

bulletin de l'association des
professeurs de mathématiques
de l'enseignement public

“de la Maternelle aux Facultés”

Connecteurs logiques • Des cours d'arithmétique •
La continuité • Expérience en Quatrième • RAPPORT
DE LA COMMISSION MINISTÉRIELLE • Programmes
pour les classes élémentaires • Vive Euclide ! •
Les collègues écrivent • L'Assemblée générale

bimestriel - 46^e année - mai-septembre 1967

n° 258

LES PUBLICATIONS DE L'A.P.M.E.P.

En plus de son *Bulletin* servi à tous les adhérents de l'A.P.M.E.P. et à ses abonnés, l'A.P.M.E.P. a décidé, en 1960, de publier des livres ou des brochures écrits par un ou plusieurs de ses membres et pouvant servir au progrès de l'enseignement des mathématiques.

Les tirages des premiers titres de sa collection « **les brochures de l'A.P.M.** » ayant été limités ont été rapidement épuisés. Restent disponibles, parmi les derniers ouvrages parus :

7. *Lecture commentée d'une méta-démonstration de Gödel*, par J. Balibar, Maître-Assistant à la Faculté des Sciences de Poitiers (mai 1962) 32 p., prix 3 F.

8. *Le Cours de l'A.P.M.* — 2. *Espaces vectoriels*, par A. et G. Revuz, 1963, 200 p., prix 25 F.

10. *Le Cours de l'A.P.M.* — 3. *Eléments de topologie*, par A. et G. Revuz, 1966, 250 p., prix 27 F.

L'édition d'une nouvelle collection, la **Bibliothèque d'Enseignement Mathématique (B.E.M.)** a commencé en 1967 avec :

1. *Pour apprendre à conjecturer : initiation à la statistique*, par MM. Guerber et P.-L. Hennequin (Université de Clermont), 1967, 240 p., prix 25 F.

Conditions de vente et d'expédition.

Les ouvrages précédents ne sont pas en vente en librairie. Pour se les procurer, opérer de la façon suivante :

1° Rédiger une formule de virement postal au compte de l'A.P.M.E.P. : Paris 5708-21, du montant des livres demandés (les prix sont compris franco de port).

2° Bien préciser *au dos du virement* les titres des ouvrages commandés.

3° Envoyer les trois volets du virement, sous enveloppe timbrée à 0,30 F, au Secrétaire administratif de l'A.P.M.E.P., M. Blondel, 154, avenue Marcel-Cachin, 92 - Châtillon-sous-Bagneux.

Vous recevrez les ouvrages commandés en paquet-poste dans le plus court délai.

Le secrétariat de l'A.P.M.E.P. participe également à la diffusion des œuvres complètes d'Evariste Dupont dont le seul ouvrage paru est : *Apprentissage mathématique. I*, un volume de 248 p., (Sudel éditeur) (Prix : 15 F franco pour les membres de l'A.P.M.E.P.).

**

Les ouvrages cités ci-dessus sont édités au prix coûtant. Aucune remise ne peut donc être consentie à quelque titre que ce soit.

**

Bibliothèque d'Enseignement Mathématique.

Ouvrages en préparation.

— *Initiation au Calcul des Probabilités*, par L. Guerber et P.-L. Hennequin.

— *Le Cours de l'A.P.M. I. Groupes, anneaux, corps*, par A. et G. Revuz (seconde édition du premier volume actuellement épuisé ; ouvrage complètement revu et augmenté).

— *Le dictionnaire de l'A.P.M.*, dictionnaire de mathématiques sur fiches.

I. ÉTUDE

Fonctions caractéristiques des connecteurs

Maurice GLAYMANN,

Faculté des Sciences de Lyon.

Il existe deux points de vue pour étudier la logique : la méthode *syntactique*, qui est purement axiomatique, et la méthode *sémantique*, plus intuitive et basée sur l'utilisation des *valeurs* de vérité. Pour une première initiation, les valeurs de vérité sont fort commodes, cependant il est possible d'*algébriser* le calcul des propositions par l'introduction des *fonctions caractéristiques des connecteurs*, sans avoir recours aux valeurs de vérité. C'est ce que nous nous proposons de montrer dans cet article (1).

1. Valeur d'une proposition.

En logique *bivalente*, une proposition x est une phrase *vraie* ou *fausse*. Désignons par $\mathcal{P}$ l'ensemble des propositions, par $\mathcal{V}$ la partie de $\mathcal{P}$ définie par les propositions vraies et par $\mathcal{F}$ la partie de $\mathcal{P}$ définie par les propositions fausses. Les parties $\mathcal{V}$ et $\mathcal{F}$ constituent une *partition* de l'ensemble $\mathcal{P}$.

