comme il y a deux sortes de continuité : en un point, ... uniforme, on peut se demander si le caractère de plus grande difficulté accordé par habitude à la seconde est justifié, et regarder ce qu'on fait au juste quand on précise la continuité en un point.

Nous allons montrer que la seconde est aussi primitive (sinon plus) et aussi simple (sinon plus) que la première.

1. Un exemple instructif est celui de *la continuité du sinus.*

On commence habituellement par observer que $|\sin x| < |x|$, d'où continuité au point zéro et, par la formule qui transforme $\sin(x+h) - \sin x$, on passe au point x grâce au fait que le cosinus est borné. Cela, c'est de la continuité uniforme, exactement.

N'objectez pas qu'on a commencé par la continuité au point zéro : vous avez admis pour la géométrie que le segment de droite est plus court... (ou que la « perpendiculaire » est plus courte...). Vous auriez pu tout autant admettre que :

$$HH' < MM' \text{ c'est-à-dire } |\Delta(\sin x)| < |\Delta x|,$$

cela a la même valeur logique qu'au point zéro et donne directement : quel que soit $\varepsilon > 0$, $|\Delta x| < \varepsilon \implies |\Delta(\sin x)| < \varepsilon$, c'est uniquement en particularisant un point qu'on a la continuité en ce point, en prenant la continuité uniforme « autour du point ».

2. Prenons maintenant l'application $x \longmapsto x^3$ dans $\mathbb{R}$, au point x_0 (on va supposer $x_0 > 0$). L'élève étudie $|(x_0 + h)^3 - x_0^3|$, il consent aussi bien à étudier $|x^3 - x_0^3|$ qu'il écrit $|x - x_0|\,|x^2 + xx_0 + x_0^2|$, puis il sèche à cause du 2ᵉ facteur ; les majorations que vous lui proposez alors peuvent lui sembler artificielles ; vous l'aidez mieux en lui conseillant de prendre un segment $[a, b]$, $x_0 \in]a, b[$, pour amener avec naturel le majorant $3\,b^2$ du 2ᵉ facteur, et la démonstration s'achève bien.

Vous venez, en fait, de démontrer l'uniforme continuité sur tout intervalle fini. Il vallait mieux le dire.

On peut donner bien d'autres exemples.

3. Tout enseignement, même agrémenté d'exemples, porte mal sans contre-exemples. La non-continuité.

Il est facile de faire reconnaître le caractère banal de la non-continuité en un point ; n'insistons pas.

Mais est-il plus difficile de banaliser correctement la non-uniforme-continuité ? — sûrement pas s'il y a non-continuité ne fût-ce qu'en un point —, mais s'il y a continuité en tout point ?

Autrement dit, est-il difficile de faire comprendre ceci : « Si proches l'un de l'autre qu'on prenne x et x', on pourra toujours les trouver tels que la distance de leurs images $f(x)$, $f(x')$, soit supérieure à un certain nombre. »

Reprenons $x \longmapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^+$ par exemple).

Il est interdit de prendre $[a, b]$, donc : plus de majorant ; vous faites remarquer que la méthode ne marche pas et que par conséquent rien n'est prouvé.

Mais avec l'idée énoncée plus haut : prenons un positif k, l'inégalité $|x - x'|\,|x^2 + xx' + x'^2| > k$, sera assurée malgré $|x - x'| = h$, si petit que soit h, si on a $|x^2 + xx' + x'^2| > \frac{k}{h}$, ce qui se produit pour x et x' suffisamment grands (qu'on précisera).

La non-uniforme continuité a été vue correctement (*nota*).

Nota : L'usage strict des quantificateurs exige qu'on prenne $|x - x'| < h$, ce qui est d'un emploi incommode ici ; mais il est clair que :

$$\exists x \exists x',\ |x - x'| = h \implies \exists x_1\ \exists x_1',|x_1 - x'_1| < h$$

puisqu'il suffit de prendre $[x_1, x'_1] \subset [x, x']$.