Considérons alors l'ensemble $\mathcal{B} = \{0,1\}$ et l'application $h : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{B}$, telle que, quel que soit $x, x \in \mathcal{P}$,

$$(1) \quad h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathcal{V} \\ 0 & \text{si } x \in \mathcal{F} \end{cases}$$

$h(x)$ s'appelle la *valeur* de la proposition x .

Il est clair que, quel que soit $x, x \in \mathcal{P}$,

$$(2) \quad h^2(x) = h(x).$$

(1) Le lecteur notera le lien étroit qui existe entre les fonctions caractéristiques des connecteurs et les fonctions caractéristiques des ensembles (voir l'article *fonction caractéristique et ensemble*, n° 253).

2. Négation d'une proposition.

Soit x un élément de $\mathcal{P}$ et désignons par $\neg x$ sa *négation*. Si $x \in \mathcal{V}$, alors $\neg x \in \mathcal{F}$ et inversement, si $x \in \mathcal{F}$, alors $\neg x \in \mathcal{V}$. Il en résulte que, quel que soit x , $x \in \mathcal{P}$, on a :

$$(3) \quad h(x) + h(\neg x) = 1$$

et

$$(4) \quad h(x) \cdot h(\neg x) = 0.$$

3. Relation d'équivalence sur $\mathcal{P}$.

L'application $h : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{B}$ induit sur $\mathcal{P}$ une *relation d'équivalence* notée $\mathbf{H}$ et telle que, quels que soient x et y appartenant à $\mathcal{P}$,

$$(5) \quad x \mathbf{H} y \text{ si et seulement si } h(x) = h(y).$$

Autrement dit, deux propositions x et y sont *équivalentes modulo $\mathbf{H}$* , si et seulement si elles ont *même valeur*. Les éléments de l'ensemble quotient $\mathcal{P}/\mathbf{H}$ sont les parties $\mathcal{V}$ et $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}$. Dans la suite, nous désignerons par v un représentant de la classe $\mathcal{V}$ et par f un représentant de la classe $\mathcal{F}$.

Proposition 1. Quel que soit x , $x \in \mathcal{P}$, les deux propositions x et $\neg(\neg x)$ sont équivalentes modulo $\mathbf{H}$.

En effet, d'après (3),

$$h[\neg(\neg x)] = 1 - h(\neg x) = 1 - [1 - h(x)] = h(x).$$

Compte tenu de la définition (5), il vient :

$$(6) \quad \neg(\neg x) \mathbf{H} x.$$

4. Fonctions caractéristiques des connecteurs.

Un connecteur θ définit une *loi de composition interne* sur $\mathcal{P}$:

$$\theta : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$$

tel que :

$$\forall (x, y), (x, y) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}, (x, y) \longmapsto x \theta y.$$

Ainsi, par exemple, le connecteur $\wedge$ (conjonction *et*) associe, à deux éléments x et y de $\mathcal{P}$, l'élément $x \wedge y$ de $\mathcal{P}$.

la fonction caractéristique du connecteur θ , la valeur de la proposition $x \theta y$ et l'on pose par définition :

(7) $h(x \theta y) = a_1 + a_2 h(x) + a_3 h(y) + a_4 h(x) \cdot h(y)$,
où $h(x)$ et $h(y)$ sont respectivement les valeurs des propositions x et y ; les coefficients a_i ($i = 1, 2, 3, 4$) sont caractéristiques du connecteur θ . Nous montrerons plus bas que ce sont des *entiers* (éléments de $\mathbb{Z}$).

Définition 2. On appelle *caractéristique* du connecteur θ , l'entier :

$$(8) \quad C_\theta = a_1 + a_2 + a_3 + a_4.$$

Définition 3. On appelle *connecteur associé* au connecteur θ , le connecteur noté θ^* et tel que, quels que soient x et y , éléments de $\mathcal{P}$:

$$(9) \quad \neg(x \theta y) \mathbf{H} (x \theta^* y).$$

D'après la définition (5), on a :

$$\neg(x \theta^* y) \mathbf{H} \neg[\neg(x \theta y)],$$

la proposition 1 permet alors d'écrire :

$$\neg(x \theta^* y) \mathbf{H} (x \theta y),$$

il en résulte que le connecteur θ^* est *associé* à θ , ceci conduit à dire que les connecteurs θ et θ^* sont *associés*.

Proposition 2. La caractéristique d'un connecteur prend sa valeur sur l'ensemble $\mathcal{B}$.

En effet,

$\forall (x, y), (x, y) \in \mathcal{P}^2 : h(x \theta y) = a_1 + a_2 h(x) + a_3 h(y) + a_4 h(x) \cdot h(y)$
en particulier, pour deux propositions x et y *vraies*, il vient :

$$h(v \theta v) = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = C_\theta$$

comme $v \theta v \in \mathcal{P}$, il en résulte que $h(v \theta v) \in \mathcal{B}$, d'où la proposition 2.

Proposition 3. La somme des caractéristiques de deux connecteurs associés est égale à 1.

En effet,

$$\forall (x, y), (x, y) \in \mathcal{P}^2 : h(x \theta^* y) = 1 - h(x \theta y)$$

en particulier, pour deux propositions x et y *vraies*, il vient :

$$h(v \theta^* v) = 1 - h(v \theta v),$$

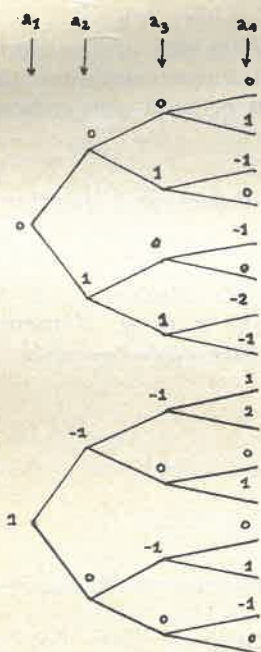
soit

$$C_{\theta^*} = 1 - C_\theta,$$

ou encore

$$C_\theta + C_{\theta^*} = 1,$$

d'où la proposition 3.



Propriétés des coefficients a_i d'une fonction caractéristique :

Soit un connecteur θ et sa fonction caractéristique :

$$h(x \theta y) = a_1 + a_2 h(x) + a_3 h(y) + a_4 h(x) \cdot h(y).$$

Pour deux propositions fausses x et y , il vient :

$$h(f \theta f) = a_1,$$

il en résulte que $a_1 \in \{0, 1\}$.

Pour une proposition vraie x et une proposition fausse y ,

$$h(v \theta f) = a_1 + a_2,$$

il s'ensuit que $a_1 + a_2 \in \mathcal{B}$, donc $a_2 \in \{-1, 0, 1\}$. On montre de même, en prenant une proposition fausse x et une proposition vraie y , que $a_3 \in \{-1, 0, 1\}$. Enfin, compte tenu de la proposition 2, on a $a_4 \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Ces résultats permettent de construire l'arbre de toutes les fonctions caractéristiques (figure 1) ; ceci montre qu'il existe seize fonctions caractéristiques et, par suite, seize connecteurs (deux à deux associés) que nous allons étudier.

5. Conjonction.

Le connecteur *conjonction* (et), noté $\wedge$, est tel que la proposition $x \wedge y$ est vraie si et seulement si les propositions x et y sont toutes deux vraies.

Proposition 4. On a :

$$\forall (x, y), (x, y) \in \mathcal{P}^2 : h(x \wedge y) = h(x) \cdot h(y).$$

En effet, si les propositions x et y sont toutes deux vraies :

$$h(v \wedge v) = 1 \text{ et } h^2(v) = 1,$$

si l'une des propositions est vraie, l'autre fausse, ou si elles sont toutes deux fausses, on a :

$$h(x \wedge y) = 0 \text{ et } h(x) \cdot h(y) = 0,$$

d'où la proposition 4.

Propriétés de la conjonction.

a) *Commutativité*. D'après la proposition 4,

$$\forall (x, y), (x, y) \in \mathcal{P}^2 : h(x \wedge y) = h(x) \cdot h(y) = h(y) \cdot h(x) = h(y \wedge x),$$

il en résulte que :

$$\forall (x, y), (x, y) \in \mathcal{P}^2 : (x \wedge y) \mathbf{H} (y \wedge x).$$

b) *Idempotence*. De même :

$$\forall x, x \in \mathcal{P} : h(x \wedge x) = h^2(x) = h(x),$$

et

$$\forall x, x \in \mathcal{P} : (x \wedge x) \mathbf{H} x.$$

c) *Associativité*. x , y et z étant trois propositions, d'après la proposition 4, on a :

$$\begin{aligned} h[x \wedge (y \wedge z)] &= h(x) \cdot h(y \wedge z) = h(x) \cdot [h(y) \cdot h(z)], \\ &= [h(x) \cdot h(y)] \cdot h(z) = h(x \wedge y) \cdot h(z), \\ &= h[(x \wedge y) \wedge z], \end{aligned}$$

d'où :

$$\forall (x, y, z), (x, y, z) \in \mathcal{P}^3 : [x \wedge (y \wedge z)] \mathbf{H} [(x \wedge y) \wedge z].$$

d) *Élément neutre*.