J. S.

4. Dans les exemples précédents une comparaison hâtive pourrait laisser croire que les conclusions s'opposent par le fait que dans 2 on a borné l'image par une restriction à l'intervalle fini $[a, b]$. Il n'en est rien : image bornée n'est pas nécessaire, on le voit avec $y = x$ sur $\mathbb{R}$, et aussi dans l'exemple suivant :

$$x \longmapsto \sqrt{x} \text{ sur } \mathbb{R}^+ \text{ est uniformément continue.}$$

C'est concrètement évident sur le graphique ; pourquoi est-ce concret ? Parce qu'on voit que, Δx étant donné, Δy, est une fonction décroissante de x ; sa majoration est alors naturelle ($\Delta x > 0$) :

$$\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} \leqslant \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x}} = \Delta x$$

alors $\Delta x < \varepsilon^2 \implies \Delta y < \varepsilon$.

D'ailleurs cette dernière implication exprime la continuité au point zéro, cela se passe comme pour le sinus.

5. Image bornée n'est d'ailleurs pas non plus suffisant : $x \longmapsto \sin \frac{1}{x}$ sur $]0, a[$ n'est pas uniformément continue, car on peut trouver deux valeurs de x aussi proches qu'on veut, mais telles que la distance de leurs images soit égale à 2 : il suffit, en effet, d'observer que la différence des abscisses de deux extrémums consécutifs tend vers zéro quand l'abscisse de l'un d'eux tend vers zéro.

6. Ainsi le fait que l'image soit bornée ou non semble n'avoir pas d'importance. Cependant, il est vrai que si f est uniformément continue sur un ensemble borné, l'image est bornée ; si on sait cela la réponse dans toute une classe de cas est immédiate (exemple $\frac{1}{x}$ sur $]0, 1]$).

Un examen plus attentif des exemples 1) et 2) montre que la réussite y est due, en fait, à la dérivée bornée. Quand on aura étudié la dérivation, on pourra revenir sur ce point avec ce que Choquet appelle le « théorème clef » (*Bulletin 253*, p. 336) :

$$\text{si } |f'| \leqslant k,\ |\Delta y| \leqslant k|\Delta x|.$$

L'appliquer est équivalent à ce que nous avons fait.

Dans 3) et dans 5) la clef ne fonctionne pas et la continuité n'est pas uniforme. Dans 4) elle ne fonctionne pas non plus (f' est infini au point 0).

La continuité est cependant uniforme. C'est un contre-exemple : la clef n'est que suffisante.

7. Il est facile de démontrer que si deux applications sont uniformément continues, leur somme l'est également ; mais pour leur produit, où on est amené à copier la démonstration sur celle de la limite d'un produit, on voit qu'on a besoin d'une hypothèse supplémentaire : supposer les applications bornées.

Si elles ne sont pas bornées on ne peut rien dire. Effectivement, prenons encore un exemple :

$$y = x \sin x \text{ n'est pas uniformément continue sur } \mathbb{R}.$$

L'allure du graphique conduit à chercher les couples fautifs dans les voisinages des points où la dérivée prend de grandes valeurs absolues (on sait que ce n'est pas suffisant *a priori*, mais c'est une indication).

Prenons

$$\begin{cases} x' = n\pi + h \ (n \in \mathbb{N}) \\ x'' = n\pi \end{cases} \text{ d'où } y' - y'' = \pm (n\pi + h) \sin h$$

alors quel que soit h pris dans $]0, \frac{\pi}{2}]$, $|y' - y''|$ prend des valeurs arbitrairement grandes pour n suffisamment grand.

Le lecteur ne manquera pas de nous demander à quel niveau nous pensons que de tels exercices puissent être faits. Nous pourrons le préciser relativement : c'est dès que l'on parlera de la continuité avec l'intention honorable de la faire comprendre.

Si nous avons la curiosité (honorable aussi) de consulter les programmes nous constatons que les barrages familiers sont là : toujours « on admettra sans démonstration... » (on peut dire que les mathématiques sont une « discipline » !). Mais peu importe, nous venons seulement de donner des exemples destinés à illustrer les définitions.

Effectivement il est difficile, dans un enseignement d'initiation, de démontrer, par exemple, l'uniforme continuité d'une application continue sur un segment.

Mais qu'on nous permette cependant — et pour terminer — la remarque suivante : les fonctions qu'on rencontre dans l'enseignement élémentaire sont le plus souvent monotones par morceaux, de plus, les ensembles de départ et image sont des réunions finies d'intervalles alors il est intéressant de démontrer la propriété suivante, qui est d'ailleurs bien banale :

f étant définie sur $[a, b]$ et monotone (croissante, par exemple), si l'image de $[a, b]$ par f est le segment $[f(a), f(b)]$, f est uniformément continue.