L'élément v est neutre pour le connecteur $\wedge$. En effet,

$$\forall x, x \in \mathcal{P} : h(v \wedge x) = h(v) \cdot h(x) = h(x),$$

et

$$\forall x, x \in \mathcal{P} : (v \wedge x) \mathbf{H} x,$$

de même $\forall x, x \in \mathcal{P} : (x \wedge v) \mathbf{H} x$.

e) *Théorème de la contradiction*. La conjonction d'une proposition et de sa négation est une proposition fausse.

En effet, d'après la proposition 4 et la formule (4), on a, quelle que soit la proposition x :

$$h(x \wedge \neg x) = h(x) \cdot h(\neg x) = 0,$$

il en résulte que $\forall x, x \in \mathcal{P} : (x \wedge \neg x) \mathbf{H} f$. D'où le théorème de la contradiction.

Corollaire. Quelle que soit la proposition x , $\neg(x \wedge \neg x) \mathbf{H} v$.

6. Disjonction.

Le connecteur *disjonction inclusif*, ou plus simplement *disjonction* (ou *inclusif*), noté $\vee$, est tel que la proposition $x \vee y$ est fausse si et seulement si les propositions x et y sont toutes deux fausses.

En examinant tous les cas possibles, il est facile de vérifier que :

$$h(x \vee y) + h(x \wedge y) = h(x) + h(y),$$

en particulier :

$\forall (x, y), (x, y) \in \mathcal{P}^2 : h(x \vee y) = h(x) + h(y) - h(x \wedge y)$,
compte tenu de la proposition 4, il vient :

Proposition 5.

$$\forall (x, y), (x, y) \in \mathcal{P}^2 : h(x \vee y) = h(x) + h(y) - h(x) \cdot h(y).$$

Propriétés de la disjonction.

a) **Commutativité.** D'après la proposition 5,

$$\begin{aligned} \forall (x, y), (x, y) \in \mathcal{P}^2 : h(x \vee y) &= h(x) + h(y) - h(x) \cdot h(y), \\ &= h(y) + h(x) - h(y) \cdot h(x), \\ &= h(y \vee x). \end{aligned}$$

il en résulte que :

$$\forall (x, y), (x, y) \in \mathcal{P}^2 : (x \vee y) \mathbf{H} (y \vee x).$$

b) **Idempotence.** D'après la proposition 5 et la formule (2), on a :

$$\forall x, x \in \mathcal{P} : h(x \vee x) = h(x) + h(x) - h^2(x) = h(x).$$

donc :

$$\forall x, x \in \mathcal{P} : (x \vee x) \mathbf{H} x.$$

c) **Associativité.** Considérons trois propositions x, y et z , on a :

$$\begin{aligned} h[x \vee (y \vee z)] &= \\ h(x) + h(y \vee z) - h(x) \cdot h(y \vee z) &= \\ h(x) + h(y) + h(z) - h(y) \cdot h(z) - h(x) [h(y) + h(z) - h(y) \cdot h(z)] &= \\ h(x) + h(y) - h(x) \cdot h(y) + h(z) - h(z) [h(x) + h(y) - h(x) \cdot h(y)] &= \\ h(x \vee y) + h(z) - h(x \vee y) \cdot h(z) &= \\ h[(x \vee y) \vee z], \end{aligned}$$

d'où :

$$\forall (x, y, z), (x, y, z) \in \mathcal{P}^3 : [x \vee (y \vee z)] \mathbf{H} [(x \vee y) \vee z].$$

d) **Elément neutre.** L'élément f est neutre pour le connecteur $\vee$.

En effet,

$$\forall x, x \in \mathcal{P} : h(x \vee f) = h(x) + h(f) - h(x) \cdot h(f) = h(x),$$

donc :

$$\forall x, x \in \mathcal{P} : (x \vee f) \mathbf{H} x,$$

de même : $\forall x, x \in \mathcal{P} : (f \vee x) \mathbf{H} x$.

e) **Théorème du tiers exclu.** La disjonction d'une proposition et de sa négation est une proposition vraie.

En effet, d'après la proposition 5 et les formules (3) et (4), on a, quel que soit x :

$$h(x \vee \neg x) = h(x) + h(\neg x) - h(x) \cdot h(\neg x) = 1,$$

il en résulte que $\forall x, x \in \mathcal{P} : (x \vee \neg x) \mathbf{H} v$. D'où le théorème du tiers exclu.

f) **Distributivité.** Les connecteurs conjonction et disjonction sont distributifs l'un par rapport à l'autre.

En effet, quelles que soient les propositions x, y et z :

$$\begin{aligned} h[x \vee (y \wedge z)] &= \\ h(x \vee y) \cdot h(x \vee z) &= \\ [h(x) + h(y) - h(x) \cdot h(y)] [h(x) + h(z) - h(x) \cdot h(z)] &= \\ h(x) + h(y) \cdot h(z) - h(x) \cdot h(y) \cdot h(z) &= \\ h(x) + h(y \wedge z) - h(x) \cdot h(y \wedge z) &= \\ h[x \vee (y \wedge z)], \end{aligned}$$

il en résulte que :

$$\forall (x, y, z), (x, y, z) \in \mathcal{P}^3 : [x \vee (y \wedge z)] \mathbf{H} [(x \vee y) \wedge (x \vee z)]$$

On démontre de même que :

$$\forall (x, y, z), (x, y, z) \in \mathcal{P}^3 : [x \wedge (y \vee z)] \mathbf{H} [(x \wedge y) \vee (x \wedge z)]$$

g) **Propriété d'absorption.**

Nous avons, quelles que soient les propositions x et y :

$$\begin{aligned} h[x \wedge (x \vee y)] &= h(x) \cdot h(x \vee y) \\ &= h(x) \cdot [h(x) + h(y) - h(x) \cdot h(y)] \\ &= h(x). \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\forall (x, y), (x, y) \in \mathcal{P}^2 : [x \wedge (x \vee y)] \mathbf{H} x.$$

On démontre de même que :

$$\forall (x, y), (x, y) \in \mathcal{P}^2 : [x \vee (x \wedge y)] \mathbf{H} x.$$

7. Théorèmes de Morgan et connecteurs de Sheffer.

Considérons deux éléments x et y de $\mathcal{P}$ et la proposition $\neg(x \vee y)$.

On a :

$$\begin{aligned} \forall (x, y), (x, y) \in \mathcal{P}^2 : h[\neg(x \vee y)] &= 1 - h(x \vee y) \\ &= 1 - h(x) - h(y) + h(x) \cdot h(y) \\ &= h(\neg x) - h(y) \cdot h(\neg x) \\ &= h(\neg x) \cdot h(\neg y) \\ &= h(\neg x \wedge \neg y). \end{aligned}$$

D'où :

$$\forall (x, y), (x, y) \in \mathcal{P}^2 : [\neg(x \vee y)] \mathbf{H} (\neg x \wedge \neg y).$$

C'est le premier théorème de Morgan : la négation de la disjonction de deux propositions est équivalente modulo $\mathbf{H}$ de la conjonction des négations de ces propositions.

On démontre de même que :

$$\forall (x, y), (x, y) \in \mathcal{P}^2 : [\neg(x \wedge y)] \mathbf{H} (\neg x \vee \neg y),$$

résultat qui constitue le second théorème de Morgan : la négation de la conjonction de deux propositions est équivalente modulo **H** de la disjonction des négations de ces propositions.

Définition 4. Les connecteurs respectivement associés aux connecteurs conjonction et disjonction, notés $\downarrow$ et $\uparrow$, sont appelés *premier* et *second connecteurs de Sheffer*.

Compte tenu de cette définition, quelles que soient les propositions x et y ,

$$(x \downarrow y) \mathbf{H} [\neg(x \wedge y)]$$

et

$$(x \uparrow y) \mathbf{H} [\neg(x \vee y)].$$

Il en résulte que :

$$h(x \downarrow y) = 1 - h(x) \cdot h(y)$$

et

$$h(x \uparrow y) = 1 - h(x) - h(y) + h(x) \cdot h(y).$$

Propriétés des connecteurs de Sheffer.

1) On a, quelle que soit la proposition x ,

$$h(x \downarrow x) = 1 - h^2(x) = 1 - h(x) = h(\neg x).$$

De même :

$$h(x \uparrow x) = 1 - 2h(x) + h^2(x) = 1 - h(x) = h(\neg x).$$

Il s'ensuit que :

$$\forall x, x \in \mathcal{P} : (x \downarrow x) \mathbf{H} (x \uparrow x) \mathbf{H} (\neg x).$$

2) D'autre part, pour tout $(x, y) \in \mathcal{P}^2$:

$$\begin{aligned} h(\neg x \downarrow \neg y) &= 1 - h(\neg x) \cdot h(\neg y) \\ &= h(x) + h(y) - h(x) \cdot h(y) \\ &= h(x \vee y), \end{aligned}$$

et

$$\forall (x, y), (x, y) \in \mathcal{P}^2 : (\neg x \neg y) \mathbf{H} (x \vee y).$$

On démontre de même que :

$$\forall (x, y), (x, y) \in \mathcal{P}^2 : (\neg x \uparrow \neg y) \mathbf{H} (x \wedge y).$$