C'est intéressant parce que c'est simple, et plus fort, en un sens, que la propriété énoncée plus haut, car il n'y a aucune propriété de continuité dans l'hypothèse.

Donnons brièvement la démonstration :

à une partition de $[f(a), f(b)]$ en n intervalles égaux tels que $\frac{f(b) - f(a)}{n} < \varepsilon$ (ε étant positif arbitraire, n en résulte) correspond une partition (une seule si f est strictement croissante) de $[a, b]$ par des points

$$x_0 = a, x_1, \ldots, x_i \ldots, x_n = b \text{ ; \textit{en prenant} } h = \inf(x_{i+1} - x_i),$$

pour tout couple $x'x''$ tel que $0 < x' - x'' < h$ on a

$$f(x_i) - f(x'') < \varepsilon \quad \text{ou} \quad \ldots < 2\,\varepsilon$$

selon que x' et x'' appartiennent à un même intervalle ou à deux intervalles adjacents de la partition qu'on a formée sur $[a, b]$.

On remarquera que cette propriété entraîne immédiatement la continuité uniforme de f^{-1} définie pour f strictement monotone et continue sur un segment.

Sur l'utilité des barycentres

R. ESTÈVE,

professeur honoraire au lycée J.-Decour.

Plan. — Dans un ouvrage de Mathématiques pour la classe de Première, il est proposé un exercice dont voici une partie seulement : I *étant le barycentre des points massifs* (A, α), (B, β), (C, γ), ($\alpha + \beta + \gamma \neq 0$), *à quoi est égal* $(\alpha \overrightarrow{IA} + \beta \overrightarrow{IB} + \gamma \overrightarrow{IC})^2$? *Montrer que l'on peut en déduire*

$$\alpha\, IA^2 + \beta\, IB^2 + \gamma\, IC^2$$

en fonction de α, β, γ et des côtés a, b, c du triangle ABC.

Comme $\alpha \overrightarrow{IA} + \beta \overrightarrow{IB} + \gamma \overrightarrow{IC} = \vec{0}$, il s'agit de montrer que le carré scalaire d'un vecteur nul est le scalaire 0. Dans presque tous les ouvrages où se trouve exposé le produit scalaire de deux vecteurs, on oublie de signaler ceci (que l'on utilise tout de même constamment) que le produit scalaire de deux vecteurs est nul dans deux cas et deux seulement, le cas où l'un au moins des vecteurs est nul (c'est ce cas qui est surtout oublié) et le cas où les deux vecteurs sont rectangulaires. Si le produit scalaire des deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ (nous les prenons de même origine pour mieux nous expliquer) est défini par l'égalité $\overrightarrow{OA} . \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos\theta$ (ce qui est courant, à condition de connaître déjà le cosinus), le produit qui figure au second membre de cette égalité a son troisième facteur qui dépend évidemment des deux vecteurs et qui n'a aucun sens lorsque l'un au moins de ceux-ci est nul, par exemple $\overrightarrow{OA}$. La seule ressource est alors un passage à la limite : pour cela, on prend deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ faisant l'angle θ et l'on imagine que A se déplace sur la demi-droite OA et tend vers O ; OA devient nul, OB reste le même ainsi que $\cos\theta$, et $\overrightarrow{OA} . \overrightarrow{OB}$ tend vers 0. Dans le cas particulier où $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$, donc $\theta = 0$, ceci conduit à dire que $(\vec{0})^2 = 0$. Si le produit scalaire $\overrightarrow{OA} . \overrightarrow{OB}$ est défini par $\overrightarrow{OA} . \overrightarrow{OB} = OI^2 - IA^2$, où I est le milieu de AB (on ne connaît pas encore le cosinus et c'est ce que nous avons fait dans notre article du n° 238), les précautions précédentes sont inutiles : par exemple, si $\overrightarrow{OA} = 0$, I est au milieu de OB et $OI^2 - IA^2$ ou $OI^2 - IB^2 = 0$.

Si nous nous sommes décidé à faire ces quelques remarques, c'est qu'il nous a semblé que, dans une première mise en contact des élèves avec le pro-