Compte tenu de la première propriété, on a encore :

$$[(x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)] \mathbf{H} (x \vee y)$$

et

$$[(x \uparrow x) \uparrow (y \uparrow y)] \mathbf{H} (x \wedge y).$$

8. Implication.

Le connecteur *implication* (« si... alors... »), noté $\Rightarrow$, est défini par :

$$\forall (x, y), (x, y) \in \mathcal{P}^2 : (x \Rightarrow y) \mathbf{H} (\neg x \vee y).$$

Ceci permet d'écrire :

$$\forall (x, y), (x, y) \in \mathcal{P}^2 : h(x \Rightarrow y) = 1 - h(x) + h(x) \cdot h(y).$$

Il en résulte que le connecteur associé à l'implication $\Rightarrow$ qui n'a pas de nom est tel que :

$$\begin{aligned} \forall (x, y), (x, y) \in \mathcal{P}^2 : h(x \Rightarrow * y) &= h[\neg(x \Rightarrow y)] \\ &= 1 - h(x \Rightarrow y) \\ &= h(x) - h(x) \cdot h(y) \\ &= h(x) \cdot h(\neg y) = h(x \wedge \neg y). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall (x, y), (x, y) \in \mathcal{P}^2 : x \Rightarrow * y \mathbf{H} (x \wedge \neg y).$$

Réciproque, inverse et contraposée d'une implication.

Les propositions :

$$y \Rightarrow x, \neg x \Rightarrow \neg y \text{ et } \neg y \Rightarrow \neg x$$

sont respectivement appelées *réciproque*, *inverse* et *contraposée* de l'implication $x \Rightarrow y$.

Il est clair que :

$$\begin{aligned} \forall (x, y), (x, y) \in \mathcal{P}^2 : h(y \Rightarrow x) &= 1 - h(y) + h(x) \cdot h(y) \\ \forall (x, y), (x, y) \in \mathcal{P}^2 : h(\neg y \Rightarrow * x) &= h(y) - h(x) \cdot h(y). \end{aligned}$$

Notons au passage que, quelles que soient les propositions x et y ,

$$(y \Rightarrow x) \mathbf{H} (x \vee \neg y)$$

et

$$(y \Rightarrow * x) \mathbf{H} (\neg x \wedge y).$$

Proposition 6. Toute implication et sa contraposée sont équivalentes modulo **H**. De même, les implications inverse et réciproque d'une implication donnée sont équivalentes modulo **H**.

En effet,

$$\begin{aligned} h(\neg y \Rightarrow \neg x) &= 1 - h(\neg y) + h(\neg x) \cdot h(\neg y) \\ &= 1 - h(x) + h(x) \cdot h(y) \\ &= h(x \Rightarrow y). \end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$\forall (x, y), (x, y) \in \mathcal{P}^2 : (\neg y \Rightarrow \neg x) \mathbf{H} (x \Rightarrow y).$$

De même,

$$\begin{aligned} h(\neg x \Rightarrow \neg y) &= 1 - h(\neg x) + h(\neg y) \cdot h(\neg x) \\ &= 1 - h(y) + h(x) \cdot h(y) \\ &= h(y \Rightarrow x), \end{aligned}$$

d'où

$$\forall (x, y), (x, y) \in \mathcal{P}^2 : (\neg x \Rightarrow \neg y) \mathbf{H} (y \Rightarrow x).$$

9. Equivalence et disjonction exclusive.

Le connecteur *équivalence* (si et seulement si), noté $\Leftrightarrow$, est défini par

$$\forall (x, y), (x, y) \in \mathcal{P}^2 : (x \Leftrightarrow y) \mathbf{H} [(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x)].$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \forall (x, y), (x, y) \in \mathcal{P}^2 : h(x \Leftrightarrow y) &= h(x \Rightarrow y) \cdot h(y \Rightarrow x) \\ &= 1 - h(x) - h(y) + 2h(x) \cdot h(y). \end{aligned}$$

Remarque importante. Il est essentiel de bien distinguer les deux écritures :

$$x \Leftrightarrow y \quad \text{et} \quad x \mathbf{H} y.$$

La première est une *proposition*, donc un élément de l'ensemble $\mathcal{P}$, alors que la seconde est une *propriété* relative aux propositions x et y .

Connecteur associé à l'équivalence : disjonction exclusive.

Par définition, nous avons

$$\begin{aligned} \forall (x, y), (x, y) \in \mathcal{P}^2 : h(x \Leftrightarrow^* y) &= h[\neg(x \Leftrightarrow y)] \\ &= 1 - h(x \Leftrightarrow y) \\ &= h(x) + h(y) - 2h(x) \cdot h(y). \end{aligned}$$

Le connecteur $\Leftrightarrow^*$ est appelé *disjonction exclusive*, on le note W . Nous avons donc :

$$\forall (x, y), (x, y) \in \mathcal{P}^2 : h(x W y) = h(x) + h(y) - 2h(x) \cdot h(y).$$

Propriétés de l'équivalence et de la disjonction exclusive.

1) La proposition $x \Leftrightarrow x$ est toujours vraie.

En effet,

$$\forall x, x \in \mathcal{P} : h(x \Leftrightarrow x) = 1 - h(x) - h(x) + 2h^2(x) = 1 = h(v)$$

d'où

$$\forall x, x \in \mathcal{P} : (x \Leftrightarrow x) \mathbf{H} v$$

Corollaire. La proposition $x W x$ est toujours fausse.

En effet,

$$(x W x) \mathbf{H} [\neg(x \Leftrightarrow x)]$$

donc

$$\forall x, x \in \mathcal{P} : (x W x) \mathbf{H} f.$$

Remarquons que

$$h(x W x) = h(x) + h(x) - 2h^2(x) = 0 = h(f).$$

2) *Commutativité.* Les fonctions caractéristiques des connecteurs $\Leftrightarrow$ et W sont symétriques en $h(x)$ et $h(y)$, il en résulte que :

$$\forall (x, y), (x, y) \in \mathcal{P}^2 : (x \Leftrightarrow y) \mathbf{H} (y \Leftrightarrow x)$$

et

$$\forall (x, y), (x, y) \in \mathcal{P}^2 : (x W y) \mathbf{H} (y W x).$$

3) Le lecteur démontrera à titre d'exercice que l'on a

$$\forall (x, y), (x, y) \in \mathcal{P}^2 : [(x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y)] \mathbf{H} (x W y)$$

et

$$\forall (x, y), (x, y) \in \mathcal{P}^2 : [(x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)] \mathbf{H} (x W y).$$

10. Projecteurs et négations.

Les connecteurs *projecteurs*, notés π_1 (resp. π_2) et appelés *premier projecteur* (resp. *deuxième projecteur*), sont définis par

$$\forall (x, y), (x, y) \in \mathcal{P}^2 : (x\pi_1 y) \mathbf{H} x$$

et

$$\forall (x, y), (x, y) \in \mathcal{P}^2 : (x\pi_2 y) \mathbf{H} y$$

Il en résulte que

$$\forall (x, y), (x, y) \in \mathcal{P}^2 : h(x\pi_1 y) = h(x)$$

et

$$\forall (x, y), (x, y) \in \mathcal{P}^2 : h(x\pi_2 y) = h(y)$$

Désignons par $\neg_1$ (resp. $\neg_2$) le connecteur associé à π_1 (resp. π_2) et appelé *première* (resp. *deuxième*) *négation*.

Par définition :

$$\forall (x, y), (x, y) \in \mathcal{P}^2 : (x\neg_1 y) \mathbf{H} \neg_1(x\pi_1 y)$$

soit

$$\forall (x, y), (x, y) \in \mathcal{P}^2 : (x\neg_1 y) \mathbf{H} \neg x$$

Il s'ensuit que

$$h(x\neg_1 y) = h(\neg x) = 1 - h(x)$$

de même,

$$h(x\neg_2 y) = h(\neg y) = 1 - h(y).$$

11. Connecteurs tantologique et antilogique.

Le connecteur *tantologique*, noté τ , est défini par

$$\forall (x, y), (x, y) \in \mathcal{P}^2 : (x\tau y) \mathbf{H} v$$

Il en résulte que

$$\forall (x, y), (x, y) \in \mathcal{P}^2 : h(x\tau y) = h(v) = 1.$$

Le connecteur associé au connecteur tantologique, noté α et appelé connecteur *antilogique*, est caractérisé par :

$$\forall (x, y), (x, y) \in \mathcal{P}^2 : (x\alpha y) \mathbf{H} \neg_1(x\tau y),$$

soit

$\forall (x, y), (x, y) \in \mathcal{P}^2 : (x \alpha y) \text{ H } f,$
il s'ensuit que, quelles que soient les propositions x et y ,
 $h(x \alpha y) = 0.$

12. Conclusion.

Nous avons associé à chacune des fonctions caractéristiques mises en évidence au paragraphe 4 un connecteur. Nous avons montré que ces connecteurs sont deux à deux associés.

L'utilisation des fonctions caractéristiques permet d'algébriquer le calcul des propositions ; en particulier, l'étude des tautologies est fort simple. Nous avons rencontré dans cet article un certain nombre de tautologies :

$$\neg(x \wedge \neg x) \text{ H } v \\ (x \vee \neg x) \text{ H } v \quad (\text{tiers exclu}).$$

Donnons d'autres exemples :

$$a) \forall (x, y), (x, y) \in \mathcal{P}^2 : [x \Rightarrow (x \vee y)] \text{ H } v,$$

en effet,

$$h[x \Rightarrow (x \vee y)] = 1 - h(x) + h(x) \cdot h(x \vee y) \\ = 1 - h(x) + h(x) [h(x) + h(y) - h(x) \cdot h(y)] \\ = 1 - h(x) + h(x) + h(x) \cdot h(y) - h(x) \cdot h(y) = 1$$

il s'ensuit que la proposition $[x \Rightarrow (x \vee y)]$ est vraie quelles que soient les propositions x et y .

b) *Modus ponens* :

$$\forall (x, y), (x, y) \in \mathcal{P}^2 : \{ [x \wedge (x \Rightarrow y)] \longrightarrow y \} \text{ H } v,$$

en effet,

$$h \{ [x \wedge (x \Rightarrow y)] \Rightarrow y \} \\ = 1 - h [x \wedge (x \Rightarrow y)] + h [x \wedge (x \Rightarrow y)] \cdot h(y) \\ = 1 - h(x) \cdot h(x \Rightarrow y) + h(x) \cdot h(x \Rightarrow y) \cdot h(y) \\ = 1 - h(x) [1 - h(x) + h(x) \cdot h(y)] + h(x) \cdot h(y) [1 - h(x) + h(x) \cdot h(y)]$$

il vient après simplifications,

$$h \{ [x \wedge (x \Rightarrow y)] \Rightarrow y \} = 1.$$

En particulier, si $x \wedge (x \Rightarrow y)$ est vraie, la proposition y est vraie, d'où la *règle du détachement* :

$$\frac{x, x \Rightarrow y}{y}$$

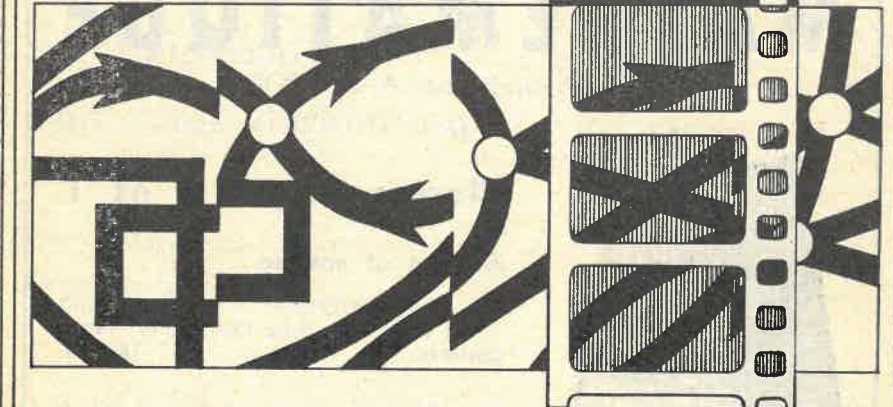
C'est, en fait, cette règle que nous utilisons dans nos démonstrations : sachant que la proposition x est vraie et que l'implication $x \Rightarrow y$ est vraie, nous déduisons que la proposition y est vraie, ce que nous énonçons *abusivement* sous la forme x implique y .

M. G.

FILMS MATHÉMATIQUES

FILMS COURTS

16 mm - 8 mm - 8 mm en boucle
couleurs - muets
de 3 minutes environ.



ARITHMÉTIQUE

Une série de 15 films de Z. P. DIENES ayant pour but l'approche des structures essentielles de la numération et des opérations élémentaires.

1

CORRESPONDANCES

Une série de 3 films destinés à illustrer, par l'utilisation des couleurs et des formes, les notions fondamentales concernant les applications

2

LOGARITHMES

Une série de 6 films qui se propose de concrétiser visuellement la notion de logarithmes.

3

TRIGONOMÉTRIE

Une série de 7 films destinés à introduire les fonctions trigonométriques circulaires à partir du cercle trigonométrique.

4

JEUX DE NOMBRES

Série de 5 films sur les ensembles destinée aux débutants en mathématiques.

Série de 12 films utilisant les ensembles pour expliquer les propriétés des nombres entiers à partir de leur décomposition en facteurs premiers.

5

NUMÉRATION BINAIRE

Deux films destinés à l'initiation à la numération binaire.

6

Adressez vos scénarii au SERVICE PRODUCTION



L'ÉOLIENNE

14, place Dauphine Paris 1^{er}
téléphone : 633-88-40 +